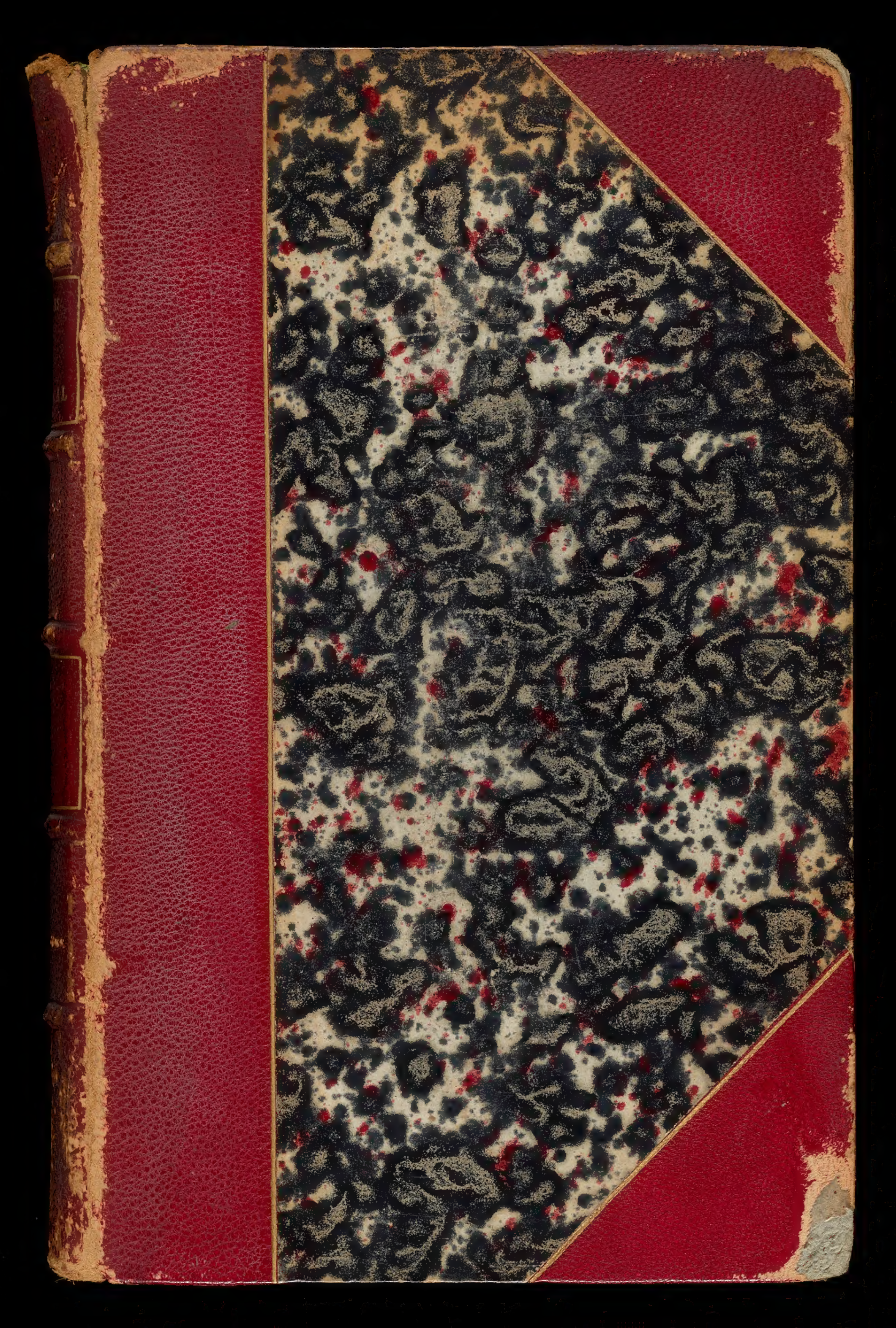
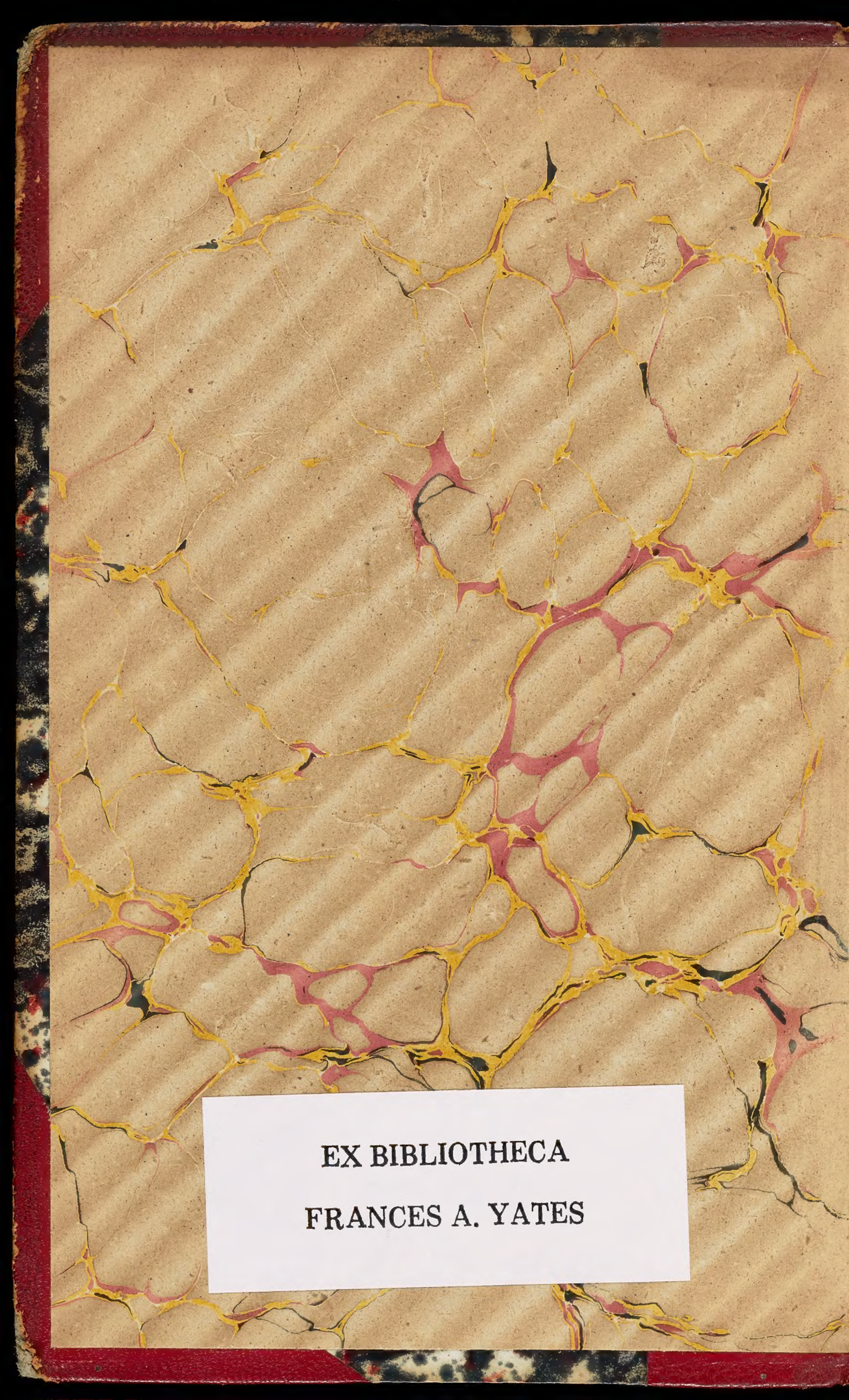
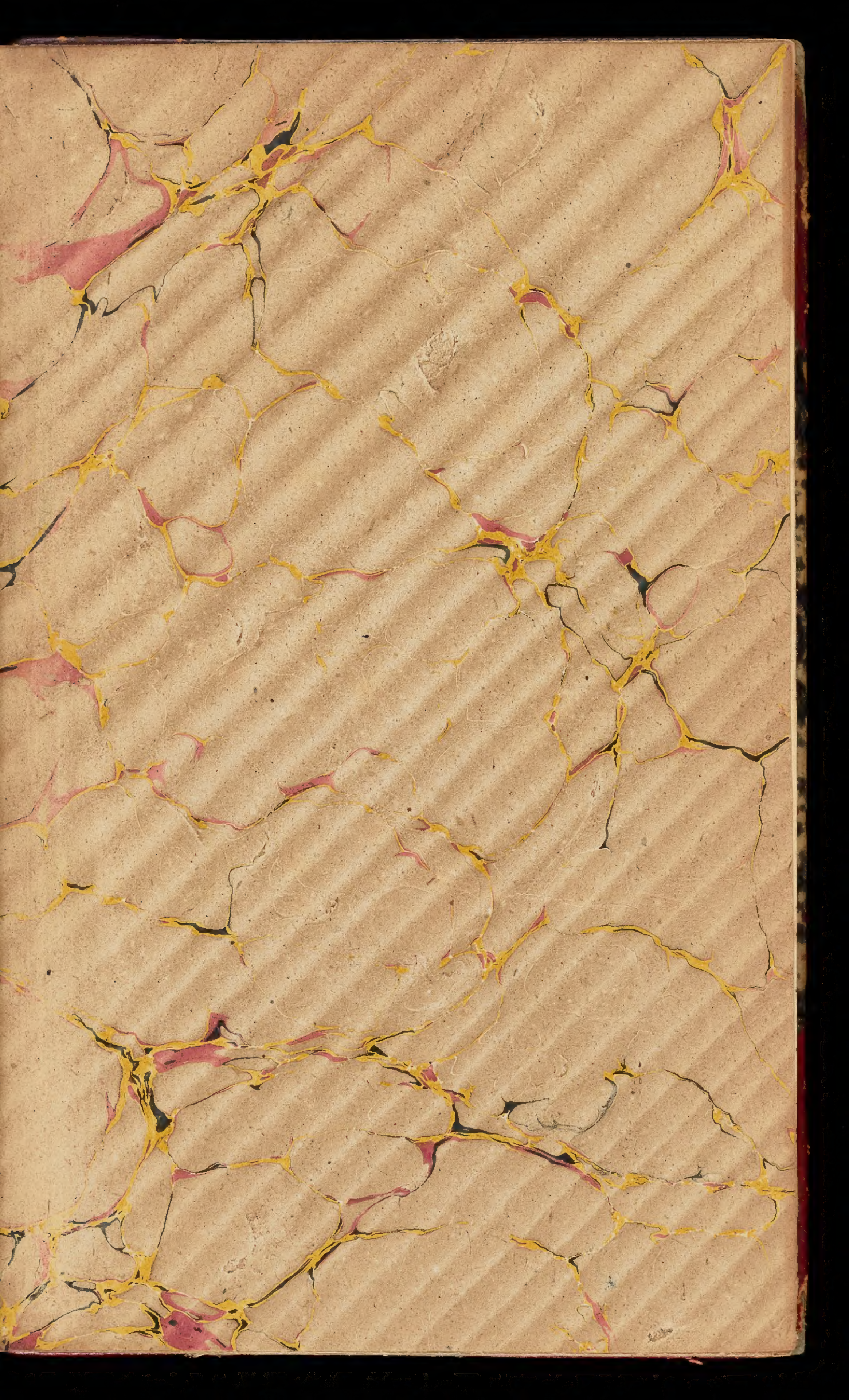



EX BIBLIOTHECA
FRANCES A. YATES



ŒUVRES COMPLÈTES

DE

BLAISE PASCAL

IMPRIMERIE GÉNÉRALE DE CH. LAHURE
Rue de Fleurus, 9, à Paris

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

BLAISE PASCAL

TOME TROISIÈME

PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, N° 77

1866

Tous droits réservés

PHYSIQUE.

NOUVELLES EXPÉRIENCES TOUCHANT LE VIDE.

AU LECTEUR.

Mon cher lecteur, quelques considérations m'empêchant de donner à présent un Traité entier, où j'ai rapporté quantité d'expériences nouvelles que j'ai faites touchant le vide, et les conséquences que j'en ai tirées, j'ai voulu faire un récit des principales dans cet abrégé où vous verrez par avance le dessein de tout l'ouvrage.

L'occasion de ces expériences est telle. Il y a environ quatre ans qu'en Italie on éprouva qu'un tuyau de verre de quatre pieds, dont un bout est ouvert, et l'autre scellé hermétiquement, étant rempli de vif-argent, puis l'ouverture bouchée avec le doigt ou autrement, et le tuyau disposé perpendiculairement à l'horizon, l'ouverture bouchée étant vers le bas, et plongée deux ou trois doigts dans d'autre vif-argent, contenu en un vaisseau moitié plein de vif-argent, et l'autre moitié d'eau; si on débouche l'ouverture, demeurant toujours enfoncée dans le vif-argent du vaisseau, le vif-argent du tuyau descend en partie, laissant au haut du tuyau un espace vide en apparence, le bas du même tuyau demeurant plein du même vif-argent jusqu'à une certaine hauteur. Et si on hausse un peu le tuyau jusqu'à ce que son ouverture, qui trempoit auparavant dans le vif-argent du vaisseau, sortant de ce vif-argent, arrive à la région de l'eau, le vif-argent du tuyau monte jusqu'en haut avec l'eau, et ces deux liqueurs se brouillent dans le tuyau; mais enfin tout le vif-argent tombe, et le tuyau se trouve tout plein d'eau.

Cette expérience ayant été mandée de Rome au R. P. Mersenne, minime à Paris, il la divulgua en France en l'année 1644, non sans l'admiration de tous les savans et curieux, par la communication desquels étant devenue fameuse de toutes parts, je l'appris de M. Petit, intendant des fortifications, et très-versé en toutes les belles-lettres, qui l'avoit apprise du R. P. Mersenne même. Nous la fîmes donc ensemble à Rouen, ledit sieur Petit et moi, de la même sorte qu'elle avoit été faite en Italie, et nous trouvâmes de point en point ce qui avoit été mandé de ce pays-là, sans y avoir pour lors rien remarqué de nouveau.

Depuis, faisant réflexion en moi-même sur les conséquences de cette expérience, elle me confirma dans la pensée où j'avois toujours été, que le vide n'étoit pas une chose impossible dans la nature, et qu'elle ne le fuyoit pas avec tant d'horreur que plusieurs se l'imaginent.

Ce qui m'obligeoit à cette pensée étoit le peu de fondement que je voyois à la maxime si reçue, que la nature ne souffre point le vide, qui

n'est appuyée que sur des expériences dont la plupart sont très-fausses, quoique tenues pour très-constantes : et des autres, les unes sont entièrement éloignées de contribuer à cette preuve, et montrent que la nature abhorre la trop grande plénitude, et non pas qu'elle fuit le vide : et les plus favorables ne font voir autre chose, sinon que la nature a horreur pour le vide, ne montrant pas qu'elle ne peut le souffrir.

A la foiblesse de ce principe, j'ajoutois les observations que nous faisons journellement de la raréfaction et condensation de l'air, qui, comme quelques-uns ont éprouvé, peut se condenser jusqu'à la millième partie de la place qu'il sembloit occuper auparavant, et qui se raréfie si fort, que je trouvois comme nécessaire, ou qu'il y eût un grand vide entre ses parties, ou qu'il y eût pénétration de dimensions Mais comme tout le monde ne recevoit pas cela pour preuve, je crus que cette expérience d'Italie étoit capable de convaincre ceux-là mêmes qui sont les plus préoccupés de l'impossibilité du vide

Néanmoins la force de la prévention fit encore trouver des objections qui lui ôtèrent la croyance qu'elle méritoit. Les uns dirent que le haut de la sarbacane étoit plein des esprits du mercure; d'autres, d'un grain imperceptible d'air raréfié; d'autres, d'une matière qui ne subsistoit que dans leur imagination : et tous, conspirant à bannir le vide, exercèrent à l'envi cette puissance de l'esprit, qu'on nomme subtilité dans les écoles, et qui, pour solution des difficultés véritables, ne donne que de vaines paroles sans fondement. Je me résolus donc de faire des expériences si convaincantes, qu'elles fussent à l'épreuve de toutes les objections qu'on pourroit y faire; j'en fis au commencement de cette année un grand nombre, dont il y en a qui ont quelque rapport avec celle d'Italie, et d'autres qui en sont entièrement éloignées, et n'ont rien de commun avec elle. Elles ont été si exactes et si heureuses, que j'ai montré par leur moyen, qu'un vaisseau si grand qu'on pourra le faire, peut être rendu vide de toutes les matières qui tombent sous les sens, et qui sont connues dans la nature; et quelle force est nécessaire pour faire admettre ce vide. C'est aussi par là que j'ai éprouvé la hauteur nécessaire à un siphon, pour faire l'effet qu'on en attend, après laquelle hauteur limitée, il n'agit plus, contre l'opinion si universellement reçue dans le monde durant tant de siècles; comme aussi le peu de force nécessaire pour attirer le piston d'une seringue, sans qu'il y succède aucune matière, et beaucoup d'autres choses que vous verrez dans l'ouvrage entier, dans lequel j'ai dessein de montrer quelle force la nature emploie pour éviter le vide, et qu'elle l'admet et le souffre effectivement dans un grand espace, que l'on rend facilement vide de toutes les matières qui tombent sous les sens. C'est pourquoi j'ai divisé le traité entier en deux parties, dont la première comprend le récit au long de toutes mes expériences avec les figures, et une récapitulation de ce qui s'y voit, divisée en plusieurs maximes; et la seconde, les conséquences que j'en ai tirées, divisées en plusieurs propositions, où j'ai montré que l'espace vide en apparence, qui a paru dans les expériences, est vide en effet de toutes les matières qui tombent sous les sens, et qui sont connues dans la nature. Dans la conclusion, je donne mon sentiment sur le

sujet du vide, et je réponds aux objections qu'on peut y faire. Ainsi, je me contente de montrer un grand espace vide, et je laisse à des personnes savantes et curieuses à éprouver ce qui se fait dans un tel espace: comme, si les animaux y vivent; si le verre en diminue sa réfraction; et tout ce qu'on peut y faire: n'en faisant nulle mention dans ce traité, dont j'ai jugé à propos de vous donner cet abrégé par avance, parce qu'ayant fait ces expériences avec beaucoup de frais, de peine et de temps, j'ai craint qu'un autre qui n'y auroit employé le temps, l'argent, ni la peine, me prévenant, ne donnât au public des choses qu'il n'auroit pas vues, et lesquelles par conséquent il ne pourroit pas rapporter avec l'exactitude et l'ordre nécessaire pour les déduire comme il faut: n'y ayant personne qui ait eu des tuyaux et des siphons de la longueur des miens, et peu qui voulussent se donner la peine nécessaire pour en avoir.

Et comme les honnêtes gens joignent à l'inclination générale qu'ont tous les hommes de se maintenir dans leurs justes possessions, celle de refuser l'honneur qui ne leur est pas dû, vous approuverez sans doute, que je me défende également, et de ceux qui voudroient m'ôter quelques-unes des expériences que je vous donne ici, et que je vous promets dans le traité entier, puisqu'elles sont de mon invention; et de ceux qui m'attribueroient celle d'Italie dont je vous ai parlé, puisqu'elle n'en est pas. Car encore que je l'aie faite en plus de façons qu'aucun autre, et avec des tuyaux de douze et même de quinze pieds de long, néanmoins je n'en parlerai pas seulement dans ces écrits, parce que je n'en suis pas l'inventeur; n'ayant dessein de donner que celles qui me sont particulières et de mon propre génie.

Abrégé de la première partie, dans laquelle sont rapportées les expériences.

EXPÉRIENCES.

I. Une seringue de verre avec un piston bien juste, plongée entièrement dans l'eau, et dont on bouche l'ouverture avec le doigt, en sorte qu'il touche au bas du piston, mettant pour cet effet la main et le bras dans l'eau; on n'a besoin que d'une force médiocre pour le retirer, et faire qu'il se désunisse du doigt, sans que l'eau y entre en aucune façon (ce que les philosophes ont cru ne pouvoir se faire avec aucune force finie): et ainsi le doigt se sent fortement attiré et avec douleur; le piston laisse un espace vide en apparence, et où il ne paroît qu'aucun corps ait pu succéder, puisqu'il est tout entouré d'eau qui n'a pu y avoir d'accès, l'ouverture en étant bouchée: si on tire le piston davantage, l'espace vide en apparence devient plus grand; mais le doigt ne sent pas plus d'attraction: et si on le tire presque tout entier hors de l'eau, et en sorte qu'il n'y reste que son ouverture et le doigt qui la bouche; alors ôtant le doigt, l'eau, contre sa nature, monte avec violence, et remplit entièrement tout l'espace que le piston avoit laissé.

II. Un soufflet bien fermé de tous côtés fait le même effet avec une pareille préparation, contre le sentiment des mêmes philosophes

III. Un tuyau de verre de quarante-six pieds, dont un bout est ouvert, et l'autre scellé hermétiquement, étant rempli d'eau, ou plutôt de vin bien rouge, pour être plus visible, puis bouché, et élevé en cet état, et porté perpendiculairement à l'horizon, l'ouverture bouchée en bas, dans un vaisseau plein d'eau, et enfoncé dedans environ d'un pied; si l'on débouche l'ouverture, le vin du tuyau descend jusqu'à une certaine hauteur, qui est environ de trente-deux pieds depuis la surface de l'eau du vaisseau, et se vide, et se mêle parmi l'eau du vaisseau qu'il teint insensiblement, et se désunissant d'avec le haut du verre, laisse un espace d'environ treize pieds vide en apparence, où de même il ne paroît qu'aucun corps ait pu succéder : si on incline le tuyau, comme alors la hauteur du vin du tuyau devient moindre par cette inclinaison, le vin remonte jusqu'à ce qu'il vienne à la hauteur de trente-deux pieds : et enfin si on l'incline jusqu'à la hauteur de trente-deux pieds, il se remplit entièrement, en ressuçant ainsi autant d'eau qu'il avoit rejeté de vin : si bien qu'on le voit plein de vin depuis le haut jusqu'à treize pieds près du bas, et rempli d'eau teinte insensiblement dans les treize pieds inférieurs qui restent.

IV. Un siphon scalène, dont la plus longue jambe est de cinquante pieds, et la plus courte de quarante-cinq, étant rempli d'eau, et les deux ouvertures bouchées étant mises dans deux vaisseaux pleins d'eau, et enfoncées environ d'un pied, en sorte que le siphon soit perpendiculaire à l'horizon, et que la surface de l'eau d'un vaisseau soit plus haute que la surface de l'autre de cinq pieds : si l'on débouche les deux ouvertures, le siphon étant en cet état, la plus longue jambe n'attire point l'eau de la plus courte, ni par conséquent celle du vaisseau où elle est, contre le sentiment de tous les philosophes et artisans; mais l'eau descend de toutes les deux jambes dans les deux vaisseaux, jusqu'à la même hauteur que dans le tuyau précédent, en comptant la hauteur depuis la surface de l'eau de chacun des vaisseaux; mais ayant incliné le siphon au-dessous de la hauteur d'environ trente et un pieds, la plus longue jambe attire l'eau qui est dans le vaisseau de la plus courte; et quand on le rehausse au-dessus de cette hauteur, cela cesse, et tous les deux côtés dégorgent chacun dans son vaisseau; et quand on le rabaisse, l'eau de la plus longue jambe attire l'eau de la plus courte comme auparavant.

V. Si l'on met une corde de près de quinze pieds avec un fil attaché au bout (laquelle on laisse longtemps dans l'eau, afin que s'imbibant peu à peu, l'air qui pourroit y être enclos, en sorte) dans un tuyau de quinze pieds, scellé par un bout comme dessus, et rempli d'eau, de façon qu'il n'y ait hors du tuyau que le fil attaché à la corde, afin de l'en tirer, et l'ouverture ayant été mise dans du vif-argent : quand on tire la corde peu à peu, le vif-argent monte à proportion, jusqu'à ce que la hauteur du vif-argent, jointe à la quatorzième partie de la hauteur qui reste d'eau, soit de deux pieds trois pouces : car après, quand on tire la corde, l'eau quitte le haut du verre, et laisse un espace vide en apparence, qui devient d'autant plus grand, que l'on tire la corde davantage : que si on incline le tuyau, le vif-argent du vaisseau y rentre, en sorte

que, si on l'incline assez, il se trouve tout plein de vif-argent et d'eau qui frappe le haut du tuyau avec violence, faisant le même bruit et le même éclat que s'il cassoit le verre, qui court risque de se casser en effet : et pour ôter le soupçon de l'air que l'on pourroit dire être demeuré dans la corde, on fait la même expérience avec quantité de petits cylindres de bois, attachés les uns aux autres avec du fil de laiton.

VI. Une seringue avec un piston parfaitement juste, étant mise dans le vif-argent, en sorte que son ouverture y soit enfoncée pour le moins d'un pouce, et que le reste de la seringue soit élevé perpendiculairement au dehors : si l'on retire le piston, la seringue demeurant en cet état, le vif-argent entrant par l'ouverture de la seringue, monte et demeure uni au piston jusqu'à ce qu'il soit élevé dans la seringue deux pieds trois pouces; mais après cette hauteur, si l'on retire davantage le piston, il n'attire pas le vif-argent plus haut, qui, demeurant toujours à cette hauteur de deux pieds trois pouces, quitte le piston : de sorte qu'il se fait un espace vide en apparence, qui devient d'autant plus grand, que l'on tire le piston davantage : il est vraisemblable que la même chose arrive dans une pompe par aspiration, et que l'eau n'y monte que jusqu'à la hauteur de trente et un pieds, qui répond à celle de deux pieds trois pouces de vif-argent. Et ce qui est plus remarquable, c'est que la seringue pesée en cet état sans la retirer du vif-argent, ni la bouger en aucune façon, pèse autant (quoique l'espace vide, en apparence, soit si petit que l'on voudra) que quand, en retirant le piston davantage, on le fait si grand qu'on voudra, et qu'elle pèse toujours autant que le corps de la seringue avec le vif-argent qu'elle contient de la hauteur de deux pieds trois pouces, sans qu'il y ait encore aucun espace vide en apparence; c'est-à-dire, lorsque le piston n'a pas encore quitté le vif-argent de la seringue, mais qu'il est prêt à s'en désunir, si on le tire tant soit peu. De sorte que l'espace vide en apparence, quoique tous les corps qui l'environnent tendent à le remplir, n'apporte aucun changement à son poids, et que, quelque différence de grandeur qu'il y ait entre ces espaces, il n'y en a aucune entre les poids.

VII. Ayant rempli un siphon de vif-argent, dont la plus longue jambe a dix pieds, et l'autre neuf et demi, et mis les deux ouvertures dans deux vaisseaux de vif-argent, enfoncées environ d'un pouce chacune, en sorte que la surface du vif-argent de l'un soit plus haute de demi-pied que la surface du vif-argent de l'autre : quand le siphon est perpendiculaire, la plus longue jambe n'attire pas le vif-argent de la plus courte; mais le vif-argent, se rompant par le haut, descend dans chacune des jambes, et regorge dans les vaisseaux, et tombe jusqu'à la hauteur ordinaire de deux pieds trois pouces, depuis la surface du vif-argent de chaque vaisseau : que si on incline le siphon, le vif-argent des vaisseaux remonte dans les jambes, les remplit et commence de couler de la jambe la plus courte dans la plus longue, et ainsi vide son vaisseau; car cette inclinaison dans les tuyaux où est ce vide apparent, lorsqu'ils sont dans quelque liqueur, attire toujours les liqueurs des vaisseaux, si les ouvertures des tuyaux ne sont point bouchées, ou attire le doigt, s'il bouche ces ouvertures.

VIII. Le même siphon étant rempli d'eau entièrement, et ensuite d'une corde, comme ci-dessus, les deux ouvertures étant aussi mises dans les deux mêmes vaisseaux de vif-argent, quand on tire la corde par une de ces ouvertures, le vif-argent monte des vaisseaux dans toutes les deux jambes : en sorte que la quatorzième partie de la hauteur de l'eau d'une jambe avec la hauteur du vif-argent qui y est monté, est égale à la quatorzième partie de la hauteur de l'eau de l'autre, jointe à la hauteur du vif-argent qui y est monté; ce qui arrivera tant que cette quatorzième partie de la hauteur de l'eau, jointe à la hauteur du vif-argent de chaque jambe, soit de la hauteur de deux pieds trois pouces : car après, l'eau se divisera par le haut, et il s'y trouvera un vide apparent.

Desquelles expériences et de plusieurs autres rapportées dans le livre entier, où se voient des tuyaux de toutes longueurs, grosseurs et figures, chargés de différentes liqueurs, enfoncés diversement dans des liqueurs différentes, transportés des unes dans les autres, pesés en plusieurs façons, et où sont remarquées les attractions différentes que ressent le doigt qui bouche le tuyau où est le vide apparent, on déduit manifestement ces maximes :

MAXIMES.

I. Que tous les corps ont de la répugnance à se séparer l'un de l'autre, et à admettre ce vide apparent dans leur intervalle, c'est-à-dire, que la nature abhorre ce vide apparent.

II. Que cette horreur ou cette répugnance qu'ont tous les corps n'est pas plus grande pour admettre un grand vide apparent qu'un petit, c'est-à-dire pour s'éloigner d'un grand intervalle que d'un petit.

III Que la force de cette horreur est limitée, et pareille à celle avec laquelle de l'eau d'une certaine hauteur, qui est environ de trente et un pieds, tend pour couler en bas.

IV. Que les corps qui bornent ce vide apparent ont inclination à le remplir.

V. Que cette inclination n'est pas plus forte pour remplir un grand vide apparent qu'un petit.

VI. Que la force de cette inclination est limitée, et toujours pareille à celle avec laquelle de l'eau d'une certaine hauteur, qui est environ de trente et un pieds, tend à couler en bas.

VII. Qu'une force plus grande, de si peu que l'on voudra, que celle avec laquelle l'eau de la hauteur de trente et un pieds tend à couler en bas, suffit pour faire admettre ce vide apparent, et même si grand que l'on voudra; c'est-à-dire pour faire désunir les corps d'un si grand intervalle que l'on voudra, pourvu qu'il n'y ait point d'autre obstacle à leur séparation, ni à leur éloignement, que l'horreur que la nature a pour ce vide apparent

Abrégé de la deuxième partie, dans laquelle sont rapportées les conséquences de ces expériences, touchant la matière qui peut remplir cet espace vide en apparence, divisée en plusieurs propositions, avec leurs démonstrations.

PROPOSITIONS.

I. Que l'espace vide en apparence n'est pas rempli de l'air extérieur qui environne le tuyau, et qu'il n'y est point entré par les pores du verre.

II. Qu'il n'est pas plein de l'air que quelques philosophes disent être enfermé dans les pores de tous les corps, qui se trouveroit, par ce moyen, au dedans de la liqueur qui remplit les tuyaux.

III. Qu'il n'est pas plein de l'air que quelques-uns estiment être entre le tuyau et la liqueur qui le remplit, et enfermé dans les interstices des corpuscules ou atomes qui composent ces liqueurs.

IV. Qu'il n'est pas plein d'un grain d'air imperceptible, resté par hasard entre la liqueur et le verre, ou porté par le doigt qui le bouche, ou entré par quelque autre façon, qui se raréfieroit extraordinairement, et que quelques-uns soutiendroient pouvoir se raréfier assez pour remplir tout le monde, plutôt que d'admettre du vide.

V. Qu'il n'est pas plein d'une petite portion du vif-argent ou de l'eau, qui, étant tirée d'un côté par les parois du verre, et de l'autre par la force de la liqueur, se raréfie et se convertit en vapeurs; en sorte que cette attraction réciproque fasse le même effet que la chaleur qui convertit ces liqueurs en vapeur, et les rend volatiles.

VI. Qu'il n'est pas plein des esprits de la liqueur qui remplit le tuyau.

VII. Qu'il n'est pas plein d'un air plus subtil mêlé parmi l'air extérieur, qui, en étant détaché et entré par les pores du verre, tendroit toujours à y retourner ou y seroit sans cesse attiré.

VIII. Que l'espace vide en apparence n'est rempli d'aucune des matières qui sont connues dans la nature, et qui tombent sous aucun des sens.

Abrégé de la conclusion, dans laquelle je donne mon sentiment.

Après avoir démontré qu'aucunes des matières qui tombent sous nos sens, et dont nous avons connoissance, ne remplissent cet espace vide en apparence, mon sentiment sera, jusqu'à ce qu'on m'ait montré l'existence de quelque matière qui le remplisse, qu'il est véritablement vide, et destitué de toute matière.

C'est pourquoi je dirai du vide véritable ce que j'ai montré du vide apparent, et je tiendrai pour vraies les maximes posées ci-dessus, et énoncées du vide absolu comme elles l'ont été de l'apparent, savoir en cette sorte.

MAXIMES.

I. Que tous les corps ont de la répugnance à se séparer l'un de l'autre, et à admettre du vide dans leur intervalle; c'est-à-dire que la nature abhorre le vide

II. Que cette horreur ou répugnance qu'ont tous les corps n'est pas plus grande pour admettre un grand vide qu'un petit, c'est-à-dire pour s'éloigner d'un grand intervalle que d'un petit.

III. Que la force de cette horreur est limitée, et pareille à celle avec laquelle de l'eau d'une certaine hauteur, qui est à peu près de trente et un pieds, tend à couler en bas.

IV. Que les corps qui bornent ce vide ont inclination à le remplir.

V. Que cette inclination n'est pas plus forte pour remplir un grand vide qu'un petit.

VI. Que la force de cette inclination est limitée, et toujours égale à celle avec laquelle l'eau d'une certaine hauteur, qui est environ de trente et un pieds, tend à couler en bas.

VII. Qu'une force plus grande, de si peu que l'on voudra, que cell avec laquelle l'eau de la hauteur de trente et un pieds tend à couler en bas, suffit pour admettre du vide, et même si grand que l'on voudra; c'est-à-dire, pour faire désunir les corps d'un si grand intervalle que l'on voudra, pourvu qu'il n'y ait point d'autre obstable à leur séparation, ni à leur éloignement, que l'horreur que la nature a pour le vide.

Ensuite je réponds aux objections qu'on peut faire, dont voici les principales :

OBJECTIONS.

I. Que cette proposition, qu'un espace est vide, répugne au sens commun.

II. Que cette proposition, que la nature abhorre le vide, et néanmoins l'admet, l'accuse d'impuissance, ou implique contradiction.

III. Que plusieurs expériences, et même journalières, montrent que la nature ne peut souffrir de vide.

IV. Qu'une matière imperceptible, inouïe et inconnue à tous les sens, remplit cet espace.

V. Que la lumière étant un accident, ou une substance, il n'est pas possible qu'elle se soutienne dans le vide, si elle est un accident; et qu'elle remplisse l'espace vide en apparence, si elle est une substance

---

PREMIÈRE LETTRE DU P. NOËL, JÉSUITE, A PASCAL[1].

Monsieur,

J'ai lu vos *Expériences touchant le vide*, que j'estime fort belles et ingénieuses, mais je n'entends pas ce *vide apparent* qui paroît dans le tube après la descente, soit de l'eau, soit du vif-argent. Je dis que c'est un corps, puisqu'il a les actions d'un corps, qu'il transmet la lumière avec réfraction et réflexion, qu'il apporte du retardement au mouvement d'un autre corps, ainsi qu'on peut remarquer en la descente du vif-argent, quand le tube plein de ce vide par le haut, est

1. Nous avons cru necessaire de reproduire cette lettre du P. Noël, ainsi que plusieurs autres écrits du même auteur, auxquels il est fait de fréquentes allusions dans les ouvrages de physique de Pascal.

renversé; c'est donc un corps qui prend la place du vif-argent. Il faut maintenant voir quel est ce corps.

Présupposons que, comme le sang qui est dans les veines d'un corps vivant, est mélangé de bile, de pituite, de mélancolie et de sang, qui, pour la plus notable quantité, donne à ce mélange le nom de *sang;* de même l'air que nous respirons, est mélangé de feu, d'eau, de terre et d'air, qui, pour la plus grande quantité, lui donne le nom d'*air*. C'est le sens commun des physiciens, qui enseignent que les élémens sont mélangés.

Or, tout ainsi que ce mélange qui est dans vos veines est un mélange naturel au corps humain, fait et entretenu par le mouvement et action du cœur qui le rétablit, s'il est altéré, par exemple, de crainte ou de honte; de même ce mélange qui est dans notre air, est un mélange naturel au monde, fait et entretenu par le mouvement et action du soleil, qui le rétablit, s'il est empêché par quelque violence. Donc, tout ainsi que la séparation des parties qui composent notre sang, peut se faire dans les veines par quelque accident, comme elle se fait ès ébullitions qui séparent le plus subtil dans le grossier; de même la séparation des parties qui composent notre air peut se faire dans le monde par quelque violence. J'appelle *violence* tout ce qui sépare ces corps naturellement unis et mêlés par ensemble, laquelle ôtée, les parties se rejoignent et se mêlent comme auparavant, si leur naturel n'est changé par la force et la longueur de cette violence.

Je dis donc que dans le mélange naturel du corps que nous respirons, il y a du feu, qui est de sa nature plus subtil et plus rare que l'air; et de l'air, lequel étant séparé de l'eau et de la terre, est plus subtil et plus rare que mélangé avec l'un et l'autre, et partant peut pénétrer des corps et passer à travers les pores, étant séparé, qu'il ne pourroit pas, étant mélangé. Si donc il se trouve une cause de cette séparation, la même pourra faire passer l'air séparé par des pores trop petits pour son passage, étant mélangé. Présupposons une chose vraie, que le verre a grande quantité de pores, que nous colligeons non-seulement de la lumière qui pénètre le verre plus que dans d'autres corps moins solides dont les pores sont moins fréquens, quoique plus grands; mais aussi une infinité de petits corps différens du verre que vous remarquez dans ces triangles qui font paroître les iris, et de ce qu'une bouteille de verre bouchée hermétiquement ne se casse point en un feu lent sur des cendres chaudes.

Or, ces pores du verre si fréquens sont si petits, que l'air mélangé ne sauroit passer à travers; mais étant séparé et plus épuré de la terre et de l'eau, il pourra pénétrer le verre, comme le fil de fer, tandis qu'il est un peu trop gros, ne peut passer à travers le petit trou de filière, mais étant par force et violence menuisé, passe facilement : l'eau boueuse ne passera pas à travers un linge bien tissu, où elle passe facilement étant séparée. La chausse d'Hippocrate et la filtration nous font toucher au doigt cette séparation des corps mélangés. Or, voici la force et la violence qui tirent l'air de son mélange naturel, et le font pénétrer le verre : le vif-argent qui remplit le tube et touche l'air subtil et igné que

la fournaise a mis dans le verre, et dont les pores sont remplis, descendant par sa gravité, tire après soi quelques corps; autrement il ne descend pas, comme il appert au vif-argent, qui est retenu jusques à deux pieds, et à l'eau qui ne descend pas même au trentième, leur gravité n'étant pas suffisante pour tirer l'air hors de son mélange naturel. Si donc le vif-argent descend, il tire après soi un autre corps, selon votre première maxime (p. 178), que tous les corps ont de la répugnance à se séparer l'un de l'autre. Ce corps tiré et suivant n'est pas le verre, puisqu'il demeure à sa place et ne casse point; l'air qui est dans ses pores, contigu au vif-argent, peut suivre, mais il ne suit pas qu'il n'en tire un autre qui passe par les pores du verre et les remplit: pour y passer, il faut qu'il soit épuré; c'est l'ouvrage de cet air subtil qui remplissoit les petits pores du verre, lequel étant tiré par une force majeure et suivant le vif-argent, tire après soi par continuité et connexité son voisin, l'épurant du plus grossier qui reste dehors dans une même constitution, constitution violentée par la séparation du plus subtil, et demeure autour du verre attaché à celui qui est entré, lequel étant dans une dilatation violente à l'état naturel qui lui est dû dans ce monde, est toujours poussé, par le mouvement et dépendance du soleil, à se rejoindre à l'autre et reprendre son mélange naturel, se joignant à cet autre qui le hérisse, poussé du même principe; et partant l'un et l'autre, sitôt que la violence est ôtée, reprend son mélange et sa place: ainsi, quand on bande un arc, on en fait sortir des esprits qui lui sont naturels par sa partie concave qui est pressée, et en fait-on entrer d'autres qui ne lui sont pas naturels par sa partie convexe qui est dilatée; les uns et les autres, demeurant à l'air, cherchent leur place naturelle; et aussitôt que la violence qui tient l'arc tendu est ôtée, les naturels rentrent, les étrangers sortent, et l'arc se redresse

Nous avons une séparation et réunion sensible en une éponge pleine d'eau dans le fond de quelque bassin, qui naît de l'eau qui est dans l'éponge. Si vous pressez cette éponge avec violence, vous en faites sortir de l'eau qui demeure auprès d'elle séparée; sitôt que vous ôtez cette compression, le mélange se fait de l'éponge avec l'eau par la dilatation naturelle de l'éponge, laquelle se remplit de l'eau qui lui est présentée.

Si donc on me demande quel corps entre dans le tube, le mercure descendant, je dirai que c'est un air épuré qui entre par les petits pores du verre, contraint à cette séparation du grossier par la pesanteur du vif-argent descendant et tirant après soi l'air subtil qui remplissoit les pores du verre, et celui-ci tiré par violence, traînant après soi le plus subtil qui lui est joint et contigu, jusques à remplir la partie abandonnée par le vif-argent.

Or cette séparation étant violente à l'autre air, à celui qui demeure dehors, tiré et attaché au verre et à celui qui est entré dans le tube, l'un et l'autre reprend son mélange aussitôt que cette pesanteur est ôtée: mais tandis que cette pesanteur du vif-argent continue son effet, cette attraction et épuration de l'air continue aussi, comme le poids d'une balance, élevé par un autre plus pesant, ne descend pas que cet autre poids qui l'empêche de descendre ne soit ôté.

Ce discours combat votre proposition VII (p. 179), où vous dites que l'espace vide en apparence, n'est pas plein d'un air pur, subtil, mêlé parmi l'air extérieur, qui en étant détaché, et entré par les pores du verre, tendroit toujours à y retourner, ou y seroit sans cesse attiré; et votre proposition VIII, que l'espace vide en apparence n'est rempli d'aucune des matières qui sont connues dans la nature, et qui tombent sous aucun des sens. Si mon discours, que je vous laisse à considérer, est vrai, ces deux propositions ne le sont pas. L'air épuré est une matière connue dans la nature; et cet air prend la place du vif-argent.

Venons aux objections que vous avez mises en la page 180, contre vos sentimens. Je dis que la première est très-considérable. En effet, cette proposition, qu'un espace est vide, prenant le vide pour une privation de tout corps, non-seulement répugne au sens commun, mais de plus se contredit manifestement: elle dit que ce vide est espace, et ne l'est pas, ou présuppose qu'il est espace; or s'il est espace, il n'est pas ce vide qui est privation de tout corps, puisque tout espace est nécessairement corps : qui entend ce qui est corps, comme corps, entend un composé de parties les unes hors les autres, les unes hautes, les autres basses, les unes à droite, les autres à gauche, un composé long, large, profond, figuré, grand ou petit; qui entend ce qui est espace comme espace, entend, quoi qu'on dise, un composé de parties, les unes hors les autres, basses, hautes, à gauche, à droite, d'une telle longueur, largeur, profondeur, figuré entre les extrémités dont il est intervalle : de sorte que l'espace ou intervalle n'est pas seulement corps, mais corps entre deux ou plusieurs corps. Si donc, par ce mot vide, nous entendons une privation de tout corps, ce qui est le sens de l'objection, cette présupposition qu'un espace est vide, se détruit soi-même et se contredit; mais ce mot de vide, comme il se prend communément, est un espace invisible, tel qu'est l'air : ainsi disons-nous d'une bourse, d'un tonneau, d'une cave, d'une chambre et autres semblables, que tout cela est vide quand il n'y a que l'air; tellement que l'air, à cause qu'il est invisible, se prend pour un espace vide; mais d'autant qu'il est espace, nous concluons qu'il est corps, grand, petit, rond, carré, et ces différences ne s'attachent point au vide, pris pour une privation de tout corps, et par conséquent pour un néant dont Aristote parle, quand il dit : *Non entis non sunt differentiæ.*

Votre deuxième objection ne vous donnera pas grand'peine : vous avouez facilement que la nature, non pas en son total, mais en ses parties, souffre violence par le mouvement des unes qui surmontent la résistance des autres; c'est de quoi Dieu se sert pour l'ornement et la variété du monde.

La troisième, que les expériences journalières font paroître que la nature ne souffre point de vide, est forte. Je ne crois pas que la quatrième soit d'aucun physicien.

La cinquième est une preuve péremptoire du plein, puisque la lumière, ou plutôt l'illumination, est un mouvement luminaire des rayons, composés des corps lucides qui remplissent les corps transparens, et ne sont mus luminairement que par d'autres corps lucides, comme la

poudre Daris n'est remuée magnétiquement que par l'aimant : or cette illumination se trouve dans l'intervalle abandonné du vif-argent; il est donc nécessaire que ces intervalles soient un corps transparent. En effet c'en est un, puisqu'il est un air raréfié.

Voilà, monsieur, ce que j'ai cru devoir à votre curiosité si obligeante, qui semble demander quel corps est ce vide apparent, plutôt qu'assurer qu'il n'est pas corps : ce que j'ai dit de la violence faite par la pesanteur du vif-argent ou de l'eau, doit s'entendre de toutes les autres violences qui se rencontrent dans toutes vos autres expériences, où l'entrée subite de ces petits corps d'air et de feu qui sont partout, paroissant moins aux sens qu'à la raison, fait conjecturer un vide qui soit une privation de tout corps. Quoi qu'il en soit, vous avez examiné une vérité très-importante à ceux qui font la recherche des choses naturelles, et par cet examen, obligé le public, et moi particulièrement qui suis, monsieur, votre, etc. ÉTIENNE NOËL, de la compagnie de Jésus.

RÉPONSE DE PASCAL AU P. NOËL.

Mon très-révérend père,

L'honneur que vous m'avez fait de m'écrire m'engage à rompre le dessein que j'avois formé de ne résoudre aucune des difficultés que j'ai rapportées dans mon *Abrégé*, que dans le Traité entier auquel je travaille; car puisque les civilités de votre lettre sont jointes aux objections que vous m'y faites, je ne puis partager ma réponse, ni reconnoître les unes, sans satisfaire aux autres.

Mais, pour le faire avec plus d'ordre, permettez-moi de vous rapporter une règle universelle, qui s'applique à tous les sujets particuliers, où il s'agit de reconnoître la vérité. Je ne doute pas que vous n'en demeuriez d'accord, puisqu'elle est reçue généralement de tous ceux qui envisagent les choses sans préoccupation; qu'elle est la principale, de la façon dont on traite les sciences dans les écoles; et qu'elle est en usage parmi les personnes qui recherchent ce qui est véritablement solide et qui remplit et satisfait pleinement l'esprit : c'est qu'on ne doit jamais porter un jugement décisif de la négative ou de l'affirmative d'une proposition, que ce que l'on affirme ou nie n'ait une de ces deux conditions; savoir, ou qu'il paroisse si clairement et si distinctement de soi-même aux sens ou à la raison, suivant qu'il est sujet à l'un ou à l'autre, que l'esprit n'ait aucun moyen de douter de sa certitude, et c'est ce que nous appelons *principe* ou *axiome;* comme, par exemple, *si à choses égales on ajoute choses égales*, *les tous seront égaux;* ou qu'il se déduise par des conséquences infaillibles et nécessaires de principes ou axiomes, de la certitude desquels dépend toute celle des conséquences qui en sont bien tirées; comme cette proposition, *les trois angles d'un triangle sont égaux à deux angles droits*, qui, n'étant pas visible d'elle-même, est démontrée évidemment par des conséquences infaillibles de pareils axiomes. Tout ce qui a une de ces deux conditions, est certain et véritable, et tout ce qui n'en a aucune, passe pour douteux et incer-

tain. Nous portons un jugement décisif des choses de la première sorte : nous laissons les autres dans l'indécision, si bien que nous les appelons, suivant leur mérite, tantôt *vision*, tantôt *caprice*, parfois *fantaisie*, quelquefois *idée*, et tout au plus *belle pensée*, et parce qu'on ne peut les affirmer sans témérité, nous penchons plutôt vers la négative : prêts néanmoins de revenir à l'autre, si une démonstration évidente nous en fait voir la vérité. Nous réservons pour les mystères de la foi, que le Saint-Esprit a lui-même révélés, cette soumission d'esprit qui porte notre croyance à des mystères cachés aux sens et à la raison.

Cela posé, je viens à votre lettre, dans les premières lignes de laquelle, pour prouver que le vide apparent est un corps, vous vous servez de ces termes : « Je dis que c'est un corps, puisqu'il a les actions d'un corps, qu'il transmet la lumière avec réfraction et réflexion, qu'il apporte du retardement au mouvement d'un autre corps; » où je remarque que, dans le dessein que vous avez de prouver que c'est un corps vous prenez pour principes deux choses : la première, qu'il transmet la lumière avec réfraction et réflexion; la seconde, qu'il retarde le mouvement d'un corps. De ces deux principes, le premier n'a paru véritable à aucun de ceux qui ont voulu l'éprouver; nous avons toujours remarqué, au contraire, que le rayon qui pénètre le verre et cet espace n'a point d'autre réfraction que celle que lui cause le verre, et qu'ainsi si quelque matière le remplit, elle ne rompt en aucune sorte le rayon, ou sa réfraction n'est pas perceptible. De sorte que, comme il est sans doute que vous n'avez rien éprouvé de contraire, je vois que le sens de vos paroles est que le rayon réfléchi, ou rompu par le verre, passe à travers cet espace; et que de là et de ce que les corps y tombent avec temps, vous voulez conclure qu'une matière le remplit, qui porte cette lumière et cause ce retardement.

Mais, mon révérend père, si nous rapportons cela à la méthode de raisonner dont nous avons parlé, nous trouverons qu'il faudroit auparavant être demeuré d'accord de la définition de l'espace vide, de la lumière et du mouvement, et montrer par la nature de ces choses une contradiction manifeste dans ces propositions : « Que la lumière pénètre un espace vide, et qu'un corps s'y meut avec le temps. » Jusque-là votre preuve ne pourra subsister; et puisque la nature de la lumière est inconnue, et à vous, et à moi; que de toutes les définitions qu'on a essayé d'en donner, aucune n'a satisfait ceux qui cherchent les vérités palpables, et qu'elle nous demeurera peut-être éternellement inconnue, je vois que cet argument sera longtemps sans recevoir la force qui lui est nécessaire pour devenir convaincant.

Car considérez, je vous prie, comment il est possible de conclure infailliblement que la nature de la lumière est telle, qu'elle ne peut subsister dans le vide, lorsque l'on ignore la nature de la lumière. Si nous la connoissions aussi parfaitement que nous l'ignorons, nous connoîtrions, peut-être, qu'elle subsisteroit dans le vide avec plus d'éclat que dans aucun autre *medium*, comme nous voyons qu'elle augmente sa force suivant que le *medium* où elle est devient plus rare, et ainsi en quelque sorte plus approchant du néant. De même si nous savions

celle du mouvement, je ne fais aucun doute qu'il ne nous parût qu'il dût se faire dans le vide avec presque autant de temps que dans l'air, dont le peu de résistance paroît dans l'égalité de la chute de corps différens en pesanteur.

C'est pourquoi, dans le peu de connoissance que nous avons de la nature des choses, si, par une liberté semblable à la vôtre, je conçois une pensée, que je donne pour principe, je puis dire avec autant de raison : la lumière se soutient dans le vide, et le mouvement s'y fait avec temps : or la lumière pénètre l'espace vide en apparence, et le mouvement s'y fait avec temps; donc il peut être vide en effet.

Ainsi remettons cette preuve au temps où nous aurons l'intelligence de la nature de la lumière. Jusque-là je ne puis admettre votre principe, et il vous sera difficile de le prouver; ne tirons point, je vous prie, de conséquence infaillible de la nature d'une chose, lorsque nous l'ignorons : autrement je craindrois que vous ne fussiez pas d'accord avec moi des conditions nécessaires pour rendre une démonstration parfaite, et que vous n'appelassiez certain ce que nous n'appelons que douteux.

Dans la suite de votre lettre, comme si vous aviez établi invinciblement que cet espace vide est un corps, vous ne vous mettez plus en peine que de chercher quel est ce corps; et pour décider affirmativement quelle matière le remplit, vous commencez par ces termes : « Présupposons que, comme le sang est mêlé de plusieurs liqueurs qui le composent, ainsi l'air est composé d'air et de feu, et des quatre élémens qui entrent en la composition de tous les corps de la nature. » Vous *présupposez* ensuite que ce feu peut être séparé de l'air, et qu'en étant séparé, il peut pénétrer les pores du verre; vous *présupposez* encore qu'en étant séparé, il a inclination à y retourner, et encore qu'il en est sans cesse attiré; et vous expliquez ce discours, assez intelligible de soi-même, par des comparaisons que vous y ajoutez.

Mais, mon père, je crois que vous donnez cela pour une pensée, et non pas pour une démonstration; et quelque peine que j'aie d'accommoder la pensée que j'en ai avec la fin de votre lettre, je crois que, si vous vouliez donner des preuves, elles ne seroient pas si peu fondées. Car en ce temps où un si grand nombre de personnes savantes cherchent avec tant de soin quelle matière remplit cet espace; que cette difficulté agite aujourd'hui tant d'esprits : j'aurois peine à croire que, pour apporter une solution si désirée à un si grand et si juste doute, vous ne donnassiez autre chose qu'une matière, dont vous supposez non-seulement les qualités, mais encore l'existence même; de sorte que qui *présupposera* le contraire, tirera une conséquence contraire aussi nécessairement. Si cette façon de prouver est reçue, il ne sera pas difficile de résoudre les plus grandes difficultés. Le flux de la mer et l'attraction de l'aimant deviendront aisés à comprendre, s'il est permis de faire des matières et des qualités exprès. Car toutes les choses de cette nature, dont l'existence ne se manifeste à aucun des sens, sont aussi difficiles à croire, qu'elles sont faciles à inventer. Beaucoup de personnes, et des plus savantes de ce temps, m'ont objecté cette même ma-

tière avant vous, mais comme une simple pensée, et non pas comme une vérité constante; et c'est pourquoi je n'en ai pas fait mention dans mes propositions. D'autres, pour remplir de quelque matière l'espace vide, s'en sont figuré une dont ils ont rempli tout l'univers, parce que l'imagination a cela de propre, qu'elle produit avec aussi peu de peine et de temps les plus grandes choses que les plus petites; quelques-uns l'ont faite de même substance que le ciel et les élémens; les autres, d'une substance différente, suivant leur fantaisie, parce qu'ils en disposoient comme de leur ouvrage.

Que si on leur demande, comme à vous, qu'ils nous fassent voir cette matière, ils répondent qu'elle n'est pas visible : si l'on demande qu'elle rende quelque son, ils disent qu'elle ne peut point être ouïe, et ainsi de tous les autres sens. Ils pensent avoir beaucoup fait, quand ils ont pris les autres dans l'impuissance de montrer qu'elle n'est pas, en s'ôtant à eux-mêmes tout pouvoir de leur montrer qu'elle est. Mais nous trouvons plus de sujet de nier son existence, parce qu'on ne peut pas la prouver, que de la croire, par la seule raison qu'on ne peut montrer qu'elle n'est pas.

Car on ne peut pas croire toutes ces choses ensemble, sans faire de la nature un monstre, et comme la raison ne peut pencher plus vers une que vers l'autre, à cause qu'elle les trouve également éloignées, elle les refuse toutes, pour se défendre d'un injuste choix.

Je sais que vous pouvez dire que vous n'avez pas fait tout seul cette matière, et que quantité de physiciens y avoient déjà travaillé; mais sur les sujets de cette matière, nous ne faisons aucun fondement sur les autorités : quand nous citons les auteurs, nous citons leurs démonstrations, et non pas leurs noms; nous n'y avons nul égard que dans les matières historiques. Si les auteurs que vous alléguez disoient qu'ils ont vu ces petits corps ignés, mêlés parmi l'air, je défèrerois assez à leur sincérité et à leur fidélité, pour m'en rapporter à leur témoignage, et je les croirois comme historiens; mais puisqu'ils disent seulement qu'ils pensent que l'air en est composé, vous me permettrez de demeurer dans mon premier doute.

Enfin, mon père, considérez, je vous prie, que tous les hommes ensemble ne sauroient démontrer qu'aucun corps succède à celui qui quitte l'espace vide en apparence, et qu'il n'est pas possible encore à tous les hommes de montrer que, quand l'eau y remonte, quelque corps en soit sorti. Cela ne suffiroit-il pas, suivant vos maximes, pour assurer que cet espace est vide? Cependant je dis simplement que mon sentiment est qu'il est vide. Jugez si ceux qui parlent avec tant de retenue d'une chose où ils ont droit de parler avec tant d'assurance, pourront faire un jugement décisif de l'existence de cette matière ignée, si douteuse et si peu établie.

Après avoir supposé cette matière avec toutes les qualités que vous avez voulu lui donner, vous rendez raison de quelques-unes de mes expériences. Ce n'est pas une chose bien difficile d'expliquer comment un effet peut être produit, en supposant la matière, la nature et les qualités de sa cause : cependant il est difficile que ceux qui se les figurent, se

défendent d'une vaine complaisance, et d'un charme secret qu'ils trouvent dans leur invention, principalement quand ils les ont si bien ajustées, que, des imaginations qu'ils ont supposées, ils concluent nécessairement des vérités déjà évidentes. Mais je me sens obligé de vous dire deux mots sur ce sujet; c'est que toutes les fois que, pour trouver la cause de plusieurs phénomènes connus, on pose une hypothèse, cette hypothèse peut être de trois sortes.

Car quelquefois on conclut une absurdité manifeste de sa négation, et alors l'hypothèse est véritable et constante; ou bien on conclut une absurdité manifeste de son affirmation, et alors l'hypothèse est tenue pour fausse; et lorsqu'on n'a pu encore tirer d'absurdité, ni de sa négation, ni de son affirmation, l'hypothèse est douteuse. De sorte que, pour faire qu'une hypothèse soit évidente, il ne suffit pas que tous les phénomènes s'en ensuivent; au lieu que, s'il s'ensuit quelque chose de contraire à un des phénomènes, cela suffit pour assurer de sa fausseté.

Par exemple, si on trouve une pierre chaude sans savoir la cause de sa chaleur, celui-là seroit-il tenu en avoir trouvé la véritable, qui raisonneroit de cette sorte? Présupposons que cette pierre ait été mise dans un grand feu, dont on l'ait retirée depuis peu de temps; donc cette pierre doit être encore chaude : or elle est chaude; par conséquent elle a été mise au feu. Il faudroit pour cela que le feu fût l'unique cause de sa chaleur; mais comme elle peut procéder du soleil et de la friction, la conséquence seroit sans force. Car comme une même cause peut produire plusieurs effets différens, un même effet peut être produit par plusieurs causes différentes. C'est ainsi que quand on discourt humainement du mouvement, ou de la stabilité de la terre, tous les phénomènes du mouvement et des rétrogradations des planètes, s'ensuivent parfaitement des hypothèses de *Ptolémée*, de *Tycho*, de *Copernic* et de beaucoup d'autres qu'on peut faire, de toutes lesquelles une seule peut être véritable. Mais qui osera faire un si grand discernement, et qui pourra, sans danger d'erreur, soutenir l'une au préjudice des autres comme, dans la comparaison de la pierre, qui pourra, avec opiniâtreté, maintenir que le feu ait causé sa chaleur, sans se rendre ridicule?

Vous voyez par là qu'encore que de votre hypothèse s'ensuivissent tous les phénomènes de mes expériences, elle seroit de la nature des autres; et que, demeurant toujours dans les termes de la vraisemblance, elle n'arriveroit jamais à ceux de la démonstration. Mais j'espère vous faire un jour voir plus au long, que de son affirmation s'ensuivent absolument des choses contraires aux expériences. Et pour vous en toucher ici une en peu de mots, s'il est vrai, comme vous le supposez, que cet espace soit plein de cet air, plus subtil, igné, et qu'il ait l'inclination que vous lui donnez, de rentrer dans l'air d'où il est sorti, et que cet air extérieur ait la force de le retirer *comme une éponge pressée*, et que ce soit par cette attraction mutuelle que le vif-argent se tienne suspendu, et qu'elle le fait remonter même quand on incline le tuyau : il s'ensuit nécessairement que quand l'espace vide en apparence sera plus grand, une plus grande hauteur de vif-argent doit être suspendue (contre ce qui paroît dans les expériences). Car puisque toutes les parties de cet

air intérieur et extérieur ont cette qualité attractive, il est constant, par toutes les règles de la mécanique, que leur quantité, augmentée à même mesure que l'espace, doit nécessairement augmenter leur effet, comme une grande éponge pressée attire plus d'eau qu'une petite.

Que si, pour résoudre cette difficulté, vous faites une seconde supposition; et si, pour sauver cet inconvénient, vous faites encore une qualité exprès, qui, ne se trouvant pas encore assez juste, vous oblige d'en figurer une troisième pour sauver les deux autres, sans aucune preuve, sans aucun établissement : je n'aurai jamais autre chose à vous répondre, que ce que je vous ai déjà dit, ou plutôt je croirai vous avoir déjà répondu.

Mais, mon père, quand je dis ceci, et que je préviens en quelque sorte ces dernières suppositions, je fais moi-même une supposition fausse : ne doutant pas que, s'il part quelque chose de vous, il sera appuyé sur des raisons convaincantes, puisque autrement ce seroit imiter ceux qui veulent seulement faire voir qu'ils ne manquent pas de paroles.

Enfin, mon père, pour reprendre toute ma réponse, quand il seroit vrai que cet espace fût un corps (ce que je suis très-éloigné de vous accorder), et que l'air seroit rempli d'esprits ignés (ce que je ne trouve pas seulement vraisemblable), et que ces esprits auroient les qualités que vous leur donnez (ce qui n'est qu'une pure pensée, qui ne paroît évidente, ni à vous, ni à personne) : il ne s'ensuivroit pas de là que l'espace en fût rempli. Et quand il seroit vrai encore qu'en supposant qu'il en fût plein (ce qui ne paroît en façon quelconque), on pourroit en déduire tout ce qui paroît dans les expériences : le plus favorable jugement que l'on pourroit faire de cette opinion, seroit de la mettre au rang des vraisemblances. Mais comme on en conclut nécessairement des choses contraires aux expériences, jugez quelle place elle doit tenir entre les trois sortes d'hypothèses dont nous avons parlé tantôt.

Vers la fin de votre lettre, pour définir le corps, vous n'en expliquez que quelques accidens, et encore respectifs, comme de *haut*, de *bas*, de *droite*, de *gauche*, qui font proprement la définition de l'espace, et qui ne conviennent au corps, qu'en tant qu'il occupe de l'espace. Car, suivant vos auteurs mêmes, le corps est défini ce qui est composé de matière et de forme; et ce que nous appelons un *espace vide*, est un espace ayant longueur, largeur et profondeur, immobile et capable de recevoir et de contenir un corps de pareille longueur et figure; c'est ce qu'on appelle *solide* en géométrie, où l'on ne considère que les choses abstraites et immatérielles. De sorte que la différence essentielle qui se trouve entre l'espace vide et le corps, qui a longueur, largeur, profondeur, est que l'un est immobile et l'autre mobile; et que l'un peut recevoir au dedans de soi un corps qui pénètre ses dimensions, au lieu que l'autre ne le peut; car la maxime que la pénétration de dimensions est impossible, s'entend seulement des dimensions de deux corps matériels : autrement elle ne seroit pas universellement reçue. D'où l'on peut voir qu'il y a autant de différence entre le néant et l'espace vide, qu'entre l'espace vide et le corps matériel; et qu'ainsi l'espace vide tient le milieu entre la matière et le néant. C'est pourquoi la maxime d'Aristote

dont vous parlez, *que les non-êtres ne sont point différens*, s'entend du véritable néant, et non pas de l'espace vide.

Je finis avec votre lettre, où vous dites que vous ne voyez pas que la quatrième de mes observations, qui est qu'une matière inouïe et inconnue à tous les sens, remplit cet espace, *soit d'aucun physicien.* A quoi j'ai à vous répondre que je puis vous assurer du contraire, puisqu'elle est d'un des plus célèbres de notre temps, et que vous avez pu voir dans ses écrits, qu'il établit dans tout l'univers une matière universelle, imperceptible et inouïe, de pareille substance que le ciel et les élémens; et de plus, qu'en examinant la vôtre, j'ai trouvé qu'elle est si imperceptible, et qu'elle a des qualités si inouïes, c'est-à-dire qu'on ne lui avoit jamais données, que je trouve qu'elle est de même nature.

La période qui précède vos dernières civilités, définit la lumière en ces termes : *La lumière est un mouvement luminaire de rayons composés de corps lucides, c'est-à-dire lumineux;* où j'ai à vous dire qu'il me semble qu'il faudroit avoir premièrement défini ce que c'est que *luminaire*, et ce que c'est que *corps lucide* ou *lumineux :* car jusque-là je ne puis entendre ce que c'est que lumière. Et comme nous n'employons jamais dans les définitions le terme du *défini*, j'aurois peine à m'accommoder à la vôtre, qui dit que la lumière est un mouvement luminaire des corps lumineux. Voilà, mon père, quels sont mes sentimens, que je soumettrai toujours aux vôtres.

Au reste, on ne peut vous refuser la gloire d'avoir soutenu la physique péripatéticienne, aussi bien qu'il est possible de le faire; et je trouve que votre lettre n'est pas moins une marque de la foiblesse de l'opinion que vous défendez, que de la vigueur de votre esprit. Et certainement l'adresse avec laquelle vous avez défendu l'impossibilité du vide dans le peu de force qui lui reste, fait aisément juger qu'avec un pareil effort, vous auriez invinciblement établi le sentiment contraire dans les avantages que les expériences lui donnent.

Une même indisposition m'a empêché d'avoir l'honneur de vous voir et de vous écrire de ma main. C'est pourquoi je vous prie d'excuser les fautes qui se rencontreront dans cette lettre, surtout à l'orthographe. Je suis de tout mon cœur, mon très-révérend père, votre, etc. PASCAL.

RÉPLIQUE DU P. NOEL.

Monsieur,

Celle dont il vous a plu m'honorer me fut rendue jeudi au soir entre cinq et six, par un de nos pères. Je l'ai lue avec admiration, qu'en si peu de temps et incommodé de votre santé, vous ayez répondu de point en point à toute ma lettre; et avec un singulier contentement, que vous procédiez à la recherche de la vérité si généreusement et si méthodiquement, et m'ayez, avec tant de civilité, fait part de vos pensées touchant le vide; je vous remercie très-humblement et de tout mon cœur; j'aime la vérité, et la recherche sans préoccupation, dans vos sentimens, de la façon dont on traite les sciences dans les écoles, et de celle qui est en usage parmi les personnes qui veulent voir, et

non pas croire ce qui peut se savoir. Je me sens obligé à vous dire ce qui m'est venu en l'esprit après les lumières que m'a données la lecture de votre lettre vraiment docte, claire et courtoise : et pour commencer par la définition de l'espace vide, qui semble être le fondement de tout le reste, je rapporterai vos paroles.

« Ce que nous appelons un espace vide, est un espace ayant longueur, largeur et profondeur, immobile et capable de recevoir et de contenir un corps de pareille longueur et figure; c'est ce qu'on appelle solide en géométrie, où l'on ne considère que les choses abstraites et immatérielles. De sorte que la différence essentielle qui se trouve entre l'espace vide et le corps matériel, qui a longueur, largeur et profondeur, est que l'un est immobile et l'autre mobile, et que l'un peut recevoir au dedans de soi un corps qui pénètre ses dimensions, au lieu que l'autre ne le peut; car la maxime que la pénétration de dimensions est impossible, s'entend seulement des dimensions de deux corps matériels : autrement elle ne seroit pas universellement reçue. D'où l'on peut voir qu'il y a autant de différence entre le néant et l'espace vide, qu'entre l'espace vide et le corps matériel; et qu'ainsi l'espace vide tient le milieu entre la matière et le néant. »

Voilà, monsieur, votre pensée de l'espace vide fort bien expliquée; je veux croire que tout cela vous est évident, et en avez l'esprit convaincu et pleinement satisfait, puisque vous l'affirmez, ayant dit auparavant, « qu'on ne doit jamais porter un jugement définitif de l'affirmative ou négative d'une proposition, que ce que l'on affirme ou nie n'ait une de ces deux conditions, ou qu'il paroisse si clairement et si invinciblement de lui-même à la raison ou aux sens, suivant qu'il est sujet à l'un ou à l'autre, que l'esprit n'ait aucun moyen de douter de sa certitude; et c'est ce que nous appelons principes ou axiomes; ou qu'il se déduise par des conséquences infaillibles et nécessaires de tels principes ou axiomes. » Ce sont, monsieur, vos sentimens touchant les conditions nécessaires pour assurer une vérité. Or quand je disois dans ma lettre, que tout ce qui est espace est corps, je croyois dire une chose évidente et convaincante d'elle-même en matière de vide apparent ou véritable, que je présupposois, comme chose évidente, n'être ni esprit, ni accident d'aucun corps, d'où il se déduit nécessairement qu'il est corps; je vois maintenant la défectuosité de mon discours : le vide n'est ni corps matériel, ni accident du corps matériel, mais un espace qui a longueur, largeur et profondeur, immobile et capable de recevoir et de contenir un corps. Mais si je nie qu'il y ait aucun espace réel et capable de soutenir la lumière, de la transmettre et d'apporter du retardement au mouvement local d'un corps, qui ne soit corps matériel, je ne vois pas comment on puisse me convaincre du contraire : ma négative est appuyée sur ce que l'astronomie ne se sert point de cet espace pour expliquer les parties et mouvemens de ce grand monde, ni la médecine pour l'intelligence des parties, mouvemens et maladies du petit monde, ni l'art pour ses ouvrages, ni la nature pour ses opérations naturelles; et suivant la maxime que la nature ne fait rien en vain, il faut, ou rejeter ce vide, ou s'il est dans le monde, avouer que ces

grands espaces qui sont entre nous et les cieux ne sont pas corps matériels, et que le vide véritable peut suffire à tout cela. Nous disons qu'il y a de l'eau, parce que nous la voyons et la touchons; nous disons qu'il y a de l'air dans un ballon enflé, parce que nous sentons sa résistance; qu'il y a du feu, parce que nous sentons sa chaleur. Mais le vide véritable ne touche aucun des sens : et pour dire qu'on le sent dans un tube où le vif-argent ne paroît point, j'en attends une preuve qui me détrompe; et la plupart de ceux qui cherchent la vérité curieusement, ont cru jusqu'à présent, fondés sur plusieurs expériences et bonnes raisons, que dans le monde un espace vide est naturellement impossible. Cet espace et l'air seroient de natures bien différentes, celui-ci étant mobile et impénétrable, et celui-là immobile et pénétrable; et néanmoins on ne sauroit connoître aucune différence entre la lumière qu'on dit passer par le vide seul, et celle qui passeroit par le vide et l'air joints ensemble : si le vide suffit, c'est en vain que la nature y emploie l'air. Voyez, monsieur, lequel de nous deux est plus croyable, ou vous qui affirmez un espace qui ne tombe pas sous les sens, et qui ne sert, ni à l'art, ni à la nature, et ne l'employez que pour décider une question fort douteuse; ou moi qui le nie pour ne l'avoir jamais senti, pour le connoître inutile et impossible, par ce raisonnement, que cet espace ne seroit pas corps matériel, et le seroit, ayant l'essence et les propriétés du corps matériel. Mais ce vide ne seroit-il point l'intervalle de ces anciens philosophes qu'Aristote a tâché de réfuter, ou bien l'espace imaginaire de quelques modernes, ou bien l'immensité de Dieu qu'on ne peut nier, puisque Dieu est partout? A la vérité, si ce vide véritable n'est autre chose que l'immensité de Dieu, je ne puis nier son existence; mais aussi ne peut-on pas dire que cette immensité n'étant autre chose que Dieu même, esprit très-simple, ait des parties les unes hors des autres, qui est la définition que je donne aux corps, et non pas celle que vous dites être de mes auteurs, prise de la composition de matière et de forme? Les corps simples sont corps, et néanmoins, au jugement des plus intelligens, n'ont point cette composition : j'avoue que les mixtes l'ont, mais je la tiens trop obscure pour être employée à la définition des corps : c'est pourquoi je définis le corps, ce qui est composé de parties les unes hors des autres, et dis que tout corps est espace, quand on le considère entre les extrémités, et que tout espace est corps, puisque tout espace est composé de parties les unes hors les autres, et que tout ce qui est composé de parties les unes hors les autres, est corps.

Si vous me dites que les espèces du saint sacrement ont des parties les unes hors des autres, et néanmoins ne sont pas corps, je répondrai premièrement, par le composé des parties les unes hors des autres, on entend ce que nous appelons ordinairement long, large et profond. Secondement, que l'on peut fort bien expliquer la doctrine de l'Église catholique et romaine, touchant les espèces du saint sacrement, en disant que les petits corps qui restent dans les espèces ne sont pas la substance du pain. C'est pourquoi le concile de Trente ne se sert jamais du mot d'accident, parlant du saint sacrement, quoiqu'en effet ces petits

corps soient vraiment les accidens du pain, selon la définition de l'accident, reçue de tout le monde : ce qui ne détruit point le sujet, soit présent, soit absent. Troisièmement, que, sans miracles, tout composé de parties les unes hors des autres est corps; et je crois que, pour décider la question du vide, il n'est pas besoin de recourir aux miracles, vu que nous présupposons que toutes vos expériences n'ont rien par-dessus les forces de la nature. Mais revenons à votre espace, où je ne vois ni parties, ni longueur, ni largeur, ni profondeur effective et réelle. S'il est l'immensité de Dieu, qui est pur esprit, je sais bien que, dans l'imagination du géomètre, séparant la quantité de toutes ses conditions individuelles par une abstraction d'entendement, je trouve un espace immobile; mais un tel espace, ainsi dénué de toutes ces circonstances, n'est que dans l'esprit du géomètre, et ne peut être ce vide que vous dites paroître dans le tube, ni l'immensité de Dieu, quoiqu'on se la figure longue, large et profonde, selon notre façon d'entendre jointe et attachée au corps. Je pense en avoir assez dit pour douter s'il y a de l'espace vide, et si, entre la matière et le corps, il y a d'autre différence qu'entre le corps qui est dans l'espace du géomètre, et celui qui est dans le monde; celui-ci est matière matérielle, mobile, effectif et réel; et l'objet de celui-là, qui n'a qu'un être inventionnel et n'est que la ressemblance de l'autre, est par conséquent sans effet et sans mouvement Néanmoins, puisque vous assurez l'existence de cet espace vide, et m'apprenez dans votre lettre que l'on ne doit rien assurer sans des convictions, ou des sens, ou de la raison, je me persuade que vous en avez, lesquelles je ne vois pas, et partant je présuppose l'existence de cet espace vide, et ne trouve pas qu'il me serve pour expliquer vos expériences, qu'en disant quatre choses. La première, qu'à la descente du vif-argent pas un corps n'entre dans le verre. La deuxième, que le vide tient la place du vif-argent descendu. La troisième, qu'il soutient la lumière qui passe au travers. La quatrième, qu'il retarde le mouvement des corps matériels, quoiqu'il n'ait aucune résistance, étant pénétrable et immobile. Je ne doute point que vous n'ayez prévu les difficultés qu'enferment ces quatre propositions. Je m'arrête à la première, qui est la source des autres, et sur cela je propose mes difficultés, dont j'espère être satisfait par vos profondes spéculations et courtoisies. Donc, pour la première, vous dites que « tous les hommes ensemble ne sauroient démontrer qu'aucun corps succède à l'espace vide en apparence, et qu'il n'est pas possible encore à tous les hommes de montrer que, quand l'eau y remonte, quelque corps en soit sorti. » Là-dessus vous me demandez si cela ne suffiroit pas, suivant mes maximes, pour assurer que cet espace est vide. Je réponds ingénument que non. Si à moins d'une démonstration mathématique, c'est-à-dire évidente et convaincante, qu'une matière entre dans le verre à la descente du vif-argent, je dis qu'il n'y a qu'un espace vide, je pourrai, par même raison, nier que, depuis notre terre jusqu'au firmament, il y ait aucune matière, et conclure en cette sorte : Tous les hommes ensemble ne sauroient démontrer mathématiquement que ces grands espaces soient remplis d'aucun corps, et partant je dis que ces grands espaces ne sont qu'un vide immobile et

pénétrable, suffisant à soutenir et à transmettre la lumière des astres. et à montrer leurs mouvemens. Si tel étoit mon discours et mon sentiment, que diriez-vous? Or, tout ainsi que les naturalistes croient avoir assez de preuves et de raisons physiques pour assurer que ces grands espaces sont remplis d'un corps impénétrable et mobile, quoiqu'ils n'aient pour cela aucune démonstration mathématique; de même, quoique je n'aie point de semblables convictions, je pense néanmoins avoir assez de preuves naturelles pour dire que par les pores du verre passe et entre dans le verre une matière qui s'appelle air subtil.

Venons aux expériences, qui me font servir de vos termes, et dire simplement que mon sentiment est que l'air subtil entre par les pores du verre. Comme ces pores sont fort petits, l'air qui les remplit doit être fort subtil et séparé du plus grossier, et dans son mélange doit avoir moins de terre et moins d'eau. Que dans tout ce que nous appelons air, il y ait de la terre, nous l'expérimentons en hiver, dans un froid fort : les mains, exposées à l'air, contractent une crasse composée de ces petits atomes terrestres qui le remplissent et le refroidissent; que dans ce même tout il y ait de l'eau, cela se voit manifestement en la canne à vent dont elle sort, quand vous la chargez avec vitesse; qu'il y ait aussi du feu élémentaire, c'est-à-dire, de ce feu qui, pour sa petitesse et sa rareté, est invisible, et par suite fort différent de la flamme et du charbon allumé qui est entouré d'étincelles ou petites flammes qui s'éteignent dans l'eau, et non pas le feu élémentaire incorruptible; qu'il y ait, dis-je, de ce feu-là dans l'air, on peut le connoître au foyer d'un miroir ardent qui brûle par le concours des rayons qui sont dans l'air, et par un mouchoir où se ramassent les esprits ignés, que l'air qui est autour du feu lui apporte; d'où l'on voit sortir des étincelles dans un lieu obscur, quand, après l'avoir étendu et bien échauffé, et resserré tout chaud, on l'étend et passe la main par-dessus un peu rudement; que si les feux de nos cheminées remplissent d'esprits ignés l'air d'alentour, le soleil, qui brûle par réfractions et réflexions, pourra bien épandre ses esprits solaires en tout l'air du monde, et par conséquent y avoir du feu, que M. Descartes appelle *petite matière*.

L'expérience nous apprend aussi que, dans le mélange que nous appelons *eau*, il y a de l'air; en voici une preuve convaincante :

Faites une chambre carrée de cinq ou six pieds en tout sens, à la chaussée d'un ruisseau de même hauteur; mettez au milieu de la voûte un canal rond de trois ou quatre pouces de diamètre, long de quatre pieds, qui descende en la chambre perpendiculairement au pavé, fait au niveau par où l'eau du ruisseau coule à plomb sur le milieu d'une pierre fort dure, plate, ronde, et à un pied de diamètre, plus haute que le reste du pavé de trois pouces; faites à côté, dans l'une des quatre murailles, à fleur du pavé, un trou par où l'eau s'écoule; faites-en un autre, à un pied du pavé, dans la muraille qui est vis-à-vis de ce trou; mettez en dehors un canal rond et long de trois pieds qui le remplisse parfaitement, et aille s'étrécissant depuis sa naissance de la muraille, où il a neuf à dix pouces de diamètre, jusqu'au bout qui sera de deux à trois pouces : l'air sortira sans cesse par ce canal avec autant d'impétuosité

qu'il sort de ces grands soufflets de forge où se fond le fer des mines; cet air, mêlé, confondu et comme perdu dans ce tout, que nous appelons *eau*, et qui tombe à plomb par le canal de la voûte, se retrouve, et se sépare de l'eau grandement pressée entre la pierre qui la reçoit, et l'autre eau suivante qui la pousse; et cet air, ne trouvant en toute la chambre rien d'ouvert que ce canal qui est dans la muraille à un pied du pavé, poussé par le suivant, s'engonfle dans ce canal, et sort de même vitesse que celui de ces grands soufflets, longs de plus de quinze pieds. Voilà une preuve péremptoire de l'air mélangé avec l'eau, et de leur séparation artificielle et violente : l'eau séparée et plus grossière s'écoule par le trou d'en bas à fleur du pavé, et l'air séparé sort par son canal un pied plus haut.

Je remarque ici une différence fort notable entre l'air qui est dans l'eau (c'est le même des autres élémens) et l'air qui est mêlé avec l'eau, faisant une partie du tout, ou mélange, que nous appelons *eau :* l'air dans l'eau fait un tout à part, que nous appelons *air*, et monte toujours au-dessus de l'eau; l'air mêlé avec l'eau fait un tout avec les autres élémens, que nous appelons *eau*, et ne s'en sépare point que par quelque violence.

Le feu élémentaire se trouve aussi dans l'eau, mêlé comme les autres élémens, et ne s'en sépare que quand il est fort contraint par la compression de l'eau; celle qui est chaude, et principalement celle qui bout, est pleine d'esprits ignés, que nos charbons et nos flammes lui envoient; disons de même du soleil à l'égard des eaux du monde : c'est pourquoi la nuit on voit des flammes sur la mer, que les vaisseaux et autres corps font sortir de l'eau quand ils la froissent.

Qu'il y ait de la terre dans l'eau, cela se voit dans les canaux des fontaines, et dans certaines pierres qui s'encroûtent au courant de l'eau par les atomes terrestres qui se séparent d'elle étant pressés.

Les mouvemens sensibles de l'eau dans le thermomètre me semblent ne pouvoir s'expliquer intelligiblement que par l'entrée ou le mouvement des esprits ignés de l'air chaud ou de la main échauffée. Voici ma pensée, que je propose tout simplement : les esprits de feu qui transpirent sans cesse de la main chaude qui touche la bouteille du thermomètre, meuvent l'air qui est dans les pores du verre par leur toucher; et cet air mû, meut son voisin, et celui-ci son voisin, qui est dans l'eau beaucoup moins mobile, comme si vous aviez dans une coupe d'argent plusieurs parties, dont les unes fussent carrées et les autres rondes, mêlées par ensemble, et que vous remuassiez tout ce mélange en remuant la coupe : les parties rondes, comme plus mobiles, se sépareroient des carrées, qui auroient moins de mouvement.

L'air donc, par son mouvement, se sépare de l'eau, et l'eau, par cette séparation de l'air, tient moins de place, et nous semble, à cause qu'elle se ramasse vers le bas, qu'elle descend, et à cause qu'elle quitte une partie de son rare, qui est l'air, qu'elle se condense.

Or, plus grande est la chaleur de la main, le mouvement est plus grand, et de plus de parties qui roulent les unes sur les autres; et plus grand est le mouvement, plus grande est la séparation de l'air et de l'eau.

Ces roulades ne sont pas sensibles, mais la raison nous les apprend par cet axiome, que « le mouvement d'un corps arrêté par l'une de ses parties, et mû par les autres, tient du circulaire. » Otez ce mouvement accidentaire des parties de l'air, et conséquemment des parties de l'eau, l'air et l'eau reprennent leur mélange naturel; et par ce mélange, l'eau s'enfle, tient plus de place, et semble monter. Si l'eau descend effectivement sans que l'air s'en sépare, nous dirons probablement que les esprits ignés entrent dans le thermomètre, et que quelques autres en sortent; car je suis l'opinion de ceux qui veulent qu'un corps simple occupe toujours un même espace dans le monde, jamais ni plus grand ni plus petit; autrement il y auroit ou de la pénétration des corps, ou du vide : pénétration, s'il occupoit une plus grande place; du vide, s'il en tenoit une plus petite : ainsi, ou le monde regorgeroit, ou ne seroit pas toujours plein. On ne peut pas nier qu'entre les corps simples, il n'y en ait de plus rares, qui, avec pareil nombre d'atomes sensibles, tiennent plus de place, et de plus denses qui en tiennent moins : le feu élémentaire est, de sa nature, plus rare et moins dense que la terre, et la terre, de sa nature, plus dense et moins rare que le feu élémentaire : le feu simple jamais moins rare, la terre simple jamais moins dense; les mixtes sont plus ou moins rares, plus ou moins denses, selon qu'ils sont plus ou moins participans du feu ou de la terre; d'où s'ensuit que le corps mêlé de terre et de feu est en partie dense, en partie rare : si vous lui ôtez de son feu, ou lui donnez de la terre, vous le condensez; ou si vous diminuez sa terre, ou augmentez son feu, vous le raréfiez; et si vous séparez totalement le feu de la terre et la terre du feu, vous aurez du rare dans un espace du monde, et dans l'autre du dense. Faisons que celui-ci soit d'un pied et celui-là de quatre, avec pareil nombre d'atomes naturels, les deux joints ensemble sans se mêler tiendront une place de cinq pieds : qu'ils soient mêlés et confondus par ensemble, et prenez toutes les petites places que tient le feu, elles ne feront jamais toutes ensemble qu'une place de quatre pieds; prenez toutes celles que tient la terre, elles n'en feront qu'une d'un pied, et toutes deux ensemble une de cinq pieds.

Ce qui fait croire qu'un même corps, sans rien perdre ou acquérir, ait tantôt plus, tantôt moins de place, est l'insensibilité du corps qu'il perd ou acquiert; le sens est trompé, mais il est corrigé par la raison : nous ne sentons pas ce qui est dans un ballon; toutefois nous jugeons qu'il est plein de quelque corps, à cause qu'il résiste quand on le presse; et puis, cherchant quel peut être ce corps, nous trouvons que c'est celui que nous appelons air; de même, voyant que la lumière passe à travers une bouteille de verre, nous jugeons qu'elle contient en soi un corps transparent. Or, tout ainsi que le ballon s'enfle quand l'air y entre, de même un corps mêlé tient plus de place quand il se remplit d'un autre invisible, et moins quand il le quitte.

Ces expériences ci-dessus montrent que les élémens sont mêlés, et la comparaison des liqueurs, qu'on appelle humeurs, mêlées dans nos veines, artères et autres concavités de notre corps, fait entendre ce mélange des élémens du grand monde, où les actions et mouvemens du

firmament, des étoiles et des planètes, et principalement du soleil, font voir que les élémens doivent y être mêlés, en sorte que vous ne saurez prendre aucune partie sensible de l'un que les autres n'y soient. Le soleil envoie continuellement et par tout le monde ses esprits solaires, qui, sans cesse et insensiblement, meuvent et mêlent tout pour le bien du monde, comme le cœur envoie par tout le corps ses esprits de vie, qui remuent sans cesse et mêlent tout pour le bien du corps.

L'expérience nous apprend que les corps se tiennent les uns aux autres.

Premièrement, les homogènes, s'il y en a de continus, et à faute de ceux-ci les hétérogènes contigus, et entre ceux-ci les plus faciles à mouvoir. Donc le vif-argent, mû de sa pesanteur, en descendant tirera l'air qui est dans les pores, comme le plus mobile des corps hétérogènes contigus, et l'air qui est dans les pores celui qui lui est congné et contigu, comme l'eau tire l'eau.

Il me semble qu'en voilà suffisamment pour dire, avec le commun, que les élémens sont mêlés, que l'air se sépare de l'eau, et quitte, quand il y est contraint, son plus grossier, et qu'il passe dans le tube par les pores du verre, et que le vide véritable n'est appuyé ni sur la raison, ni sur l'expérience.

Disons maintenant pourquoi le vif-argent, le tube étant bouché, descend, et ne descend qu'à la hauteur de deux pieds trois pouces. Comparons le vif-argent qui est dans le tube avec celui qui est dans la cuvette, comme le poids qui est dans un bassin de la balance, avec le poids qui est dans l'autre : si celui qui est dans la cuvette pèse plus que celui qui est dans le tube, il descendra et fera monter celui qui est dans le tube, comme le poids d'une balance le plus pesant descend et fait monter l'autre; au contraire, si celui qui est dans le tube est plus pesant que celui de la cuvette, il descendra, et fera monter celui de la cuvette jusqu'à l'égalité de pesanteur qui, dans l'inégalité de surface perpendiculaire à l'horizon, se rencontre en celle qui est dans la cuvette, plus basse de deux pieds trois pouces que celle du tube; et cette inégalité de surface arrive de ce que le vif-argent qui est dans le tube n'a pas assez de pesanteur pour s'égaler de surface à celui de la cuvette, s'approchant du centre autant que lui, celui-ci montant et l'autre descendant, l'avantage qu'a celui de la cuvette par-dessus l'autre se prend de l'air qui pèse sur celui de la cuvette, et ne pèse pas sur celui du tube.

Cela veut dire que l'air commun que nous respirons soit pesant : on n'en doute pas, après avoir pesé une canne à vent devant et après l'avoir chargée. L'air qui couvre la surface du vif-argent dans le tube ne descend pas, soit pour être retenu par le verre qui demeure, soit pour avoir quitté son plus grossier qui le rendoit pesant : d'où s'ensuit qu'il ne pèse ni ne charge point le vif-argent; petit ou grand, il n'importe, ne pesant non plus grand que petit, puisqu'il ne pèse point; mais celui qui est sur la surface de la cuvette pèse et la charge; et partant il est, à l'égard de celui qui est dans le tube, trop pesant pour monter, le laissant descendre : si vous ôtez cet équilibre, qui est dans cette inégalité de surface, l'un monte et l'autre descend : pour exemple, si vous inclinez le tube en sorte que la surface du vif-argent qui est dans le tube ne soit

plus élevée sur celle qui est dans la cuvette de deux pieds trois pouces, le vif-argent de la cuvette descend, et fait monter celui qui est dans le tube. Cette réponse est commune à l'eau d'environ trente-trois pieds.

Venons maintenant à l'expérience de la seringue. Nous avons montré que dans l'eau il y a de l'air, et partant l'air peut en être séparé, et l'air épuré peut entrer en la seringue par ses pores, quand, par la traction du piston, celui qui est dans les pores du verre est contraint de suivre; et ne pouvant suivre que tirant après soi l'eau contiguë, la serre contre le verre, dont les pores sont trop petits pour son passage, et la serrant, il en sépare et tire l'air qui le suit. La résistance qu'on ressent à la première séparation du piston, vient, et de l'air des pores qui n'est point encore dans le mouvement pour les quitter et suivre un corps qui le tire dans le verre, et de l'air qui est dans l'eau, dont la séparation résiste au mouvement qui les sépare : la difficulté diminue peu à peu, ne restant plus que la seconde résistance. La main de l'ouvrier qui tire avec une tenaille le fil de fer par la filière, sent beaucoup plus de résistance au commencement qu'à la suite : la raison physique de cette difficulté est que ce qui repose est plus éloigné du mouvement que ce qui est déjà dans le mouvement.

L'air qui est dans la seringue, subtil et mobile extrêmement, est toujours dans l'agitation par les esprits solaires qui surviennent sans cesse, comme les vitaux dans toutes les parties du corps, sort avec impétuosité sitôt que vous ôtez le doigt, et l'eau entre par la même ouverture, tirée par celui qui reste, et par ce mouvement de l'air et de l'eau se fait le mélange comme auparavant.

L'expérience de la corde s'entend assez bien, si nous disons qu'à mesure qu'elle sort du tuyau, l'eau prend sa place, et n'ayant point d'autre corps contigu plus mobile que le vif-argent, elle le fait monter jusqu'à la hauteur nécessaire à l'équilibre de celui qui est dans le tube avec celui qui est dans la cuvette.

Vous voyez, monsieur, que toutes vos expériences ne sont point contrariées par cette hypothèse, qu'un corps entre dans le verre, et peuvent s'expliquer aussi probablement par le plein que par le vide, par l'entrée d'un corps subtil que nous connoissons, que par un espace qui n'est ni Dieu, ni créature, ni corps, ni esprit, ni substance, ni accident, qui transmet la lumière sans être transparent, qui résiste sans résistance, qui est immobile et se transporte avec le tube, qui est partout et nulle part, qui fait tout et ne fait rien : ce sont les admirables qualités de l'espace vide en tant qu'espace : il est et fait merveille en tant que vide; il n'est et ne fait rien en tant qu'espace; il est long, large et profond en tant que vide; il exclut la longueur, la largeur et la profondeur en tant qu'espace : s'il est besoin, je montrerai toutes ces belles propriétés et conséquences.

Sur la fin de votre lettre, vous accusez d'obscurité ma définition de la lumière. Permettez-moi, que je l'explique en deux mots. Par un corps lucide, que je distingue du lumineux, en tant que le corps lumineux est ce que nous voyons, et le corps lucide ne se voit pas, mais il touche la vue par son mouvement, c'est-à-dire qu'il fait voir, et ce qui fait voir

est ce qui figure la partie du cerveau vivant, qui termine les nerfs optiques tous remplis de ces petits corps, qu'on appelle esprits *lucides*, ou, si ce mot vous semble moins françois, *lumineux;* et cette partie du cerveau vivant est la puissance que nous appelons vue : le mouvement qui fait cette figure, est celui que j'appelle luminaire, et ne convient qu'à ces petits corps qui sont capables de figurer la vue; le corps que nous appelons transparent est toujours rempli de ces petits corps ou esprits lucides; mais ces petits corps n'ont pas toujours un mouvement luminaire, c'est-à-dire un mouvement capable de figurer la vue : il n'y a que le corps lumineux, comme la flamme, qui puisse donner ce mouvement luminaire, comme il n'y a que l'aimant qui puisse donner le mouvement magnétique à la limaille de fer; et comme l'aimant donne ce mouvement à cette poudre de fer sans la donner au corps voisin, de même la flamme au corps lumineux ne donne son mouvement luminaire qu'aux esprits lucides, et non pas aux autres voisins. Ceci est court, mais suffisant pour des personnes capables et intelligentes, comme celle à qui j'ai l'honneur d'écrire.

Cette définition, qui dit que l'illumination est un mouvement luminaire (c'est-à-dire capable de toucher et de figurer la vue) des rayons composés d'esprits lucides, ne peut convenir à la lumière qui passe par le vide, si le vide n'a les qualités d'un corps transparent.

Quand j'ai dit que la lumière pénétroit ce vide apparent avec réfractions et réflexions, je n'ai point dit qu'il y en eût d'autres sensibles que celle du verre. Je sais bien que les optiques mettent des réfractions dans l'air à la sortie du verre; mais comme elles ne peuvent être sensibles en notre vide apparent, je ne m'y arrête pas.

Au reste, monsieur, vous pouvez, en cette réponse, voir ma franchise et docilité, que je ne suis point opiniâtre, et que je ne cherche que la vérité. Votre objection m'a fait quitter mes premières idées; prêt à quitter ce qui est dans la présente contraire à vos sentimens, si vous m'en faites paroître le défaut : vous m'avez extrêmement obligé par vos expériences, me confirmant en mes pensées, fort différentes de la plupart de celles qui s'enseignent aux écoles : il me semble qu'elles s'ajusteroient bien aux vôtres, excepté le vide, que je ne saurois encore goûter. Si je n'étois incommodé d'une jambe, je me donnerois l'honneur de vous voir, et de vous assurer de bouche, ce que je fais par écrit, que je suis de tout mon cœur, monsieur, votre, etc.

ÉTIENNE NOËL.

LE PLEIN DU VIDE,

PAR LE PÈRE NOËL.

A MONSEIGNEUR LE PRINCE DE CONTI.

Monseigneur,

La nature est aujourd'hui accusée de vide, et j'entreprends de l'en justifier en la présence de Votre Altesse : elle en avoit bien été auparavant soupçonnée; mais personne n'avoit encore eu la hardiesse de

mettre des soupçons en fait, et de lui confronter les sens et l'expérience. Je fais voir ici son intégrité, et montre la fausseté des faits dont elle est chargée, et les impostures des témoins qu'on lui oppose. Si elle étoit connue de chacun comme elle est de Votre Altesse, à qui elle a découvert tous ses secrets, elle n'auroit été accusée de personne, et on se seroit bien gardé de lui faire un procès sur de fausses dépositions, et sur des expériences mal reconnues et encore plus mal avérées. Elle espère, Monseigneur, que vous lui ferez justice de toutes ces calomnies. Et si, pour une plus entière justification, il est nécessaire qu'elle paye d'expérience, et qu'elle rende témoin pour témoin, alléguant l'esprit de Votre Altesse, qui remplit toutes ses parties, et qui pénètre les choses du monde les plus obscures et les plus cachées, il ne se trouvera personne, Monseigneur, qui ose assurer qu'au moins, à l'égard de Votre Altesse, il y ait du vide dans la nature. Cette raison ne laisse rien à faire à toutes les expériences produites et à produire : et je ne doute point que nos adversaires n'en demeurent d'accord avec moi, qui en suis aussi persuadé que personne, et qui, par cette persuasion universelle, ajoutée à mes devoirs particuliers, suis aussi parfaitement que nul autre, Monseigneur, de Votre Altesse, le très-humble, très-obéissant et très-obligé serviteur, ÉTIENNE NOËL, de la compagnie de Jésus.

§ 1. *Expérience venue d'Italie.*

Un tuyau de verre de quatre pieds, dont un bout est ouvert, et l'autre scellé hermétiquement, étant rempli de vif-argent, puis l'ouverture bouchée avec le doigt ou autrement, et le tuyau disposé perpendiculairement à l'horizon, l'ouverture bouchée étant vers le bas, et plongée deux ou trois doigts dans l'autre vif-argent, contenu en un vaisseau moitié plein de vif-argent, et moitié d'eau; si on débouche l'ouverture, demeurant toujours enfermée dans le vif-argent du vaisseau, le vif-argent du tuyau descend en partie, laissant au haut du tuyau un espace vide en apparence, le bas du même tuyau demeurant plein du même vif-argent jusqu'à certaine hauteur. Et si on hausse un peu le tuyau jusqu'à ce que son ouverture, qui trempoit auparavant dans le vif-argent du vaisseau, sortant de ce vif-argent arrive à la région de l'eau, le vif-argent du tuyau monte jusqu'en haut avec l'eau, et ces deux liqueurs se brouillent dans le tuyau; mais enfin tout le vif-argent tombe, et le tuyau se trouve tout plein d'eau. Voilà l'expérience, comme l'a couchée M. Pascal, le fils, dans son livre des *Expériences nouvelles touchant le vide*, que nous rapporterons ci-après.

§ 2. *Discours sur cette expérience.*

Le R. P. Valerianus Magnus, en son traité qu'il appelle *Demonstratio ocularis loci sine locato*, raisonnant sur ce fait, avance trois propositions : la première, que l'espace qui se trouve dans le tuyau sur le vif-argent, est vide; la seconde, que la lumière passe à travers; la troisième, que le vif-argent emploie du temps, soit à monter, soit à descendre, par cet espace. On ne doute point de ces deux dernières;

on les voit à l'œil : toute la preuve de la première est que pas un corps n'a pris la place que le vif-argent a quittée; d'où se conclut en première instance, que cet espace est vide, et de cette conséquence, jointe aux autres deux propositions, se déduit nécessairement, que le mouvement d'un corps par le vide ne se fait pas en un instant, mais par succession; et que la lumière n'est ni corps, ni dans un corps; et qu'un corps lumineux tire la lumière du néant, puisque le vide est un néant. Je ne combats point toutes ces conséquences; elles suivent par nécessité cet antécédent, qu'aucun corps n'est entré ni demeuré dans l'espace qu'a quitté le vif-argent. Mais quantité d'autres expériences nous faisant voir que les corps se poussent ou se tirent si fort les uns les autres, que le vide entre eux est impossible sans miracle (et même absolument, selon ceux qui ne peuvent se figurer aucun espace environné de corps, que composé de parties les unes hors des autres, long, large et profond, qui sont l'essence et les propriétés d'une dimension réelle et effective; et selon ceux qui disent que le corps n'étant que parties les unes hors des autres, et la nature des parties étant de composer et faire un tout, les individus corporels différens d'espèces composent immédiatement un tout corporel, qui est le monde); tout cela me rend tel antécédent fort suspect, en général, pour le vide; et, en particulier, pour celui dont il est question : voici des expériences qui le contrarient. Les yeux nous font voir que cet espace a quasi deux pieds de long; qu'il est rond, qu'il reçoit sa figure du verre, comme l'eau de son vase; qu'il fait monter le vif-argent, comme un corps qui s'enfuyant le pousseroit en sa place; qu'il l'arrête, comme un piston bien juste arrête l'eau dans une seringue; qu'il ne retarde pas moins le mouvement naturel du vif-argent quand le tube est renversé, que l'air; qu'il transmet la lumière, comme un corps transparent; que d'un soufflet plein de ce vide apparent, on fait sortir un corps tout semblable à notre air en ses effets, quand on le presse débouchant son ouverture : tout cela ne peut se nier; on le voit à l'œil. Ajoutez qu'on ne sait ce que devient ce corps, qui remplissoit tout cet espace de vide apparent; est-il anéanti ? Non, c'est le vif-argent qui entre dans la cuvette. Mais quelle place a prise ce vif-argent ? Celle de l'air en montant. Et l'air dont il a pris la place, qu'est-il devenu ? Vous me direz qu'il est condensé; cette condensation ne peut être sans chasser et exclure quelque corps, ou remplir quelque vide. Si quelque corps est chassé, où est-il allé, puisque tout est plein? Si le vide est rempli, le vide sera le lieu de cet air condensé; et voilà ce pauvre air hors du monde, privé de toute communication avec les corps tant célestes que terrestres. De plus, même avant que le vif-argent fût descendu, le vide, où s'est placé l'air épaissi, étoit autour du tuyau. Voilà donc du vide, et dedans, et dehors le tuyau : du vide rempli au dehors, qui étoit vide auparavant et sans corps; et du vide dans le tuyau, vide véritable et sans matière. Cette expérience pouvant se faire partout, dans de longs et gros tuyaux, il y aura du vide véritable partout, et dedans, et dehors le tuyau; rempli tantôt dehors, tantôt dedans; tantôt sans corps au dedans, tantôt sans corps au dehors. Je ne m'arrête pas à réfuter la condensation vide et sans exclusion

de corps, que quelques-uns attribuent à Aristote. Une partie ne sauroit être plus voisine du centre qu'auparavant, si elle ne prend la place d'un autre corps, qu'elle chasse; ou si elle n'entre dans le vide ou dans un corps : il n'y a que ces trois façons de joindre davantage une partie à une autre. La pénétration des dimensions est impossible naturellement; faut-il donc, pour s'approcher davantage, ou entrer dans le vide, ou chasser un corps qui servoit d'entre-d'eux?

§ 3. *Conclusion de ce que dessus.*

Tout ce que dessus mûrement considéré, je crois qu'il faut plutôt conclure pour l'entrée ou la demeure de quelque corps qui remplisse tout cet espace, et qui ait le pouvoir de retenir et faire monter le vif-argent, de retarder son mouvement, de soutenir et transmettre la lumière; que pour le vide, qui n'est que la ruine des corps, étant leur privation, qui n'est qu'un vrai néant, et, par suite nécessaire, sans différences, sans parties, sans longueur, sans largeur, sans profondeur, sans mouvement, sans action. C'est pourquoi je trouve beaucoup plus raisonnable d'avouer qu'en cet espace il y a un corps, quoique sa nature nous soit cachée, que de nier qu'il y en ait, pour ne pas savoir quel il est : je ne sais pas quelle distance il y a entre Saturne et les étoiles; donc il n'y en a point : cette conséquence est mal tirée. De même, je ne connois pas le corps qui est entré ou demeuré dans cet espace qu'a quitté le vif-argent; donc il n'y en a point : cette conséquence n'est pas meilleure. Je ne doute point, fondé sur l'expérience et sur l'union mutuelle des corps dans le monde, que dans cet espace apparemment vide (pas plus néanmoins que quand l'air y est) il n'y ait un corps. Il faut chercher quel il est, et par où il est entré. La considération de cette première expérience venue d'Italie m'y conduit : j'y trouve trois choses dignes d'être considérées.

La première, que le vif-argent, dont est rempli le tuyau de verre de quatre pieds, scellé hermétiquement par le haut, plongé et débouché dans le vif-argent d'un vaisseau, élevé pourtant à quelque distance du fond et perpendiculairement à l'horizon, quitte le haut du tube, et descend

La seconde, qu'il ne descend qu'à certaine hauteur.

La troisième, que l'ouverture ayant quitté le vif-argent du vaisseau et passé à la région de l'eau, le vif-argent monte jusqu'au haut du tuyau avec l'eau, puis descend, et descendant se mêle dans le tube avec l'eau, qui monte en sorte qu'elle prend la place du vif-argent, et le tuyau se trouve plein d'eau. Pour donner raison de tout cela, je commence par le mélange des élémens, et dis :

§ 4. *Que les autres élémens se trouvent dans l'air.*

Que dans ce tout, que nous appelons *air*, il y ait de la terre, nous l'expérimentons en hiver dans un froid sec : les mains exposées à l'air contractent une crasse composée de ces petits atomes terrestres, qui le remplissent et le refroidissent. Que dans ce même tout il y ait de l'eau,

cela se voit clairement en la canne à vent dont elle sort, quand vous la chargez avec vitesse et longtemps; et sur la surface des marbres, au dégel et au temps humide. Qu'il y ait aussi du feu élémentaire (je veux dire de ce feu qui, pour sa petitesse et rareté, est invisible, et par suite fort différent de la flamme et du charbon allumé, qui est entouré d'étincelles ou petites flammes qui s'éteignent dans l'eau, et non pas le feu élémentaire); qu'il y ait, dis-je, de ce feu dans l'air, on peut le connoître au foyer d'un miroir ardent, qui brûle par le concours des rayons qui sont dans l'air, et par un mouchoir où se ramassent les esprits ignés, que l'air qui est autour du feu lui apporte; et ce feu est même si grossier, qu'il est visible, car on voit, en un lieu froid et obscur, sortir les étincelles de ce mouchoir, quand, après l'avoir étendu et bien chauffé, et puis resserré tout chaud, on l'étend et passe-t-on la main par-dessus un peu rudement.

Si les feux de nos cheminées remplissent d'esprits ignés l'air d'alentour, le soleil, qui enflamme par réflexions et réfractions, pourra bien épandre ses esprits solaires en tout l'air du monde, et par suite y avoir du feu; comme en effet il y en a qui s'en sépare, quand l'air est pressé par les corps solides et durs qui sont mus dans l'air avec vitesse. La chaleur que nous sentons au froissement de l'air vient de cette séparation. Ce feu, séparé et réuni par ensemble, est plus fort que divisé, mêlé et confondu avec l'air. Quand un charpentier fait un trou dans le bois avec sa tarière, il l'échauffe grandement; pressant bien fort ce peu d'air qui est dans son trou, il en fait sortir ce feu subtil et invisible, qui entre par sa grande mobilité et subtilité presque inconcevable dans le fer, et l'échauffe. Quand d'une main vous frappez l'autre un peu rudement, vous froissez l'air intercepté; vous en séparez les esprits ignés, et sentez leur chaleur. Cette union de ce feu subtil et invisible est bien plus facile en l'air qu'aux autres corps, où il est moins fréquent, moins libre, plus petit et plus serré; c'est pourquoi les corps solides et durs, jetés par l'air, se meuvent facilement, pressant l'air devant et autour d'eux, d'où suit l'expression et l'union des esprits ignés entre l'air et le corps mû par jet. Ces esprits se retrouvant unis en la place que le corps a quittée par son avancement en l'air, se roulant vers ce corps jeté qui empêchoit leur mouvement, s'enfonçant dans l'air, le poussent et lui font pénétrer l'air précédent; où la compression de l'air, la séparation, l'union du feu et le mouvement du corps se continuent autant que la force est grande suffisamment pour surmonter la pesanteur, qui résiste toujours tant qu'elle peut, et se rend enfin la maîtresse.

On connoît d'ici pourquoi la balle que vous laissez choir de la portière d'un carrosse qui roule, ne tombe pas à plomb, mais s'avance tant soit peu vers le devant, et d'autant plus, que le carrosse va vite. Tout l'air qui précède et environne le carrosse est pressé; les esprits ignés s'en séparent, et, roulant où va le carrosse, poussent la balle qu'on a laissée choir, prenant la place où la balle, par son changement de place, les a poussés. La lumière, qui est dans l'air, nous est un grand argument pour nous persuader les esprits solaires et ignés, qui sont lucides,

et dont le mouvement par le corps lumineux est ce que nous appelons *lumière*. Je m'explique. Par un corps lucide (que je distingue du lumineux, en tant que ce corps lumineux est celui que nous voyons, et le corps lucide ne se voit pas), j'entends le corps qui touche la vue par son mouvement, c'est-à-dire qui fait voir; et ce qui fait voir est ce qui figure la partie du cerveau vivant, qui termine les nerfs optiques, tous remplis de ces petits corps qu'on appelle *esprits lucides :* cette partie du cerveau vivant est la puissance que nous appelons *vue*. Le mouvement qui fait cette figure est celui que nous appelons *luminaire*, et ne convient qu'à ces petits corps qui sont capables de figurer la vue. Le corps que nous appelons *transparent* est toujours rempli de ces petits corps ou esprits lucides fort mobiles; mais ces petits corps n'ont pas toujours un mouvement luminaire, c'est-à-dire un mouvement capable de figurer la vue : et il n'y a que le corps lumineux, par exemple, la flamme, qui puisse donner ce mouvement luminaire. Comme l'aimant donne le mouvement magnétique à la limaille de fer sans le donner aux sables voisins, de même la flamme ou le corps lumineux donne son mouvement luminaire aux esprits lucides, et non pas aux autres. D'ici je conclus que dans l'air il y a quantité d'esprits lucides et fort mobiles, puisqu'il est transparent; et ces esprits étant ignés, qu'il y a dans l'air du feu, que j'appelle *élémentaire*, et qu'il s'en sépare; et séparé, je l'appelle *éther*.

§ 5. *Que l'eau est mêlee avec les autres élémens.*

L'expérience nous apprend aussi que, dans le mélange que nous appelons *eau*, il y a de l'air; en voici une preuve convaincante :

Faites une chambre carrée de cinq ou six pieds en tout sens, à la chute d'un ruisseau de même hauteur; mettez au milieu de la voûte un canal d'une embouchure un peu grande, comme d'un entonnoir; que ce canal soit rond, de trois ou quatre pouces de diamètre, long de quatre pieds; qu'il descende en la chambre perpendiculairement au pavé fait au niveau par où l'eau du ruisseau coule à plomb sur le milieu d'une pierre fort dure, plate, ronde, et d'un pied de diamètre, plus haute que le reste du pavé de trois pouces; faites à côté dans l'une des quatre murailles, à fleur du pavé, une ouverture par où l'eau s'écoule; faites-en une autre à un pied du pavé dans la muraille qui est vis-à-vis : de cette ouverture naisse en dehors un canal rond, et long de quatre pieds, qui la remplisse parfaitement, et aille se rétrécissant depuis la naissance de la muraille, où il a neuf ou dix pouces de diamètre, jusqu'au bout, qui sera de deux à trois pouces. L'air sortira sans cesse de ce canal avec autant d'impétuosité qu'il sort de ces grands soufflets de forge où se fond le fer de mine. Cet air mêlé, confondu et comme perdu dans ce tout que nous appelons *eau*, et qui tombe à plomb par le canal de la voûte, se sépare de l'eau grandement pressée entre la pierre qui la reçoit et l'autre eau suivante qui la pousse; et cet air ne trouvant en toute la chambre, qui en est déjà pleine, rien d'ouvert que ce canal qui est dans la muraille à un pied du pavé, pressé par l'air suivant, s'engouffre dans ce canal, et sort de même vitesse que

celui de ces grands soufflets longs de plus de quinze pieds. Voilà une preuve péremptoire de l'air mélangé avec l'eau, et de leur séparation par une compression artificielle et violente au mélange naturel au monde. L'eau séparée et plus grossière s'écoule par l'ouverture d'en bas à fleur du pavé, et l'air séparé sort par son canal un pied plus haut.

Un autre effet de la séparation de l'air et de l'éther par la compression de l'eau, paroît dans ces ronds qui se font au jet d'une petite pierre sur une eau claire sans mouvement; car alors l'éther, se séparant de l'eau par la compression qu'en fait la pierre en la pénétrant, se roule dans la place abandonnée par la pierre, et là communique son mouvement à l'éther, qui est suivi d'un éloignement du centre à la circonférence, d'une élévation et d'une dépression qui paroissent même à nos yeux, et qui vont s'étendant à mesure qu'ils approchent de la circonférence par une communication à plus grand nombre d'esprits, et se ralentissant à mesure qu'ils s'éloignent de leur principe. La dilatation et l'élévation viennent de la légèreté et mobilité de l'air, et la dépression se fait par la pesanteur de l'eau.

Je remarque ici une différence fort notable entre l'air qui est dans l'eau (c'est le même des autres élémens) et l'air qui est mêlé avec l'eau, faisant partie de ce tout ou mélange que nous appelons *eau*. L'air, dans l'eau, fait un tout à part que nous appelons *air*, et monte toujours au-dessus de l'eau : l'air mêlé avec l'eau fait un tout avec les autres élémens, que nous appelons *eau*, et ne s'en sépare que par quelque violence.

Le feu élémentaire se trouve aussi dans l'eau, mêlé comme les autres élémens, et ne s'en sépare que quand il est trop fort, ou contraint par la compression de l'eau. Celle qui est chaude, et principalement celle qui bout, est pleine d'esprits ignés, que nos charbons et nos flammes lui envoient. Disons le même du soleil à l'égard des eaux du monde : c'est pourquoi la nuit on voit des flammes sur la mer, que les vaisseaux et autres corps font sortir de l'eau quand ils la froissent.

Qu'il y ait de la terre dans l'eau, cela se voit dans les canaux des fontaines, et dans certaines pierres qui s'encroûtent au courant de l'eau, par les atomes terrestres qui se séparent d'elle, étant pressés.

§ 6. *Du thermomètre.*

Les mouvemens sensibles de l'eau dans le thermomètre me semblent ne pouvoir s'expliquer intelligiblement que par l'entrée ou le mouvement des esprits ignés de l'air chaud ou de la main échauffée.

Voici ma pensée, que je propose tout simplement. Les esprits de feu qui transpirent sans cesse de la main chaude qui touche la bouteille du thermomètre, meuvent l'air qui est dans les pores du verre par leur toucher; et cet air mû, meut son voisin qui est dans l'eau, et, par ce mouvement, cet air se sépare de l'eau beaucoup moins mobile. Comme si vous aviez, dans une coupe d'argent, plusieurs particules de même matière et pesanteur, dont les unes fussent carrées et les autres rondes, mêlées par ensemble, et que vous remuassiez tout ce mélange en re-

muant la coupe: les particules rondes, comme plus mobiles, se sépareroient des carrées, qui auroient moins de mouvement. L'air donc, par ce mouvement, se sépare de l'eau, et l'eau, par cette séparation, tient moins de place; et il nous semble, à cause qu'elle se ramasse vers le bas, qu'elle descend, et à cause qu'elle quitte une partie de son rare, qu'elle se condense. Or, plus grande est la chaleur de la main, le mouvement est plus grand, et de plus de parties qui se roulent les unes sur les autres; et plus grand est le mouvement, plus grande est la séparation de l'air et de l'eau. Ces roulades ne sont pas sensibles; mais la raison nous les apprend par cet axiome, que « le mouvement d'un corps arrêté par l'une de ses parties, et mû par les autres, tient du circulaire. » Otez ce mouvement accidentaire des parties de l'air, et conséquemment des parties de l'eau, l'air et l'eau reprennent leur mélange naturel et propre au monde; et, par ce mélange, l'eau s'enfle, tient plus de place, et paroît monter. Si l'eau descend effectivement sans que l'air s'en sépare, nous dirons probablement que les esprits ignés entrent dans le thermomètre, et que quelques autres en sortent.

Ce que dessus doit s'entendre d'un thermomètre qui seroit bouché hermétiquement; car les mouvemens de ceux qui sont ouverts par en bas s'entendent facilement par l'entrée des esprits ignés qui repoussent et font enfler l'eau, qui remonte et se ramasse à leur sortie.

§ 7. *De la raréfaction et condensation.*

Je suis l'opinion de ceux qui veulent qu'un corps simple occupe toujours un même espace dans le monde, jamais plus grand, jamais plus petit. Autrement il y auroit de la pénétration des corps ou du vide : pénétration, s'il occupoit plus grande place; du vide, s'il en occupoit une plus petite. Ainsi le monde, ou regorgeroit, ou ne seroit pas toujours plein. On ne peut nier qu'entre les corps simples, il n'y en ait de plus rares, lesquels, avec pareil nombre d'atomes sensibles, tiennent plus de place; et de plus denses, qui en tiennent moins. Le feu élémentaire est de sa nature plus rare et moins dense que la terre, et la terre est de sa nature moins rare et plus dense que le feu élémentaire : le feu simple jamais moins rare, la terre simple jamais moins dense : les mixtes sont plus ou moins rares, plus ou moins denses, selon qu'ils sont plus ou moins participans du feu ou de la terre. D'où s'ensuit que le corps qui est mêlé de terre et de feu, est en partie rare, en partie dense: si vous lui ôtez de son feu, ou lui donnez de la terre, vous le condensez; et si vous séparez totalement le feu de la terre, et la terre du feu, vous avez du rare dans un espace du monde, et dans l'autre du dense. Faisons que celui-ci soit d'un pied et celui-là de quatre, avec pareil nombre d'atomes naturels : les deux joints ensemble sans se mêler tiendront un espace de cinq pieds; qu'ils soient mêlés et confondus ensemble, toutes les petites places que tient le feu ne feront jamais ensemble qu'un espace de quatre pieds; toutes celles que tient la terre n'en feront qu'un d'un pied, et toutes deux ensemble un de cinq pieds. Ce qui fait croire qu'un même corps, sans rien perdre ou acquérir, a tantôt plus, tantôt

moins de place, est l'insensibilité du corps qu'il perd ou acquiert. Le sens est trompé; mais nous le corrigeons par la raison : nous ne sentons pas ce qui est dans un ballon enflé; toutefois nous jugeons qu'il est plein de quelque corps, à cause qu'il résiste quand on le presse, et puis nous cherchons quel peut être ce corps, et nous trouvons celui que nous appelons *air*. De même, voyant que la lumière passe à travers d'une bouteille de verre, nous jugeons qu'elle contient en soi un corps transparent. Or, comme le ballon s'enfle quand l'air qu'on ne voit point y entre, et se désenfle quand il en sort; de même un corps mêlé tient plus de place quand il se remplit d'un autre invisible, et moins quand il le quitte.

Si les parties matérielles d'un même corps pouvoient être tantôt plus, tantôt moins voisines les unes des autres, sans perdre ou acquérir quelque entre-deux, ou la rareté produiroit toujours au corps voisin de la densité, et la densité de la rareté; ou dans le monde il y auroit du vide ou de la pénétration de dimensions.

Les expériences rapportées ci-dessus montrent que les élémens sont mêlés; et la comparaison des liqueurs qu'on appelle *humeurs*, mêlées dans nos veines, artères et autres concavités de notre corps, fait entendre ce mélange des élémens dans le grand monde, où les mouvemens du firmament, des étoiles, des planètes, et principalement du soleil, font voir que les élémens doivent y être mêlés en sorte que vous ne sauriez prendre aucune partie sensible de l'un, que les autres n'y soient plus ou moins. Le soleil envoie continuellement par tout le monde ses esprits solaires, qui, sans cesse et invisiblement, meuvent et mêlent tout pour le bien du monde; comme le cœur envoie par tout le corps les esprits de vie, qui remuent incessamment et mêlent tout pour le bien du corps. Un corps fluide, si toutes ses parties étoient de même nature, n'auroit qu'un mouvement local en même temps; ce qui est contre l'expérience.

§ 8. *Que les corps ont des pores.*

Ce mélange des élémens montre qu'ils ont quantité de pores; l'or même, qui est si dense, fait paroître les siens grands, quand on le voit dans une lunette à puce. Le son du verre est une preuve infaillible que dans ses pores il y a de l'air : et ce trémoussement qui est ou fait le son, qu'il y est fort mobile. Or, ces pores étant fort petits, il est nécessaire que l'air qu'ils enferment soit fort subtil; et le feu du fourneau où se fond le verre étant si ardent, montre que cet air doit être accompagné d'esprits ignés.

§ 9. *Quand un corps quitte sa place, il y en pousse un autre.*

Nous connoissons aussi, par expérience, qu'un corps changeant de place par sa pesanteur ou légèreté naturelle, en pousse toujours un autre en la place qu'il abandonne (tout corps qui change de place dans le monde, presse et fait sortir un corps du lieu où il va, dilate et fait entrer un corps au lieu d'où il sort). Cette expérience est familière en un poudrier, quand l'air, par sa légèreté mouvante, pousse le sable en la

bouteille où il étoit; et le sable, par sa pesanteur effective, pousse l'air en la bouteille supérieure, qui étoit sa place. Il faut, pour tout changement de place, qu'en même temps un corps quitte la sienne, et qu'un autre la remplisse; le corps n'est poussé naturellement que quand on lui fait place, et le corps n'est poussé effectivement qu'où il y a place; autrement il ne bouge, et ne bougeant il arrête l'autre, dont il devroit prendre la place, comme celui-ci, en le poussant et le faisant sortir, auroit pris la sienne. S'il y avoit du vide, cela n'arriveroit pas; un corps empliroit un vide, et en videroit un autre sans pousser un autre corps et le faire sortir de sa place immédiatement, ou par l'entremise d'autres interposés et participans de ce mouvement, contre l'expérience journalière des corps qui se poussent. Outre que tout espace, que nous appelons *place* ou *lieu*, seroit vide, et, par suite nécessaire, le vide seroit partout; car les corps changent, et peuvent changer de place partout.

Cette mutuelle acception et donation de place dans le monde vient de sa plénitude et capacité finie, qui ne permet pas qu'un même corps ait naturellement deux lieux, ni qu'un lieu soit sans corps.

§ 10. *Que le monde est plein.*

Cette plénitude et perfection de ce tout corporel, que nous appelons *monde*, se prouve de la nature des élémens, qui n'auroient aucun vide, s'ils composoient tout ce grand *monde* sans mélange, et selon leur ordre naturel. Les parties de chaque élément seroient jointes et unies d'elles-mêmes, sans entre-deux, par leur inclination naturelle d'être en leur *tout*. Les tous se toucheroient de leurs extrémités, par l'inclination naturelle d'être chacun en sa place, qui est à l'eau immédiatement sur la terre, et immédiatement sous l'air, et à l'air immédiatement sous le feu élémentaire ou *éther*, et immédiatement sur l'eau : ainsi le monde seroit parfaitement plein. Or, ni les corps mixtes composés des quatre élémens, ni le mélange des élémens que font et maintiennent les astres et planètes, et notamment le soleil, par leur mouvement et distribution de leurs esprits, n'empêchent pas qu'ils ne tiennent autant, ni plus, ni moins de place dans le monde, joints et mêlés que séparés; comme deux verres de même grandeur et capacité, l'un d'eau, l'autre de vin, ont toujours une place de même grandeur, unis et séparés. Je sais bien que trois verres de même grandeur et capacité, dont l'un soit plein d'eau, l'autre de sel ammoniac, le troisième de nitre, pourront se mêler ensemble et ne remplir qu'un verre; mais cela vient, non pas des petits vides semés par-ci par-là, qui se remplissent (un corps dans le vide n'auroit aucune communication avec les autres corps, tant célestes que terrestres, et n'en sortiroit jamais : qui l'en tireroit ?) si bien des petits esprits lunaires, solaires, saturniens et autres dont ce bas monde est rempli, qui sortent mis en liberté par la jonction de l'eau et des sels, et donnent place aux particules des corps joints, y poussées immédiatement ou médiatement, par ces esprits qui ont changé de place et pris la leur hors du verre. D'où s'ensuit que les particules de ces trois corps sont plus jointes qu'auparavant.

§ 11. *Réponses aux difficultés de cette première expérience.*

De ce mélange des élémens, de la petitesse des pores du verre et autres semblables matières; de l'air subtil, ou plutôt feu élémentaire, que j'appelle *éther*, qui les remplit; de la pulsion des corps en leurs places :

Je conclus que le vif-argent, descendant du tuyau par sa pesanteur effective, fait monter celui du vaisseau; celui-ci, l'air qui est autour du tuyau, dont la première partie, pressée contre les parties suivantes, fait sortir ce qu'elle a de plus subtil, qui est l'éther; car presser un corps, est joindre et approcher ses parties, par l'exclusion d'un corps qui les dilatoit et les séparoit. L'éther, sorti de l'air, est poussé dans la place vidée par celui qui étoit dans les pores; et celui qui étoit dans les pores, dans la place abandonnée par le vif-argent : et tout cela se fait en même temps à la descente du vif-argent.

Le corps qui est entré dans le tuyau est l'éther; il y est entré par les pores du verre, poussé par le vif-argent porté en bas par sa pesanteur effective : tellement que le principe de tout ce changement de place est la pesanteur effective du vif-argent qui est dans le tube. Voilà pour la première chose à considérer en cette expérience.

Venons à la seconde. Pourquoi l'éther, ayant suivi le vif-argent jusqu'à deux pieds trois pouces par-dessus la surface de celui qui est dans le vaisseau, s'arrête. L'inclination de l'éther est de monter par-dessus l'air et tous les autres élémens : c'est pourquoi, n'y étant jamais dans le monde, il est toujours dans l'essai et dans l'effort de monter, et monte aussitôt qu'il trouve place abandonnée par quelque corps plus voisin du ciel, ou poussé par l'éther même, ou par quelque autre corps, ou mû par son principe intérieur. Quand il prend de soi une place vide et voisine, à côté ou en bas, c'est toujours pour monter, et ne le fait qu'étant empêché de son droit chemin. En quelque part qu'il aille, porté de sa légèreté, il pousse les autres; et, s'il n'est pas assez fort pour les pousser et prendre leur place, et les contraindre à prendre celle qu'il leur quitteroit, il ne bouge. De même le vif-argent ne descend point qu'il ne contraigne un autre à prendre sa place; et, s'il ne peut, il demeure. Voilà justement l'état où sont l'éther et le vif-argent, quand ni l'un ni l'autre n'a la force de contraindre son voisin, le poussant à prendre sa place. L'éther, enfermé dans le tuyau, ne peut monter par sa légèreté mouvante qu'il ne prenne la place de l'air supérieur son voisin. Cet air supérieur ne quitte point sa place qu'en prenant celle qu'un autre abandonne; cette place est le bas, c'est-à-dire vers celle que l'éther quitte : si donc l'air ne peut prendre place vers celle que quitteroit le vif-argent, l'éther demeure, et le vif-argent ne l'arrête que par sa pesanteur effective, qui ne donne point de place à l'air qui devroit la prendre, au cas qu'il fût poussé de la sienne par l'éther, changeant de place par sa légèreté mouvante. Si d'ailleurs le vif-argent n'est pas assez fort pour pousser l'éther dans le tube, la place étant occupée par celui qui est dedans et ne la quitte point, il demeurera, non pas arrêté par sa pesanteur, mais par la légèreté mouvante de l'éther conservant sa place,

n'en ayant point d'autre pour monter, et n'étant pas contraint de descendre par la pulsion du vif-argent.

Comparons aussi le vif-argent qui est dans le tube avec celui qui est dans la cuvette, comme le poids qui est dans un bassin d'une balance avec le poids qui est dans l'autre. Si celui qui est dans la cuvette pèse plus que celui qui est dans le tube, il descendra, et fera monter celui du tube, comme le poids d'une balance le plus pesant descend et fait monter l'autre. Au contraire, si celui qui est dans le tube est plus pesant que celui qui est dans la cuvette, il descendra, et fera monter celui de la cuvette jusqu'à l'égalité de pesanteur et équilibre, qui, dans l'inégalité de surface perpendiculaire à l'horizon, se rencontre en celle qui est dans la cuvette plus basse de deux pieds trois pouces que celle du tube.

Et cette inégalité de surface arrive de ce que le vif-argent qui est dans le tube n'a pas assez de pesanteur pour s'égaler de surface à celui de la cuvette.

L'avantage qu'a celui de la cuvette par-dessus l'autre, se prend de l'air qui pèse sur celui de la cuvette, et ne pèse pas sur celui du tube, celui-ci n'étant que sous l'éther qui ne charge point. Que l'air commun que nous respirons, et qui est sur la surface du vif-argent qui est dans la cuvette, soit pesant, on n'en doute pas, après avoir pesé la canne à vent devant et après l'avoir chargée.

Quand on hausse le tuyau sans quitter le vif-argent du vaisseau, l'air dont le tuyau prend la place est poussé vers le bas; une partie entre dans le tube, l'autre prend la place du vif-argent de la cuvette qui est descendu. Quand on l'enfonce, le vif-argent du tuyau pousse l'éther, qui prend la place que le tuyau quitte en descendant. La place que tient le tube dans l'air et dans le vif-argent doit être considérée.

On demande ici pourquoi un grand tuyau plein d'éther ne fait pas plus monter le vif-argent qu'un petit. Je réponds que l'éther d'un grand tube n'a pas plus de légèreté mouvante que l'éther d'un petit, quand il n'a point de place où aller : il n'en a point qu'il ne pousse et fasse entrer son voisin le plus mobile en celle qu'il abandonne. Le seul vif-argent a ces deux conditions de voisinage et plus grande mobilité. Si donc l'éther monte et change de place, il doit, par le moyen de l'air dont il prend la place immédiatement, le faisant descendre, faire monter le vif-argent, cet air poussé par l'éther ne trouvant point de place que celle que quitteroit le vif-argent en montant, poussé dans la place abandonnée par l'éther. Le vif-argent donc, si sa pesanteur effective est trop grande pour être surmontée par la légèreté mouvante de l'éther, demeurera et empêchera le mouvement de l'éther, ne lui quittant point la place. Or, tout ainsi qu'une planche peut soutenir un poids plus grand que celui qui est nécessaire pour la tenir droite et en état, de même la pesanteur effective du vif-argent dans le tube est suffisante pour empêcher le mouvement d'un éther plus grand que celui qui est nécessaire pour l'arrêter. Mais comme ce poids, si la pesanteur venoit tellement à croître, ou la force de la planche tellement à diminuer, qu'il ne pût être soutenu par cette planche, descendroit en la rompant, de même l'éther, si

sa légèreté mouvante venoit tellement à croître par l'union d'autres parties, ou si la pesanteur du vif-argent tellement à décroître, qu'il ne pût être empêché de changer de place par la pesanteur du vif-argent, il le feroit monter en sa place.

Comme il arrive quand l'ouverture du tube trempe dans l'eau (qui est la troisième chose considérable en cette expérience); car alors l'éther pousse l'air sur l'eau, et l'eau sur le vif-argent, et le vif-argent en la place qu'il abandonne.

Mais comme le vif-argent est plus pesant que l'eau, n'étant plus poussé que de l'eau, il la pousse en sa place vers le haut, et prend la sienne vers le bas : ainsi le tuyau demeure plein d'eau.

Que l'éther ait la force de pousser en haut et contraindre les choses pesantes à prendre sa place, nous le connoissons de ces instrumens de chirurgie qu'on appelle *ventouses*, où le feu, sortant par les pores du verre, contraint l'air d'alentour de descendre, et pousser la chair et le sang après la scarification dans la ventouse.

On fait la même expérience avec un verre de table : si vous y allumez un peu de papier, et le renversez sur une assiette couverte d'eau, ce petit feu invisible, et presque insensible en sortant par les pores du verre, pousse l'air sur l'assiette; et l'air poussé, pousse l'eau sous le verre. Son mouvement n'est pas plus grand, à cause que l'eau est trop pesante pour monter plus haut.

Cette expérience est venue d'Italie; celles qui suivent ont été faites et données au public par M. Pascal le fils, dont la première est couchée en ces termes.

§ 12. *Première expérience faite par M. Pascal le fils.*

Une seringue de verre avec un piston bien juste, plongée entièrement dans l'eau, et dont on bouche l'ouverture avec le doigt, en sorte qu'il touche au bas du piston, mettant pour cet effet la main et le bras dans l'eau, on n'a besoin que d'une force médiocre pour le retirer, et faire qu'il se désunisse du doigt, sans que l'eau y entre en aucune façon (ce que les philosophes ont cru ne pouvoir se faire avec aucune force finie) : ainsi le doigt se sent fortement attiré et avec douleur; et le piston laisse un espace vide en apparence, et où il ne paroît qu'aucun corps ait pu succéder, puisqu'il est tout entouré d'eau qui n'a pu y avoir d'accès, l'ouverture en étant bouchée : si on tire le piston davantage, l'espace vide en apparence devient plus grand, mais le doigt ne sent pas plus d'attraction : et si on le tire presque tout entier hors de l'eau, en sorte qu'il n'y reste que son ouverture et le doigt qui la bouche; alors ôtant le doigt, l'eau, contre sa nature, monte avec violence, et remplit entièrement tout l'espace que le piston avoit laissé.

§ 13. *Raison de cette expérience.*

Cette expérience dit quatre choses : la première, que l'eau n'entre point dans la seringue; la seconde, qu'on sent de la douleur au doigt qui bouche l'ouverture, quand on commence à tirer le piston; la troisième, que cette douleur ne se sent pas davantage quand on le tire

beaucoup; la quatrième, quand la seringue est tirée hors de l'eau, excepté le bout où est l'ouverture, et qu'on ôte le doigt qui la bouchoit, l'eau y monte contre sa nature, et la remplit.

Pour la première, il faut se souvenir de ce qui a été dit et montré, que dans l'eau il y a de l'air, et dans l'air du feu élémentaire qui peuvent être séparés de l'eau et rendus éther, qui passe dans la seringue par ses pores, quand le piston, montant et prenant la place du corps qui est au-dessus, le pousse; et ce corps poussé, pousse l'eau vers la seringue, et l'eau serrée contre le verre par les parties suivantes, poussées et poussantes, fait sortir l'éther, et le pousse où il y a place abandonnée par le piston.

Voilà donc la matière dont la seringue se remplit, qui est la première des quatre choses à considérer en cette expérience. Voici mon raisonnement pour la seconde et la troisième : la douleur qu'on sent à la première séparation du piston, vient de ce que le doigt est poussé dans la seringue par l'eau comme le reste : cette douleur cesse, quand le corps qui entre, poussé dans la seringue pour y trouver place, trouve passage par d'autres endroits; ce qui arrive quand le piston est bien avancé dans la seringue, et éloigné du doigt qui bouche son ouverture.

Venons maintenant à la quatrième difficulté de l'eau qui monte, contre sa nature, dans la seringue; en voici la raison. L'éther, qui est dans la seringue, subtil et mobile extrêmement par sa légèreté naturelle, et toujours dans l'agitation par les esprits solaires qui surviennent sans cesse, comme les vitaux dans toutes les parties du corps vivant, sort avec impétuosité par les pores du verre, sitôt que vous lui donnez moyen de changer de place, et prendre celle d'un autre qu'il pousse dans la sienne. Et cela se fait en ôtant le doigt; car alors l'éther fait entrer l'eau dans l'espace qu'il abandonne, l'y poussant, et prenant sa place par sa légèreté mouvante, plus grande que la pesanteur effective de l'eau. La parenthèse insérée dans la description de cette expérience (que les philosophes ont cru ne pouvoir se faire avec aucune force finie) n'est pas universellement reçue. Qui sait le mélange des élémens, la subtilité de l'air épuré et la quantité des petits pores du verre, la plénitude et perfection du monde, l'impénétration des dimensions, se persuade aisément qu'un air subtil peut être poussé dans la seringue du premier au dernier par le piston, qui, dans elle, change de lieu. Le raisonnement, que pas un corps n'est entré dans la seringue, puisqu'elle est dans l'eau, et que l'eau n'y est pas entrée, présuppose que rien ne peut entrer dans un corps qui soit dans l'eau, qui ne soit eau : cette hypothèse ne passe pas pour vraie dans un esprit qui connoît tout ce mélange, la subtilité des corps et l'horreur que la nature a du vide, et par suite son impossibilité naturelle, ou plutôt l'impénétration des dimensions.

§ 14. *Seconde expérience.*

La seconde expérience est d'un soufflet bien fermé de tous côtés, qui a le même effet avec la même préparation, et qui est une preuve mani-

feste que ce vide apparent est un corps, puisque le soufflet qui en est rempli souffle comme celui qui est plein d'air.

Cette expérience nous apprend que dans le cuir il y a des pores, ce qui est si vrai, qu'il n'y a corps au monde qui n'en ait : ils paroissent bien grands dans l'or, quand on le voit dans ces petites lunettes, qu'on appelle à puce. La plupart des philosophes ne se trouvent pas dans des sentimens contraires.

§ 15. *Troisième expérience.*

La troisième expérience : Un tuyau de verre de quarante-six pieds dont un bout est ouvert, et l'autre scellé hermétiquement, étant rempli d'eau, ou plutôt de vin bien rouge, pour être plus visible, puis bouché, et élevé en cet état, et porté perpendiculairement à l'horizon, l'ouverture bouchée en bas, dans un vaisseau plein d'eau, et enfoncé dedans environ un pied, si l'on débouche l'ouverture, le vin du tuyau descend jusqu'à une certaine hauteur, qui est environ de trente-deux pieds depuis la surface de l'eau du vaisseau, et se vide et se mêle parmi l'eau du vaisseau, qu'il teint insensiblement, et se désunissant d'avec le haut du verre, laisse un espace d'environ treize pieds vide en apparence, où de même il ne paroît qu'aucun corps ait pu succéder : et si on incline le tuyau, comme alors la hauteur du vin du tuyau devient moindre par cette inclinaison, le vin remonte jusqu'à ce qu'il vienne à la hauteur de trente-deux pieds : et enfin si on l'incline jusqu'à la hauteur de trente-deux pieds, il se remplit entièrement, en ressuçant ainsi autant d'eau qu'il avoit rejeté de vin : si bien qu'on le voit plein de vin depuis le haut jusqu'à treize pieds près du bas, et rempli d'eau teinte insensiblement dans les treize pieds inférieurs qui restent.

Cette expérience est fondée, comme celle du vif-argent, sur la proportion de la pesanteur effective de l'eau, avec la grande légèreté et activité de l'éther dans le tube. Quelques pouces par-dessus deux pieds suffisent pour mettre en équilibre l'éther et le vif-argent; et pour y mettre l'eau et l'éther, l'eau dans le tube doit avoir de hauteur par-dessus la surface de celle qui est dans le vaisseau, trente-deux pieds. Quand cette proportion est ôtée par l'augmentation ou la diminution de la hauteur de l'eau du tuyau par-dessus l'autre partie qui est dans le vaisseau, l'éther descend ou monte, poussant en bas, ou poussé en haut.

§ 16. *Quatrième expérience.*

La quatrième expérience : Un siphon scalène, dont la plus longue jambe est de cinquante pieds, et la plus courte de quarante-cinq, étant rempli d'eau, et les deux ouvertures bouchées étant mises dans deux vaisseaux pleins d'eau, et enfoncées environ d'un pied, en sorte que le siphon soit perpendiculaire à l'horizon, et que la surface de l'eau d'un vaisseau soit plus haute que la surface de l'autre de cinq pieds : si l'on débouche les deux ouvertures, le siphon étant dans cet état, la plus longue jambe n'attire point l'eau de la plus courte, ni par conséquent celle du vaisseau où elle est, contre le sentiment de tous les

philosophes et artisans; mais l'eau descend de toutes les deux jambes dans les deux vaisseaux, jusqu'à la même hauteur que dans le tuyau précédent, en comptant la hauteur depuis la surface de l'eau de chacun des vaisseaux; mais ayant incliné le siphon au-dessous de la hauteur d'environ trente et un pieds, la plus longue jambe attire l'eau qui est dans le vaisseau de la plus courte; et quand on le rehausse au-dessus de cette hauteur, cela cesse, et tous les deux côtés dégorgent chacun dans son vaisseau; et quand on le rabaisse, l'eau de la plus longue jambe attire l'eau de la plus courte comme auparavant.

Cette expérience n'a rien par-dessus la précédente, que l'attraction de l'eau d'une jambe du siphon dans l'autre, qui arrive quand le siphon est incliné au-dessous de la hauteur d'environ trente et un pieds, ce qui n'appartient point aux expériences nouvellement faites. La descente et montée de l'eau par un siphon est une vieille expérience, dont voici la raison fondée sur l'inclination naturelle des parties à leur tout, et du tout à sa place naturelle dans l'univers

§ 17. *Raisonnemens sur les mouvemens de l'eau dans un siphon.*

Les parties d'un tout liquide et fluide par pesanteur comme l'eau, dont la surface libre (c'est-à-dire immédiatement soumise à l'air) soit également distante du centre de la terre, se contre-pèsent tellement, qu'elles sont en repos à leur égard mutuel, et ne font qu'une pesanteur effective de leur tout, qui ne soit pas en sa place naturelle, comme les parties d'un corps solide, roide et pesant, qui se meut par sa gravité naturelle, ne font qu'une pesanteur effective dans une même ligne de direction. Mais si quelque partie de ce tout fluide et pesant est sous une surface plus éloignée du centre que les autres, elle a de la pesanteur effective à leur égard; elle est plus en l'air, et moins en son tout qu'elles : et partant elle descend; elle sort de l'air, elle entre en son tout, et le fait croître jusqu'à l'égalité de surface libre, ne pouvant pas changer par son accroissement les autres parties de la figure, comme il paroît dans l'eau qui est dans un vase, d'où il s'ensuit que les parties plus basses montent à la descente de la plus haute, jusqu'à l'égalité de surface libre, commune aux parties et propre au tout. Ainsi, dans le corps solide mû de sa pesanteur, la partie qui tire le centre de gravité hors de sa ligne de direction, se change et fait changer les autres, les fait monter en descendant, fait croître la pesanteur effective du tout, mettant son centre de gravité dans sa ligne droite au centre de la terre. Si donc les parties d'un tout fluide, comme l'eau, sont en mouvement d'elles-mêmes, et sans y être contraintes par le mouvement d'un corps extérieur, il y en aura dont la surface libre sera plus éloignée du centre que celle des autres, et qui auront la force de pousser les autres jusqu'à l'égalité de surface libre; et celles qui monteront, poussées par les descendantes, pousseront l'air en leur place.

Outre ce mouvement des parties de l'eau, dont les unes poussent et font monter les autres, il s'en trouve encore un de quelque corps différent de l'eau, qui la fait descendre et monter.

Pour entendre ces mouvemens de l'eau par les siphons, je m'en figure de deux sortes : les uns, dont les jambes ouvertes soient vers le haut et la pointe en bas ; les autres, dont les jambes ouvertes sont vers le bas et la pointe en haut. Pour les premiers, je n'y trouve pas de difficulté : l'eau d'une jambe, ayant sa surface plus haute que celle de l'autre, fera monter la plus basse sortant de l'air, entrant dans son tout, le faisant croître jusqu'à l'égalité de surface. Ainsi l'eau monte autant qu'elle descend, faisant d'elle-même un tout homogène sous une même surface libre. L'autre siphon, comme il a plus de mouvement, aussi est-il plus difficile à entendre. Il faut se figurer deux endroits par où cette eau descendante et continue passe : elle est mue par sa pesanteur naturelle et effective ; elle descend donc et passe d'un lieu plus éloigné du centre de la terre à un autre plus voisin : mais passant d'un lieu plus haut au plus bas, elle descend, puis elle monte, et puis elle descend. Les deux endroits où elle se change de descendante en montante, et de montante en descendante, sont aux deux bouts de la jambe courte, où elle entre par le bout d'en bas, et d'où elle sort par le bout d'en haut. Au premier endroit, qui est le bout d'en bas, se trouve une particule d'eau arrêtée par le siphon, qui l'empêche de descendre, et poussée par sa voisine, qui descend et la fait changer de place ; qu'elle ne change pas en descendant, le siphon l'en empêche, ni retournant d'où elle vient, c'est de là qu'elle est poussée ; elle monte donc pressée entre sa suivante et le siphon, et puis repoussée par l'air exprimé d'elle par sa compression ; lequel air, se trouvant entre elle et le siphon solide et immobile, la pousse au lieu plus facile, qui est dans cette rencontre le haut. Ce qui est dit de cette partie doit s'entendre des suivantes, qui prennent incessamment sa place, et la font monter jusqu'à l'endroit d'où elle descend. Si cet endroit est plus haut que la surface libre de toute l'eau qui la pousse, elle n'y montera pas qu'elle n'y soit poussée par quelque autre corps qui pousse toute l'eau vers ce point-là ; comme quand l'eau monte par aspiration, l'air ou autre corps mû par le corps qui aspire, étant poussé, pousse l'eau et la fait monter, depuis le point où elle est poussée par la gravité de la suivante, jusqu'à la pointe du siphon, d'où elle descend par son inclination naturelle, si elle n'est empêchée par l'union naturelle avec les autres, qui soit plus forte que l'autre à descendre, ou faute de place où elle descende. Si ce mouvement continue jusqu'au lieu plus bas que la surface du tout, le mouvement par tout le siphon sera naturel à l'eau, et continuera tant que la surface de cette partie descendante par la plus longue jambe du siphon, sera plus basse que celle de l'eau qui abreuve l'autre plus courte. Je dis que tout ce mouvement est naturel à l'eau, d'autant qu'il se fait à raison de l'union naturelle, quoique diversement : une partie pousse immédiatement, et l'autre par l'entremise d'un corps dont elle prend la place en descendant. L'eau dans laquelle trempe la petite jambe, pousse immédiatement jusqu'à l'égalité de sa surface par ce principe : *Que les parties d'un tout liquide et fluide se rangent par leur pesanteur sous une surface libre du tout, également distante du centre de la terre.* L'eau qui est dans la jambe longue descend par ce principe : *Que toute*

eau qui a sous soi l'air immédiatement, descend par l'air. Deux principes particuliers, tirés des deux universels : *Que la partie est naturellement en son tout*, et : *Que le tout se porte, autant qu'il peut, à sa place naturelle*, qui est à l'eau sous l'air.

Ajoutons à ces principes cette proposition, tirée de l'expérience, et prouvée ci-dessus : *Qu'un corps ne quitte point sa place dans le monde, qu'il n'y en pousse un autre.* D'où se déduit que le tout d'eau qui est en tout le siphon changeant de place, et la quittant par le bout qui termine la plus longue jambe, un autre tout doit succéder; et ce tout est l'air, qui, poussé par l'eau descendante, pousse l'eau du vaisseau, et descend en poussant à même que l'eau qui le pousse descend. Donc tout ce mouvement de l'eau qui coule par le siphon est causé par sa pesanteur naturelle avec l'union de ses parties : il lui est donc naturel.

Or, si une partie de ce tout monte et une autre descend, il faut qu'une autre partie du même tout suive, soit en montant, soit en descendant, ou que ce tout s'arrête, ou bien qu'il se divise en deux par l'interposition d'un autre corps de nature si différente, qu'il ne puisse être une de ses parties. Nous ferons incontinent voir comment et pourquoi ce dernier arrive.

Je considère donc au siphon, dont la pointe est en haut, un tout qui change de place, non-seulement en son total, mais aussi en ses parties, dont les unes montent, les autres descendent; les unes et les autres sont suivies, mais en sorte que celles qui montent, soient suivies et précédées de celles qui descendent, et partant le mouvement de cette eau commence et finit par la descente, et l'une est poussée par l'autre, la plus haute par la plus basse. Les parties qui montent sont poussées par la pesanteur des suivantes, jusqu'à l'égalité de surface avec l'eau, qui les pousse dans la plus courte jambe du siphon; et de là tirées, à raison de l'union naturelle, et poussées aussi du premier au dernier par la pesanteur de l'eau qui descend par la plus longue jambe, jusqu'à la cime du siphon; d'où chaque particule descend, comme balancée et trébuchante, vers l'ouverture de la longue jambe par où l'eau coule.

Considérons donc en cette jambe une partie d'eau, qui fasse équilibre avec celle qui est dans la jambe courte, à pareille distance de l'horizon. Pour maintenir cet équilibre, il est nécessaire que l'union des parties de l'eau soit plus forte à les tenir unies et comme suspendues, que n'est leur pesanteur à les porter en bas et les séparer. Si la pesanteur effective de ces deux parties qui se balancent et contre-pèsent dans le siphon, est plus grande que leur union, la séparation se fera. Si deux poids attachés à un même filet soutenu par une poulie se balançoient également l'un l'autre dans l'air, ils demeureroient suspendus en pareille distance de l'horizon, tant et si longtemps que le filet auroit assez de force pour les tenir en cet état, et résister à leur pesanteur; mais à même que le filet seroit trop foible et se romproit, les deux poids tomberoient, l'un deçà, l'autre delà, s'ils n'étoient retenus d'ailleurs : de même, tandis que l'union des parties de l'eau qui tient en équilibre celles qui sont d'égale pesanteur effective sous la cime du siphon, est assez forte pour empêcher, même dans la rencontre de pesanteur et de

mouvement, leur séparation, l'équilibre demeure, et le mouvement de l'autre partie qui est voisine de l'ouverture de la jambe longue, se fait de haut en bas; et l'équilibre est continué par le mouvement des parties, qui passent de l'ouverture de la jambe courte à l'ouverture de la jambe longue; et ce passage conserve et continue l'équilibre, substituant celle-ci en la place de celles qui le faisoient en coulant et les précédoient: mais sitôt que la pesanteur effective de ces deux parties balancées par leurs poids, et attachées par l'inclination naturelle qu'elles ont à faire un tout, est plus forte que cette union, l'une coule d'un côté et l'autre de l'autre, si elles ne sont arrêtées d'ailleurs.

§ 18. *Pourquoi l'eau ne descend pas plus bas que trente-deux pieds.*

Ce qui arrive quand la pesanteur effective passe trente-deux pieds; car elle surmonte l'union de ces deux parties, et partant elles descendent, l'une deçà, l'autre delà, suivies de quelque autre corps poussé en leur place par leur pesanteur et mouvement; et ce corps est l'éther, ce composé d'air subtil et d'esprits solaires ou ignés, séparé et tiré de l'air que nous respirons, et tiré de son mélange naturel au monde (c'est-à-dire, pour le bien du monde), par la pesanteur effective de l'eau qui la fait changer de place, et prendre celle du corps qu'elle pousse en la sienne, qui est du premier au dernier l'éther. Si la résistance à quitter sa place qu'a le corps, qui devroit être poussé par l'eau descendant en la place qu'elle abandonneroit, est plus grande que la vertu mouvante de l'eau qui, sans cette résistance, changeroit de place, tout demeure, il n'y a ni changement de place ni pulsion. Mais si la pesanteur de l'eau est plus forte, et que l'union de ses parties, et que la résistance du corps qui doit être poussé à quitter sa place, l'eau descendra et se divisera: c'est pourquoi la pesanteur de l'eau par-dessus trente-deux pieds dans le siphon la fait descendre et prendre la place du corps qu'elle pousse en la sienne, qui est du premier au dernier l'éther, pas un autre corps ne pouvant, dans cette rencontre, prendre la place de l'eau descendant dans le siphon. Mais si la pesanteur de l'eau est moindre que la résistance de l'autre corps qu'elle devroit pousser en sa place à quitter la sienne, elle ne descendra pas; et si la légèreté de l'éther est moindre que la résistance du corps dont il devroit prendre la place, en le poussant immédiatement ou médiatement en la sienne, il ne montera pas. En cette rencontre, qui se trouve à trente-deux pieds de l'eau qui est dans le tube, par-dessus celle qui est dans le vaisseau, rien ne monte, rien ne descend: l'eau ne descend pas, empêchée par l'éther, qui devroit prendre sa place, et ne peut à cause de sa légèreté. L'éther ne monte pas, l'eau ne pouvant prendre sa place à raison de sa pesanteur. De ce discours, il est facile de répondre aux questions qu'on fait sur le mouvement de l'eau qui coule par le siphon.

La première: Pourquoi l'eau qui est dans la jambe courte monte jusqu'à la pointe du siphon? Réponse: Parce qu'elle y est tirée et poussée par celle qui est dans la jambe longue.

La deuxième: Pourquoi y est-elle tirée et poussée? Réponse: Elle y

est tirée, parce que l'eau de la jambe longue descend en bas, et en descendant tire après soi l'autre qui lui est unie; elle y est poussée, d'autant que l'eau de la jambe longue en descendant prend la place de l'air, et l'air poussé pousse l'eau qui est dans le vaisseau, et celle-ci pousse l'eau qui est dans la petite jambe.

La troisième : Pourquoi l'eau qui est dans la jambe longue descend-elle plutôt que celle qui est dans la courte ? Réponse : D'autant que sa pesanteur effective est plus grande.

La quatrième : Pourquoi sa pesanteur effective est-elle plus grande ? Réponse : Parce que sa longueur de surface contrainte perpendiculaire à l'horizon est plus grande que celle de l'eau, qui est depuis la surface libre jusqu'au haut du siphon.

La cinquième : Pourquoi cette longueur est-elle plus grande ? Réponse : Il y a plus loin de la pointe du siphon jusqu'à l'ouverture de la jambe longue, que de la surface libre à la pointe du siphon, et plus grande est cette longueur de surface contrainte perpendiculaire à l'horizon, plus grande est la gravité mouvante, comme l'expérience nous l'apprend, et la raison qui nous montre une ligne de direction, qui est la mesure de la gravité mouvante, plus grande en un corps fluide, pesant, continu et de même nature. Voilà où nous a portés cette expérience du siphon scalène, qui est la quatrième de M. Pascal le fils; venons maintenant à la cinquième.

§ 19. *Cinquième expérience.*

Si l'on met une corde de près de quinze pieds avec un fil attaché au bout (laquelle on laisse longtemps dans l'eau, afin que, s'imbibant peu à peu, l'air qui pourroit y être enclos en sorte), dans un tuyau de quinze pieds, scellé par un bout comme dessus, et rempli d'eau, de façon qu'il n'y ait hors du tuyau que le fil attaché à la corde, afin de l'en tirer, et l'ouverture ayant été mise dans du vif-argent : quand on tire la corde peu à peu, le vif-argent monte à proportion, jusqu'à ce que la hauteur du vif-argent, jointe à la quatorzième partie de la hauteur qui reste d'eau, soit de deux pieds trois pouces : car après, quand on tire la corde, l'eau quitte le haut du verre, et laisse un espace vide en apparence, qui devient d'autant plus grand que l'on tire la corde davantage; que si on incline le tuyau, le vif-argent du vaisseau y rentre, en sorte que si on l'incline assez il se trouve tout plein de vif-argent et d'eau qui frappe le haut du tuyau avec violence, faisant le même bruit et le même éclat que s'il cassoit le verre, qui court risque de se casser en effet : et pour ôter le soupçon de l'air, que l'on pourroit dire être demeuré dans la corde, on fait la même expérience avec quantité de petits cylindres de bois, attachés les uns aux autres avec du fil de laiton.

§ 20 *Raison de cette expérience.*

Cette expérience de la corde s'entend assez bien, si nous disons qu'à même qu'elle sort du tuyau, elle pousse l'eau et lui fait prendre sa place, et n'ayant point d'autre corps contigu plus facile à prendre la

sienne que le vif-argent, elle la fait monter jusqu'à la hauteur nécessaire à l'égalité de résistance entre l'air, qui est autour du tuyau, et les corps dont il est rempli, à se quitter la place les uns aux autres : si vous tirez davantage la corde hors du tuyau, vous ôtez la proportion, et vous rendez la pesanteur des corps qu'il contient plus forte à changer de place et pousser, que l'air qui est dehors à résister; partant il cède, s'épure, se subtilise, devient éther, passe à travers les pores du verre, et prend la place du corps descendant. Si vous inclinez le tube, le vif-argent perdant une partie de sa pesanteur effective, n'étant plus si haut par-dessus les autres parties de son tout, cède à la légèreté de l'éther qui monte, pousse en bas l'air qui est autour du tuyau, et cet air, poussé en bas, pousse le corps voisin en la place de l'éther; si vous l'inclinez beaucoup, l'éther pousse tellement par sa grande légèreté, qu'il fait frapper le corps qui est dans le tube contre le haut du tuyau.

§ 21. *Sixième expérience.*

La sixième expérience : Une seringue avec un piston parfaitement juste, étant mise dans le vif-argent, en sorte que son ouverture y soit enfoncée pour le moins d'un pouce, et que le reste de la seringue soit élevé perpendiculairement au dehors : si l'on retire le piston, la seringue demeurant en cet état, le vif-argent entrant par l'ouverture de la seringue, monte et demeure uni au piston, jusqu'à ce qu'il soit élevé dans la seringue deux pieds trois pouces : mais après cette hauteur, si l'on retire davantage le piston, il n'attire pas le vif-argent plus haut, qui, demeurant toujours à cette hauteur de deux pieds trois pouces, quitte le piston : de sorte qu'il se fait un espace vide en apparence, qui devient d'autant plus grand, que l'on tire le piston davantage · il est vraisemblable que la même chose arrive dans une pompe par aspiration, et que l'eau n'y monte que jusqu'à la hauteur de trente et un pieds, qui répond à celle de deux pieds trois pouces de vif-argent. Et ce qui est plus remarquable, c'est que la seringue pesée en cet état sans la retirer du vif-argent, ni la bouger en aucune façon, pèse autant (quoique l'espace vide en apparence soit si petit que l'on voudra) que quand, en retirant le piston davantage, on le fait si grand qu'on voudra; et qu'elle pèse toujours autant que le corps de la seringue avec le vif-argent qu'elle contient de la hauteur de deux pieds trois pouces, sans qu'il y ait encore aucun espace vide en apparence; c'est-à-dire, lorsque le piston n'a pas encore quitté le vif-argent de la seringue, mais qu'il est prêt à s'en désunir, si on le tire tant soit peu. De sorte que l'espace vide en apparence, quoique tous les corps qui l'environnent tendent à le remplir, n'apporte aucun changement à son poids; et quelque différence de grandeur qu'il y ait entre ces espaces, il n'y en a aucune entre les poids.

Cette expérience est une confirmation de ce qui a été dit jusqu'à présent, et n'a rien de nouveau que le même poids de la seringue, avec un petit et grand espace d'éther, qui ne pèse point et ne change pas le poids. Sa légèreté ne paroît qu'au mouvement, et n'est pas sensible en ce poids qu'on fait de la seringue

§ 22. *Septième expérience.*

La septième expérience : Ayant rempli un siphon de vif-argent, dont la plus longue jambe a dix pieds, et l'autre neuf et demi, et mis les deux ouvertures dans deux vaisseaux de vif-argent, enfoncées environ d'un pouce chacune, en sorte que la surface du vif-argent de l'un soit plus haute de demi-pied que la surface du vif-argent de l'autre : quand le siphon est perpendiculaire, la plus longue jambe n'attire pas le vif-argent de la plus courte; mais le vif-argent, se rompant par le haut, descend dans chacune des jambes, et regorge dans les vaisseaux, et tombe jusqu'à la hauteur ordinaire de deux pieds trois pouces, depuis la surface du vif-argent de chaque vaisseau : que si on incline le siphon, le vif-argent des vaisseaux remonte dans les jambes, les remplit et commence de couler de la jambe la plus courte dans la plus longue, et ainsi vide son vaisseau; car cette inclinaison dans les tuyaux où est ce vide apparent, lorsqu'ils sont dans quelque liqueur, attire toujours les liqueurs des vaisseaux, si les ouvertures des tuyaux ne sont point bouchées; ou attire le doigt, s'il bouche ces ouvertures.

Cette expérience est la même que la quatrième; elle change seulement l'eau en vif-argent.

§ 23. *Huitième expérience*

La huitième expérience : Le même siphon étant rempli d'eau entièrement, et ensuite d'une corde, comme ci-dessus, les deux ouvertures étant aussi mises dans les deux mêmes vaisseaux de vif-argent, quand on tire la corde par une de ces ouvertures, le vif-argent monte des vaisseaux dans toutes les deux jambes : en sorte que la quatorzième partie de la hauteur de l'eau d'une jambe avec la hauteur du vif-argent qui y est monté, est égale à la quatorzième partie de la hauteur de l'eau de l'autre, jointe à la hauteur du vif-argent qui y est monté; ce qui arrivera tant que cette quatorzième partie de la hauteur de l'eau, jointe à la hauteur du vif-argent dans chaque jambe, soit de la hauteur de deux pieds trois pouces; car après l'eau se divisera par le haut, et il s'y trouvera un vide apparent.

Cette expérience a si grand rapport avec la cinquième, que qui a l'intelligence et la raison de l'une, l'a de l'autre.

Tout ce discours est une confirmation de l'opinion commune, que dans le monde il n'y a point de vide. Tous les corps, en tant que corps, s'y entre-touchent pour faire un tout plein et parfait. La diversité des formes substantielles et matérielles, causées par l'union et proportion du rare et du dense, comme les tableaux et images, par l'union et proportion du blanc et du noir, n'empêche pas cette union corporelle.

Et parce que nous avons parlé souvent, en ce petit traité, du rare et du dense, et que la différence des deux semble moins connue à quelques-uns, je mettrai, pour la conclusion de ce petit ouvrage, une hypothèse possible et probable pour aider cette connoissance.

Présupposons donc, par manière de simple hypothèse, que Dieu, voulant faire le monde, ait créé une masse de corps extrêmement rare,

plus ample que n'est tout ce grand monde; que cette masse, par sa mobilité et fluidité consécutive à sa rareté, soit réduite à un globe qui soit l'espace du monde. Le mouvement, qui resserre à cette capacité et figure toute cette masse, aura fait une différence entre les parties qui seront vers la circonférence et celles qui seront vers le centre, celles-ci étant beaucoup plus serrées que celles-là. Disons ensuite que ces parties conservent cet état sans le changer dans le monde, et divisons tout ce globe en quatre parties concentriques, dont l'intérieure soit la terre la plus dense, la plus consistante, la moins rare, la moins fluide et la moins mobile de toutes; celle d'après, soit l'eau, dense à proportion; la troisième, soit l'air; et la quatrième, l'éther, ou le feu élémentaire. Que ces parties soient la matière du monde, inaltérable et incorruptible; que leur mélange serve à tous les composés mixtes qui s'y retrouvent; ainsi conséquemment des corps matériels. Voilà une différence claire entre le rare et le dense, qui peut servir de principe à la physique, prouve le plein, et servira de fin à ce discours.

LETTRE DE PASCAL A M. LE PAILLEUR,

AU SUJET DU P. NOËL, JÉSUITE.

Monsieur,

Puisque vous désirez de savoir ce qui m'a fait interrompre le commerce de lettres où le R. P. Noël m'avoit fait l'honneur de m'engager, je veux vous satisfaire promptement; et je ne doute pas que, si vous avez blâmé mon procédé avant que d'en savoir la cause, vous ne l'approuviez lorsque vous saurez les raisons qui m'ont retenu.

La plus forte raison de toutes est que le R. P. Talon, lorsqu'il prit la peine de m'apporter la dernière lettre du P. Noël, me fit entendre, en présence de trois de vos bons amis, que le P. Noël compatissoit à mon indisposition, qu'il craignoit que ma première lettre n'eût intéressé ma santé, et qu'il me prioit de ne pas la hasarder par une deuxième; en un mot, de ne pas lui répondre; que nous pourrions nous éclaircir de bouche des difficultés qui nous restoient, et qu'au reste il me prioit de ne montrer sa lettre à personne; que comme il ne l'avoit écrite que pour moi, il ne souhaitoit pas qu'aucun autre la vît, et que les lettres étant choses particulières, elles souffroient quelque violence quand elles n'étoient pas secrètes.

J'avoue que si cette proposition me fût venue d'une autre part que de celle de ces bons pères, elle m'auroit été suspecte, et j'eusse craint que celui qui me l'eût faite n'eût voulu se prévaloir d'un silence où il m'auroit engagé par une prière captieuse. Mais je doutai si peu de leur sincérité, que je leur promis tout sans réserve et sans crainte, avec un soin très-particulier. C'est de là que plusieurs personnes, et même de ces pères, qui n'étoient pas bien informées de l'intention du P. Noël, ont pris sujet de dire qu'ayant trouvé dans sa lettre la ruine de mes sentimens, j'en ai dissimulé les beautés, de peur de découvrir ma honte, et que ma seule foiblesse m'a empêché de lui repartir.

Voyez, monsieur, combien cette conjecture m'étoit contraire, puisque je n'ai pu cacher la lettre du P. Noël sans désavantage, ni la publier sans infidélité; et que mon honneur étoit également menacé par ma réponse et par mon silence, en ce que l'une trahissoit ma promesse, et l'autre mon intérêt.

Cependant j'ai gardé religieusement ma parole; et j'avois remis de repartir à sa lettre dans le traité où je dois répondre précisément à toutes les objections qu'on a faites contre cette proposition que j'ai avancée dans mon abrégé, que l'espace vide en apparence n'est plein d'aucune des matières qui tombent sous les sens, et qui sont connues dans la nature. Ainsi j'ai cru que rien ne m'obligeoit de précipiter ma réponse, que je voulois rendre plus exacte, en la différant pour un temps. A ces considérations, je joins que, comme tous les différends de cette sorte demeurent éternels si quelqu'un ne les interrompt, et qu'ils ne peuvent être achevés si l'une des deux parties ne commence à finir, j'ai cru que l'âge, le mérite et la condition du P. Noël m'obligeoient à lui céder l'avantage d'avoir écrit le dernier sur ce sujet. Mais outre toutes ces raisons, j'avoue que sa lettre seule suffisoit pour me dispenser de lui répondre, et je m'assure que vous trouverez qu'elle semble avoir été exprès conçue en termes qui ne m'obligeoient point à lui repartir.

Pour le montrer, je vous ferai remarquer les points qu'il a traités, mais par un ordre différent du sien, et tel qu'il eût choisi, sans doute, dans un ouvrage plus travaillé, mais qu'il n'a pas jugé nécessaire dans la naïveté d'une lettre; car chacun de ces points se trouve épars dans tout le corps de son discours, et couché presque en toutes ses parties.

Il a dessein de déclarer que ma lettre lui a fait quitter son premier sentiment, sans qu'il puisse néanmoins s'accommoder au mien. Tellement que nous pouvons considérer sa lettre comme divisée en deux parties, dont l'une contient les choses qui l'empêchent de suivre ma pensée, et l'autre celles qui appuient son second sentiment. C'est sur chacune de ces parties que j'espère vous faire voir combien peu j'étois obligé de répondre.

Pour la première, qui regarde les choses qui l'éloignent de mon opinion, ses premières difficultés sont que cet espace ne peut être autre chose qu'un corps, puisqu'il soutient et transmet la lumière, et qu'il retarde le mouvement d'un autre corps. Mais je croyois lui avoir assez montré, dans ma lettre, le peu de force de ces mêmes objections que sa première contenoit; car je lui ai dit en termes assez clairs, qu'encore que des corps tombent avec le temps dans cet espace, et que la lumière le pénètre, on ne doit pas attribuer ces effets à une matière qui le remplisse nécessairement, puisqu'ils peuvent appartenir à la nature du mouvement et de la lumière, et que, tant que nous demeurerons dans l'ignorance où nous sommes de la nature de ces choses, nous ne devons en tirer aucune conséquence; car elle ne seroit appuyée que sur l'incertitude; et comme le P. Noël conclut de l'apparence de ces effets qu'une matière remplit cet espace qui soutient la lumière et cause ce retardement, on peut, avec autant de raison, conclure de ces mêmes effets que la lumière se soutient dans le vide, et que le mouvement s'y fait

avec le temps; vu que tant d'autres choses favorisoient cette dernière opinion, qu'elle étoit, au jugement des savans, sans comparaison plus vraisemblable que l'autre, avant même qu'elle reçût les forces que ces expériences lui ont apportées.

Mais s'il a montré en cela d'avoir peu remarqué cette partie de ma lettre, il témoigne n'en avoir pas entendu une autre, par la seconde des choses qui le choque dans mon sentiment; car il m'impute une pensée contraire aux termes de ma lettre et de mon imprimé, et entièrement opposée au fondement de toutes mes maximes. C'est qu'il se figure que j'ai assuré, en termes décisifs, l'existence réelle de l'espace vide : et sur cette imagination, qu'il prend pour une vérité constante, il exerce sa plume pour montrer la foiblesse de cette assertion.

Cependant il a pu voir que j'ai mis dans mon imprimé, que ma conclusion est simplement que mon sentiment sera que cet espace est vide, jusqu'à ce que l'on m'ait montré qu'une matière le remplit; ce qui n'est pas une assertion réelle du vide. Il a pu voir aussi que j'ai mis dans ma lettre ces mots qui me semblent assez clairs : « Enfin, mon révérend père, considérez, je vous prie, que tous les hommes ensemble ne sauroient démontrer qu'aucun corps succède à celui qui quitte l'espace vide en apparence, et qu'il n'est pas possible encore à tous les hommes de montrer que, quand l'eau y remonte, quelque corps en soit sorti. Cela ne suffiroit-il pas, suivant vos maximes, pour assurer que cet espace est vide? Cependant je dis simplement que mon sentiment est qu'il est vide. Jugez si ceux qui parlent avec tant de retenue d'une chose où ils ont droit de parler avec tant d'assurance, pourront faire un jugement décisif de l'existence de cette matière ignée, si douteuse et si peu établie. »

Aussi je n'aurois jamais imaginé ce qui lui avoit fait naître cette pensée, s'il ne m'en avertissoit lui-même dans la première page, où il rapporte fidèlement la distinction que j'ai donnée de l'espace vide dans ma lettre, qui est telle : « Ce que nous appelons espace vide, est un espace ayant longueur, largeur et profondeur, immobile, capable de recevoir et de contenir un corps de pareille longueur et figure; et c'est ce qu'on appelle *solide* en géométrie, où l'on ne considère que les choses abstraites et immatérielles. » Après avoir rapporté mot à mot cette définition, il en tire immédiatement cette conséquence : « Voilà, monsieur, votre pensée de l'espace vide fort bien expliquée; je veux croire que tout cela vous est évident, et en avez l'esprit convaincu et pleinement satisfait, puisque vous l'affirmez. »

S'il n'avoit pas rapporté mes propres termes, j'aurois cru qu'il ne les avoit pas bien lus, ou qu'ils avoient été mal écrits, et qu'au lieu du premier mot, *j'appelle*, il auroit trouvé celui-ci, *j'assure;* mais puisqu'il a rapporté ma période entière, il ne me reste qu'à penser qu'il conçoit une conséquence nécessaire de l'un de ces termes à l'autre, et qu'il ne met point de différence entre définir une chose et assurer son existence.

C'est pourquoi il a cru que j'ai assuré l'existence réelle du vide, par les termes mêmes dont je l'ai défini. Je sais que ceux qui ne sont pas accoutumés de voir les choses traitées dans le véritable ordre, se figurent

qu'on ne peut définir une chose sans être assuré de son être; mais ils devroient remarquer que l'on doit toujours définir les choses, avant que de chercher si elles sont possibles ou non, et que les degrés qui nous mènent à la connoissance des vérités, sont la définition, l'axiome et la preuve: car d'abord nous concevons l'idée d'une chose; ensuite nous donnons un nom à cette idée, c'est-à-dire que nous la définissons; et enfin nous cherchons si cette chose est véritable ou fausse. Si nous trouvons qu'elle est impossible, elle passe pour une fausseté; si nous démontrons qu'elle est vraie, elle passe pour vérité; et tant qu'on ne peut prouver sa possibilité ni son impossibilité, elle passe pour imagination. D'où il est évident qu'il n'y a point de liaison nécessaire entre la définition d'une chose et l'assurance de son être; et que l'on peut aussi bien définir une chose impossible, qu'une véritable. Ainsi l'on peut appeler un triangle rectiligne et rectangle celui qu'on s'imagineroit avoir deux angles droits, et montrer ensuite qu'un tel triangle est impossible : ainsi Euclide définit d'abord les parallèles, et montre après qu'il peut y en avoir; ainsi la définition du cercle précède le *postulatum* qui en propose la possibilité; ainsi les astronomes ont donné des noms aux cercles concentriques, excentriques, etc., qu'ils ont imaginés dans les cieux, sans être assurés que les astres décrivent en effet de tels cercles par leurs mouvemens; ainsi les péripatéticiens ont donné un nom à cette sphère du feu, dont il seroit difficile de démontrer la vérité.

C'est pourquoi quand je me suis voulu opposer aux décisions du P. Noël, qui excluoient le vide de la nature, j'ai cru ne pouvoir entrer dans cette recherche, ni même en dire un mot, avant que d'avoir déclaré ce que j'entends par le mot de *vide*, où je me suis senti plus obligé, par quelques endroits de la première lettre de ce père, qui me faisoient juger que la notion qu'il en avoit n'étoit pas conforme à la mienne. J'ai vu qu'il ne pouvoit distinguer les dimensions d'avec la matière ni l'immatérialité d'avec le néant; et que cette confusion lui faisoit conclure que, quand je donnois à cet espace la longueur, la largeur et la profondeur, je m'engageois à dire qu'il étoit un corps; et qu'aussitôt que je le faisois immatériel, je le réduisois au néant. Pour débrouiller toutes ces idées, je lui en ai donné cette définition, où il peut voir que la chose que nous concevons et que nous exprimons par le mot d'*espace vide*, tient le milieu entre la matière et le néant, sans participer ni à l'un ni à l'autre; qu'il diffère du néant par ses dimensions; et que son irrésistance et son immobilité le distinguent de la matière : tellement qu'il se maintient entre ces deux extrêmes, sans se confondre avec aucun des deux.

Vers la fin de sa lettre, le P. Noël ramasse dans une période toutes ses difficultés, pour leur donner plus de force en les joignant. Voici ses termes : « Cet espace qui n'est ni Dieu, ni créature, ni corps, ni esprit, ni substance, ni accident, qui transmet la lumière sans être transparent, qui résiste sans résistance, qui est immobile et se transporte avec le tube, qui est partout et nulle part, qui fait tout et ne fait rien : ce sont les admirables qualités de l'espace vide: en tant qu'espace, il

est et fait merveilles; en tant que vide, il n'est et ne fait rien; en tant qu'espace, il est long, large et profond; en tant que vide, il exclut la longueur, la largeur et la profondeur. S'il est besoin, je montrerai toutes ces belles propriétés, en conséquence de l'espace vide. »

Comme une grande suite de belles choses devient enfin ennuyeuse par sa propre longueur, je crois que le P. Noël s'est ici lassé d'en avoir tant produit; et que, prévoyant un pareil ennui à ceux qui les auroient vues, il a voulu descendre d'un style plus grave dans un moins sérieux, pour les délasser par cette raillerie, afin qu'après leur avoir fourni tant de choses qui exigeoient une admiration pénible, il leur donnât, par charité, un sujet de divertissement. J'ai senti le premier l'effet de cette bonté; et ceux qui verront sa lettre ensuite, l'éprouveront de même : car il n'y a personne qui, après avoir lu ce que je lui avois écrit, ne rie des conséquences qu'il en tire, et de ces antithèses opposées avec tant de justesse, qu'il est aisé de voir qu'il s'est bien plus étudié à rendre ses termes contraires les uns aux autres, que conformes à la raison et à la vérité.

Car pour examiner ses objections en particulier, *cet espace*, dit-il, *n'est ni Dieu*, *ni créature*. Les mystères qui concernent la Divinité sont trop saints pour les profaner par nos disputes; nous devons en faire l'objet de nos adorations, et non pas le sujet de nos entretiens : si bien que, sans en discourir en aucune sorte, je me soumets entièrement à ce qu'en décideront ceux qui ont droit de le faire.

Ni corps, *ni esprit*. Il est vrai que l'espace n'est ni corps, ni esprit; mais il est espace : ainsi le temps n'est ni corps, ni esprit; mais il est temps : et comme le temps ne laisse pas d'être, quoiqu'il ne soit aucune de ces choses, ainsi l'espace vide peut bien être, sans pour cela être ni corps, ni esprit.

Ni substance, *ni accident*. Cela sera vrai, si l'on entend par le mot de *substance* ce qui est corps ou esprit; car, en ce sens, l'espace ne sera ni substance, ni accident; mais il sera espace, comme, en ce même sens, le temps n'est ni substance, ni accident; mais il est temps, parce que pour être, il n'est pas nécessaire d'être substance ou accident : comme plusieurs de leurs pères soutiennent que Dieu n'est ni l'un ni l'autre, quoiqu'il soit le souverain Être.

Qui transmet la lumière sans être transparent. Ce discours a si peu de lumière, que je ne puis l'apercevoir : car je ne comprends pas quel sens ce père donne à ce mot *transparent*, puisqu'il trouve que l'espace vide ne l'est pas. S'il entend par la transparence, comme tous les opticiens, la privation de tout obstacle au passage de la lumière, je ne vois pas pourquoi il en frustre notre espace, qui la laisse passer librement : si bien que parlant sur ce sujet avec mon peu de connoissance, je lui eusse dit que ces termes, *transmet la lumière*, qui ne sont propres qu'à sa façon d'imaginer la lumière, ont le même sens que ceux-ci : *laisse passer la lumière;* et qu'*il est transparent* veut dire, qu'il ne lui porte point d'obstacle : en quoi je ne trouve point d'absurdité ni de contradiction.

Il résiste sans résistance. Comme le P. Noël ne juge de la résistance

de cet espace que par le temps que les corps y emploient dans leurs mouvemens, et que nous avons tant discouru sur la nullité de cette conséquence, on verra qu'il n'a pas raison de dire qu'il résiste : et il se trouvera, au contraire, que cet espace ne résiste point ou qu'il est sans résistance, où je ne vois rien que de très-conforme à la raison.

Qui est immuable et qui se transporte avec le tube. Ici le P. Noël montre combien peu il pénètre dans le sentiment qu'il veut réfuter; et j'aurois à le prier de remarquer sur ce sujet, que quand un sentiment est embrassé par plusieurs personnes savantes, on ne doit pas faire d'estime des objections qui semblent le ruiner, quand elles sont très-faciles à prévoir, parce qu'on doit croire que ceux qui le soutiennent y ont déjà pris garde, et qu'étant facilement découvertes, ils en ont trouvé la solution, puisqu'ils continuent dans cette pensée. Or, pour examiner cette difficulté en particulier, si ces antithèses ou contrariétés n'avoient autant ébloui son esprit que charmé ses imaginations, il auroit pris garde sans doute que, quoi qu'il en paroisse, le vide ne se transporte pas avec le tuyau, et que l'immobilité est aussi naturelle à l'espace que le mouvement l'est au corps. Pour rendre cette vérité évidente, il faut remarquer que l'espace, en général, comprend tous les corps de la nature, dont chacun en particulier en occupe une certaine partie; mais qu'encore qu'ils soient tous mobiles, l'espace qu'ils remplissent ne l'est pas car quand un corps est mû d'un lieu à l'autre, il ne fait que changer de place, sans porter avec soi celle qu'il occupoit au temps de son repos En effet, que fait-il autre chose que de quitter sa première place immobile, pour en prendre successivement d'autres aussi immobiles? Mais celle qu'il a laissée, demeure toujours ferme et inébranlable : si bien qu'elle devient, ou pleine d'un autre corps, si quelqu'un lui succède, ou vide, si pas un ne s'offre pour y succéder; mais, soit vide ou plein, toujours dans un pareil repos, ce vaste espace, dont l'amplitude embrasse tout, est aussi stable et immobile en chacune de ses parties, comme il l'est en son total. Ainsi je ne vois pas comment le P. Noël a pu prétendre que le tuyau communique son mouvement à l'espace vide, puisque n'ayant nulle consistance pour être poussé, n'ayant nulle prise pour être tiré, et n'étant susceptible, ni de la pesanteur, ni d'aucune des facultés attractives, il est visible qu'on ne peut le faire changer. Ce qui l'a trompé est que, quand on a porté le tuyau d'un lieu à un autre, il n'a vu aucun changement au dedans; c'est pourquoi il a pensé que cet espace étoit toujours le même, parce qu'il étoit toujours pareil à lui-même. Mais il devoit remarquer que l'espace que le tuyau enferme dans une situation, n'est pas le même que celui qu'il comprend dans la seconde; et que dans la succession de son mouvement, il acquiert continuellement de nouveaux espaces : si bien que celui qui étoit vide dans la première des suppositions devient plein d'air, quand il en part pour prendre la seconde, dans laquelle il rend vide l'espace qu'il rencontre, au lieu qu'il étoit plein d'air auparavant; mais l'un et l'autre de ces espaces alternativement pleins et vides demeurent toujours également immobiles. D'où il est évident qu'il est hors de propos de croire que l'espace vide change de lieu; et ce qui est le plus étrange est que la

matière dont le père le remplit est telle, que, suivant son hypothèse même, elle ne sauroit se transporter avec le tuyau; car comme elle entreroit et sortiroit par les pores du verre avec une facilité tout entière, sans lui adhérer en aucune sorte, comme l'eau dans un vaisseau percé de toutes parts, il est visible qu'elle ne se porteroit pas avec lui, comme nous voyons que ce même tuyau ne transporte pas la lumière, parce qu'elle le perce sans peine et sans engagemens, et que notre espace même exposé au soleil, change de rayons quand il change de place, sans porter avec soi, dans sa seconde place, la lumière qui le remplissoit dans la première, et que, dans les différentes situations, il reçoit des rayons différens, aussi bien que des espaces divers.

Enfin, le P. Noël s'étonne qu'*il fasse tout et ne fasse rien; qu'il soit partout et nulle part; qu'il soit et fasse merveilles, bien qu'il ne soit point; qu'il ait des dimensions sans en avoir*. Si ce discours a du sens, je confesse que je ne le comprends pas; c'est pourquoi je ne me tiens pas obligé d'y répondre.

Voilà, monsieur, quelles sont les difficultés et les choses qui choquent le P. Noël dans mon sentiment; mais comme elles témoignent plutôt qu'il n'entend pas ma pensée, que non pas qu'il la contredise, et qu'il semble qu'il y trouve plutôt de l'obscurité que des défauts, j'ai cru qu'il en trouveroit l'éclaircissement dans ma lettre, s'il prenoit la peine de la voir avec plus d'attention; et qu'ainsi je n'étois pas obligé de lui répondre, puisqu'une seconde lecture suffiroit pour résoudre les doutes que la première auroit fait naître.

Pour la deuxième partie de sa lettre, qui regarde le changement de sa première pensée et l'établissement de la seconde, il déclare d'abord le sujet qu'il a de nier le vide. La raison qu'il en rapporte est que ce vide ne tombe sous aucun des sens; d'où il prend sujet de dire que, comme je nie l'existence de la matière, par cette seule raison qu'elle ne donne aucune marque sensible de son être, et que l'esprit n'en conçoit aucune nécessité, il peut, avec autant de force et d'avantage, nier le vide, parce qu'il a cela de commun avec elle, que pas un des sens ne l'aperçoit. Voici ses termes : « Nous disons qu'il y a de l'eau, parce que nous la voyons et la touchons; nous disons qu'il y a de l'air dans un ballon enflé, parce que nous sentons la résistance; qu'il y a du feu, parce que nous sentons la chaleur; mais le vide véritable ne touche aucun sens. »

Mais je m'étonne qu'il fasse un parallèle de choses si inégales, et qu'il n'ait pas pris garde que, comme il n'y a rien de si contraire à l'être que le néant, ni à l'affirmation que la négation, on procède aux preuves de l'un et de l'autre par des moyens contraires; et que ce qui fait l'établissement de l'un est la ruine de l'autre. Car que faut-il pour arriver à la connoissance du néant, que de connoître une entière privation de toutes sortes de qualités et d'effets; au lieu que, s'il en paroissoit un seul, on concluroit, au contraire, l'existence réelle d'une cause qui le produiroit?

Ensuite il dit : « Voyez, monsieur, lequel de nous deux est le plus croyable, ou vous qui affirmez un espace qui ne tombe point sous les sens, et qui ne sert ni à l'art ni à la nature, et ne l'employez que pour décider une question fort douteuse, etc. »

Mais, monsieur, je vous laisse à juger, lorsqu'on ne voit rien, et que les sens n'aperçoivent rien dans un lieu, lequel est mieux fondé, ou de celui qui affirme qu'il y a quelque chose, quoiqu'il n'aperçoive rien, ou de celui qui pense qu'il n'y a rien, parce qu'il ne voit aucune chose.

Après que le P. Noël a déclaré, comme nous venons de le voir, la raison qu'il a d'exclure le vide, et qu'il a pris sujet de le nier sur cette même privation de qualités qui donne si justement lieu aux autres de le croire, et qui est le seul moyen sensible de parvenir à sa preuve, il entreprend maintenant de montrer que c'est un corps. Pour cet effet, il s'est imaginé une définition du corps qu'il a conçue exprès, en sorte qu'elle convienne à notre espace, afin qu'il pût en tirer sa conséquence avec facilité. Voici ses termes : « Je définis le corps ce qui est composé de parties les unes hors les autres, et dis que tout corps est espace, quand on le considère entre les extrémités, et que tout espace est corps, parce qu'il est composé de parties les unes hors les autres. »

Mais il n'est pas ici question, pour montrer que notre espace n'est pas vide, de lui donner le nom de corps, comme le P. Noël a fait, mais de montrer que c'est un corps, comme il a prétendu faire. Ce n'est pas qu'il ne lui soit permis de donner à ce qui a des parties les unes hors les autres, tel nom qu'il lui plaira; mais il ne tirera pas grand avantage de cette liberté; car le mot de *corps*, par le choix qu'il en a fait, devient équivoque : si bien qu'il y aura deux sortes de choses entièrement différentes, et même hétérogènes, que l'on appellera *corps :* l'une, ce qui a des parties les unes hors les autres; car on l'appellera *corps*, suivant le P. Noël; l'autre, une substance matérielle, mobile et impénétrable; car on l'appellera *corps* dans l'ordre. Mais il ne pourra pas conclure de cette ressemblance de nom, une ressemblance de propriétés entre ces choses, ni montrer, par ce moyen, que ce qui a des parties les unes hors les autres, soit la même chose qu'une substance matérielle, immobile et impénétrable, parce qu'il n'est pas en son pouvoir de les faire convenir de nature aussi bien que de nom. De même que s'il avoit donné à ce qui a des parties les unes hors les autres, le nom d'*eau*, d'*esprit*, de *lumière*, comme il auroit pu faire aussi aisément que celui de *corps*, il n'en auroit pu conclure que notre espace fût aucune de ces choses : ainsi quand il a nommé *corps* ce qui a des parties les unes hors les autres, et qu'il dit en conséquence de cette définition, *je dis que tout espace est corps*, on doit prendre le mot de *corps* dans le sens qu'il vient de lui donner : de sorte que, si nous substituons la définition à la place du défini, ce qui peut toujours se faire sans altérer le sens d'une proposition, il se trouvera que cette conclusion, que tout espace est corps, n'est autre chose que celle-ci : que tout espace a des parties les unes hors les autres; mais non pas que tout espace est matériel, comme le P. Noël s'est figuré. Je ne m'arrêterai pas davantage sur une conséquence dont la foiblesse est si évidente, puisque je parle à un excellent géomètre, et que vous avez autant d'adresse pour découvrir les fautes de raisonnement, que de force pour les éviter.

Le P. Noël, passant plus avant, veut montrer quel est ce corps; et pour établir sa pensée, il commence par un long discours, dans lequel

il prétend prouver le mélange continuel et nécessaire des élémens, et où il ne montre autre chose, sinon qu'il se trouve quelques parties d'un élément parmi celles d'un autre, et qu'ils sont brouillés plutôt par accident que par nature : de sorte qu'il pourroit arriver qu'ils se sépareroient sans violence, et qu'ils reviendroient d'eux-mêmes dans leur première simplicité; car le mélange naturel de deux corps est lorsque leur séparation les fait tous deux changer de nom et de nature, comme celui de tous les métaux et de tous les mixtes; parce que, quand on a ôté, de l'or, le mercure qui entre en sa composition, ce qui reste n'est plus or. Mais dans le mélange que le P. Noël nous figure, on ne voit qu'une confusion violente de quelques vapeurs éparses parmi l'air, qui s'y soutiennent comme la poussière, sans qu'il paroisse qu'elles entrent dans la composition de l'air, et de même dans les autres mélanges. Et pour celui de l'eau et de l'air, qu'il donne pour le mieux démontré, et qu'il dit prouver péremptoirement par ces soufflets qui se font par le moyen de la chute de l'eau dans une chambre close presque de toutes parts, et que vous voyez expliquée au long dans sa lettre : il est étrange que ce père n'ait pas pris garde que cet air qu'il dit sortir de l'eau, n'est n'autre chose que l'air extérieur qui se porte avec l'eau qui tombe, et qui a une facilité tout entière d'y entrer par la même ouverture, parce qu'elle est plus grande que celle par où l'eau s'écoule : si bien que l'eau qui s'écarte en tombant dans cette ouverture, y entraîne tout l'air qu'elle rencontre et qu'elle enveloppe, dont elle empêche la sortie par la violence de sa chute et par l'impression de son mouvement; de sorte que l'air qui entre continuellement dans cette ouverture sans jamais pouvoir en sortir, fuit avec violence par celle qu'il trouve libre. Comme cette expérience est la seule par laquelle il cherche à prouver le mélange de l'eau et de l'air, et qu'elle ne le montre en aucune sorte, il se trouve qu'il ne le prouve nullement.

Le mélange qu'il prouve le moins, et dont il a le plus à faire, est celui du feu avec les autres élémens; car tout ce qu'on peut conclure de l'expérience du mouchoir et du chat, est que quelques-unes de leurs parties les plus grasses et les plus huileuses s'enflamment par la friction, y étant déjà disposées par la chaleur. Ensuite il nous déclare que son sentiment est que notre espace est plein de cette matière ignée, dilatée et mêlée, comme il suppose sans preuves, parmi tous les élémens, et étendue dans tout l'univers. Voilà la matière qu'il met dans le tuyau; et pour la suspension de la liqueur, il l'attribue au poids de l'air extérieur. J'ai été ravi de le voir en cela entrer dans le sentiment de ceux qui ont examiné ces expériences avec le plus de pénétration; car vous savez que la lettre du grand Toricelli, écrite au seigneur Ricchi il y a plus de quatre ans, montre qu'il étoit dès lors dans cette pensée, et que tous nos savans s'y accordent et s'y confirment de plus en plus. Nous en attendons néanmoins l'assurance de l'expérience qui doit s'en faire sur une de nos hautes montagnes; mais je n'espère la recevoir que dans quelque temps, parce que, sur les lettres que j'en ai écrites il y a plus de six mois, on m'a toujours mandé que les neiges rendent leurs sommets inaccessibles.

Voilà donc quelle est sa seconde pensée; et quoiqu'il semble qu'il y ait peu de différence entre cette matière et celle qu'il y plaçoit dans sa première lettre, elle est néanmoins plus grande qu'il ne paroît : voici en quoi.

Dans sa première pensée, la nature abhorroit le vide, et en faisoit ressentir l'horreur; dans la seconde, la nature ne donne aucune marque de l'horreur qu'elle a pour le vide, et ne fait aucune chose pour l'éviter Dans la première, il établissoit une adhérence mutuelle entre tous les corps de la nature; dans la deuxième, il ôte toute cette adhérence et tout le désir d'union. Dans la première il donnoit une faculté attractive à cette matière subtile et à tous les autres corps; dans la deuxième, il abolit toute cette attraction active et passive. Enfin il lui donnoit beaucoup de propriétés dans sa première, dont il la frustre dans la deuxième : si bien que s'il y a quelques degrés pour tomber dans le néant, elle est maintenant au plus proche, et il semble qu'il n'y ait que quelque reste de préoccupation qui l'empêche de l'y précipiter.

Mais je voudrois bien savoir de ce père d'où lui vient cet ascendant qu'il a sur la nature, et cet empire qu'il exerce si absolument sur les élémens qui lui servent avec tant de dépendance, qu'ils changent de propriétés à mesure qu'il change de pensées, et que l'univers accommode ses effets à l'inconstance de ses intentions. Je ne comprends pas quel aveuglement peut être à l'épreuve de cette lumière, et comment l'on peut donner quelque croyance à des choses que l'on fait naître et que l'on détruit avec une pareille facilité.

Mais la plus grande difficulté que je trouve entre ces deux opinions, est que le P. Noël assuroit affirmativement la vérité de la première, et qu'il ne propose la seconde que comme une simple pensée. C'est ce que ma première lettre a obtenu de lui, et le principal effet qu'elle a eu sur son esprit : si bien que comme j'avois répondu à sa première opinion que je ne croyois pas qu'elle eût les conditions nécessaires pour l'assurance d'une chose, je dirai sur la deuxième, que puisqu'il ne la donne que comme une pensée, et qu'il n'a ni la raison ni le sens pour témoins de la matière qu'il établit, je le laisse dans son sentiment, comme je laisse dans leur sentiment ceux qui pensent qu'il y a des habitans dans la lune, et que dans les terres polaires et inaccessibles il se trouve des hommes entièrement différens des autres.

Ainsi, monsieur, vous voyez que le P. Noël place dans le tuyau une matière subtile répandue par tout l'univers, et qu'il donne à l'air extérieur la force de soutenir la liqueur suspendue. D'où il est aisé de voir que cette pensée n'est en aucune chose différente de celle de M. Descartes, puisqu'il convient dans la cause de la suspension du vif-argent, aussi bien que dans la matière qui remplit cet espace, comme il se voit par ses propres termes (ci-dessus p. 194), où il dit que cette matière, qu'il appelle *air subtil*, est la même que celle que M. Descartes nomme *matière subtile*. C'est pourquoi j'ai cru être moins obligé de lui repartir, puisque je dois rendre cette réponse à celui qui est l'inventeur de cette opinion.

Comme j'écrivois ces dernières lignes, le P. Noël m'a fait l'honneur

de m'envoyer son livre[1] sur le même sujet, qu'il intitule, *le Plein du vide;* il a donné charge à celui qui a pris la peine de l'apporter, de m'assurer qu'il n'y avoit rien contre moi, et que toutes les paroles qui paroissoient aigres ne s'adressoient pas à moi, mais au R. P. *Valerianus Magnus*, capucin; et la raison qu'il m'en a donnée est que ce père soutient affirmativement le vide, au lieu que je fais seulement profession de m'opposer à ceux qui décident sur ce sujet. Mais le P. Noël m'en auroit mieux déchargé, s'il avoit rendu ce témoignage aussi public que le soupçon qu'il a donné.

J'ai parcouru ce livre, et j'ai trouvé qu'il y prend une nouvelle pensée, et qu'il place dans notre tuyau une matière approchante de la première; mais qu'il attribue la suspension du vif-argent à une qualité qu'il lui donne, qu'il appelle *légèreté mouvante*, et non pas au poids de l'air extérieur, comme il faisoit dans sa lettre.

Pour faire succinctement un petit examen du livre, le titre promet d'abord la démonstration du plein par des expériences nouvelles, et sa confirmation par les miennes. A l'entrée du livre, il s'érige en défenseur de la nature, et par une allégorie peut-être un peu trop continuée, il fait un procès dans lequel il la fait plaindre de l'opinion du vide, comme d'une calomnie; et sans qu'elle lui en ait témoigné son ressentiment, ni qu'elle lui ait donné charge de la défendre, il fait fonction de son avocat; et en cette qualité, il assure de montrer l'imposture et les fausses dépositions des témoins qu'on lui confronte. C'est ainsi qu'il appelle nos expériences : il promet de donner témoins contre témoins, c'est-à-dire expériences pour expériences, et de démontrer que les nôtres ont été mal reconnues, et encore plus mal avérées. Mais dans le corps du livre, quand il est question d'acquitter ces grandes promesses, il ne parle plus qu'en doutant; et après avoir fait espérer une si haute vengeance, il n'apporte que des conjectures au lieu de convictions : car dans le troisième chapitre, où il veut établir que le vide apparent est un corps, il dit simplement qu'il trouve beaucoup plus raisonnable de dire que c'est un corps. Quand il est question de montrer le mélange des éléments, il n'ajoute que des choses très-foibles à celles qu'il avoit dites dans sa lettre; quand il est question de montrer la plénitude du monde, il n'en donne aucune preuve; et sur ces vaines apparences, il établit son *éther* imperceptible à tous les sens, avec la légèreté imaginaire qu'il lui donne.

Ce qui est étrange, c'est qu'après avoir donné des doutes, pour appuyer son sentiment, il le confirme par des expériences fausses; il les propose néanmoins avec une hardiesse telle, qu'elles seroient reçues pour véritables de tous ceux qui n'ont point vu le contraire; car il dit que les yeux le font voir; que tout cela ne peut se nier; qu'on le voit à l'œil, quoique les yeux nous fassent voir le contraire. Ainsi il est évident qu'il n'a vu aucune des expériences dont il parle; et il est étrange qu'il ait parlé avec tant d'assurance de choses qu'il ignoroit, et dont on lui a fait un rapport très-peu fidèle. Car je veux croire qu'il ait été

1. Voy. ci-dessus, p. 199 et suivantes.

trompé lui-même, et non pas qu'il ait voulu tromper les autres; l'estime que je fais de lui me fait juger plutôt qu'il a été trop crédule, que peu sincère : et certainement il a sujet de se plaindre de ceux qui lui ont dit qu'un soufflet plein de ce vide apparent, étant débouché et pressé avec promptitude, pousse au dehors une matière aussi sensible que l'air; qu'un tuyau plein de vif-argent et de ce même vide, étant renversé, le vif-argent tombe aussi lentement dans ce vide que dans l'air, ou que ce vide retarde son mouvement naturel autant que l'air, et enfin beaucoup d'autres choses qu'il rapporte; car je l'assure, au contraire, que l'air y entre, et que le vif-argent tombe dans ce vide avec une extrême impétuosité, etc.

Enfin, pour vous faire voir que le P. Noël n'entend pas les expériences de mon imprimé, je vous prie de remarquer ce trait-ci entre autres : J'ai dit dans les premières de mes expériences qu'il a rapportées, « qu'une seringue de verre avec un piston bien juste, plongée entièrement dans l'eau, et dont on bouche l'ouverture avec le doigt, en sorte qu'il touche au bas du piston, mettant pour cet effet la main et le bras dans l'eau, on n'a besoin que d'une force médiocre pour le retirer, et faire qu'il se désunisse du doigt sans que l'eau y entre en aucune façon (ce que les philosophes ont cru ne pouvoir se faire avec aucune force finie); et ainsi le doigt se sent fortement attiré et avec douleur; le piston laisse un espace vide en apparence, et où il ne paroît qu'aucun corps ait pu succéder, puisqu'il est tout entouré d'eau qui n'a pu y avoir d'accès, l'ouverture en étant bouchée; si on tire le piston davantage, l'espace vide en apparence devient plus grand, mais le doigt n'en sent pas plus d'attraction. » Il a cru que ces mots, *n'en sent pas plus d'attraction*, ont le même sens que ceux-ci, *n'en sent plus aucune attraction;* au lieu que, suivant toutes les règles de la grammaire, ils signifient que le doigt ne sent pas une attraction plus grande. Et comme il ne connoît les expériences que par écrit, il a pensé qu'en effet le doigt ne sentoit plus aucune attraction, ce qui est absolument faux, car on la ressent toujours également. Mais l'hypothèse de ce père est si accommodante, qu'il a démontré, par une suite nécessaire de ses principes, pourquoi le doigt ne sent plus aucune attraction, quoique cela soit absolument faux. Je crois qu'il pourra rendre aussi facilement la raison du contraire par les mêmes principes. Mais je ne sais quelle estime les personnes judicieuses feront de sa façon de montrer, qu'il prouve avec une pareille force l'affirmative et la négative d'une même proposition.

Vous voyez par là, monsieur, que le P. Noël appuie cette matière invisible sur des expériences fausses, pour en expliquer d'autres qu'il a mal entendues. Aussi étoit-il bien juste qu'il se servît d'une matière que l'on ne sauroit voir et qu'on ne peut comprendre, pour répondre à des expériences qu'il n'a pas vues et qu'il n'a pas comprises. Quand il en sera mieux informé, je ne doute pas qu'il ne change de pensée, et surtout pour sa légèreté mouvante; c'est pourquoi il faut remettre la réponse à ce livre au temps où ce père l'aura corrigé, et qu'il aura reconnu la fausseté des faits et l'imposture des témoins qu'il oppose, et

qu'il ne fera plus le procès à l'opinion du vide sur des expériences mal reconnues et encore plus mal avérées.

En écrivant ces mots, je viens de recevoir un feuillet imprimé de ce père, qui renverse la plus grande partie de son livre : il révoque la légèreté mouvante de l'*éther*, en rappelant le poids de l'air extérieur pour soutenir le vif-argent. De sorte que je trouve qu'il est assez difficile de réfuter les pensées de ce père, puisqu'il est le premier plus prompt à les changer, qu'on ne peut être à lui répondre; et je commence à voir que sa façon d'agir est bien différente de la mienne, parce qu'il produit ses opinions à mesure qu'il les conçoit : mais leurs contrariétés propres suffisent pour en montrer l'insolidité, puisque le pouvoir avec lequel il dispose de cette matière, témoigne assez qu'il en est l'auteur, et partant qu'elle ne subsiste que dans son imagination.

Tous ceux qui combattent la vérité sont sujets à une semblable inconstance de pensées, et ceux qui tombent dans cette variété sont suspects de la contredire. Aussi est-il étrange de voir, parmi ceux qui soutiennent le plein, le grand nombre d'opinions différentes qui s'entrechoquent : l'un soutient l'*éther*, et exclut toute autre matière; l'autre, les esprits de la liqueur, au préjudice de l'*éther;* l'autre, l'air enfermé dans les pores des corps, et bannit toute autre chose; l'autre, de l'air raréfié et vide de tout autre corps. Enfin il s'en est trouvé qui, n'ayant pas osé y placer l'immensité de Dieu, ont choisi parmi les hommes une personne assez illustre par sa naissance et par son mérite, pour y placer son esprit et le faire remplir toutes choses. Ainsi chacun d'eux a tous les autres pour ennemis; et comme tous conspirent à la perte d'un seul, il succombe nécessairement. Mais comme ils ne triomphent que les uns des autres, ils sont tous victorieux, sans que pas un puisse se prévaloir de sa victoire, parce que tout cet avantage naît de leur propre confusion. De sorte qu'il n'est pas nécessaire de les combattre pour les ruiner : il suffit de les abandonner à eux-mêmes, parce qu'ils composent un corps divisé, dont les membres, contraires les uns aux autres, se déchirent intérieurement; au lieu que ceux qui favorisent le vide, demeurent dans une unité toujours égale à elle-même, qui, par ce moyen, a tant de rapport avec la vérité, qu'elle doit être suivie jusqu'à ce qu'elle nous paroisse à découvert. Car ce n'est pas dans cet embarras, dans ce tumulte qu'on doit la chercher; et l'on ne peut la trouver hors de cette maxime, qui ne permet que de décider des choses évidentes, et qui défend d'assurer ou de nier celles qui ne le sont pas. C'est ce juste milieu et ce parfait tempérament dans lequel vous vous tenez avec tant d'avantage, et où, par un bonheur que je ne puis assez reconnoître, j'ai été toujours élevé avec une méthode singulière et des soins plus que paternels.

Voilà, monsieur, quelles sont les raisons qui m'ont retenu, que je n'ai pas cru devoir vous cacher davantage; et, quoiqu'il semble que je les donne ici plutôt à mon intérêt qu'à votre curiosité, j'espère que ce doute n'ira pas jusqu'à vous, puisque vous savez que j'ai bien moins d'inquiétude pour ces fantasques points d'honneur que de passion pour

vous entretenir, et que je trouve bien moins de charme à défendre mes sentimens, qu'à vous assurer que je suis de tout mon cœur, monsieur, votre, etc., PASCAL.

LETTRE DE M. PASCAL LE PÈRE AU P. NOËL

Mon révérend père,

Il y a quelques mois que mon fils m'apprit l'honneur que vous lui aviez fait de lui écrire sur ses expériences touchant le vide; il m'envoya votre lettre et sa réponse : depuis je n'avois plus ouï parler de vos entretiens; mais il y a environ un mois qu'un homme de condition de cette ville de Rouen, me faisant l'honneur de me rendre visite, à son retour d'un voyage de Paris, me dit qu'il y avoit vu votre livre intitulé : *le Plein du vide*, dédié à Mgr le prince de Conti, dans lequel il est fait mention d'une seconde lettre que vous avez écrite à mon fils sur le même sujet.

La curiosité de la voir m'obligea de lui écrire que j'en désirerois avoir part, et de lui demander raison, premièrement, de ce qu'il ne me l'avoit point envoyée, et secondement, de ce qu'il ne s'étoit point donné l'honneur d'y repartir. A cette lettre, il me fit une réponse assez ample, par laquelle il me rend raison de ce que je désirois savoir, et me fait entendre que votre seconde lettre, ou plutôt votre réplique à sa réponse, lui fut rendue par le P. Talon, l'un des pères de votre société, lequel, en présence de personnes dignes de foi, lui fit prière, de votre part, de ne point faire de repartie à cette réplique, disant que s'il restoit des difficultés entre vous, on pourroit s'en éclaircir de vive voix, et que vous ne désiriez pas que cette réplique (laquelle n'étoit écrite que pour lui seul) fût communiquée à personne : vu même qu'on ne peut publier le secret des lettres, qui sont des entretiens particuliers, sans le violer en même temps; il ajoute ensuite qu'un de mes intimes amis, depuis trente ans et plus, plein d'honneur, de doctrine et de vertus, lui avoit, quelques jours avant ma lettre, fait les deux mêmes questions; que cela lui avoit donné lieu de faire réponse par écrit à cet ami, par laquelle il ne s'est pas contenté de satisfaire à sa curiosité sur ses deux demandes, mais qu'il y a de plus, par la même pièce, reparti à votre seconde lettre, laquelle il a estimé ne devoir tenir secrète plus longtemps; qu'il n'a fait aucun scrupule de la publier, après avoir vu que vous l'aviez vous-même rendue publique par votre petit livre, dans lequel vous avez pris la peine de copier et faire imprimer très-fidèlement les mêmes mots et les mêmes périodes que vous avez employés en cette seconde lettre, pour vous expliquer de tout ce qui regarde la question du vide; et qu'il n'a fait aussi aucun scrupule d'y repartir, ni de communiquer aussi cette repartie à tous ses amis, après avoir appris que quelques-uns des pères de votre société, faute peut-être d'avoir la connoissance de la prière qui lui avoit été, de votre part, portée par le P. Talon, donnoient une très-rude interprétation à son silence; et, pour prévenir la question que je pouvois lui faire, pourquoi ce n'est pas à vous-même qu'il adresse sa repartie, il me fait entendre qu'ayant lu la lettre dédicatoire de votre

livret, il y a vu des discours si désobligeans, et, qui plus est, si injurieux, qu'il a cru ne pouvoir y repartir, et vous adresser sa repartie, sinon, ou en repoussant vos injures non attendues par des discours de même catégorie, ou en pratiquant le précepte de l'Évangile, de faire notre plainte et correction fraternelle à ceux-là mêmes qui nous en donnent sujet; et voyant que la première de ces deux manières étoit tout à fait contraire à son inclination, et reconnoissant aussi que la seconde pouvoit être accusée de présomption en sa personne, eu égard à la disparité de votre âge et du sien, il a estimé plus à propos d'adresser à cet ami sa repartie toute simple et toute naïve, et sans témoignage d'avoir aucun ressentiment de ce que vous avez écrit; de me supplier, comme il a fait, de prendre la peine de pratiquer moi-même ce précepte de l'Évangile, de vous faire entendre sa juste plainte de l'avoir, sans occasion quelconque, provoqué, et le peu de convenance qu'il y a entre le genre d'écrire dont vous avez usé, et la condition que vous professez, jugeant que vous recevrez cela avec plus d'agrément de ma part que de la sienne; mais surtout il me prie de vous faire comparoir le peu d'estime qu'il pourroit espérer de vous, s'il avoit été si crédule que d'ajouter foi au compliment hors de saison que vous lui avez envoyé faire, par lequel vous avez voulu lui persuader que les paroles insérées dans ce livret, qui paroissent aigres et inutiles, n'étoient pas pour lui, mais bien pour le P. Valerianus Magnus, capucin. A la fin de sa lettre, il promet de me faire tenir dans peu votre livret avec les copies de votre réplique ou seconde lettre, et la repartie qu'il y a faite dans la lettre qu'il a écrite à cet ami dont j'ai déjà parlé. En effet, j'ai reçu ces trois pièces. Pour les voir exactement comme j'ai fait, et pour prendre le loisir d'écrire la présente, j'ai été obligé de dérober, à mon repos de quelques nuits, le temps que je n'aurois pu dérober à mon travail de jour, sans faire tort à mon devoir.

Par la réponse que je fis à sa lettre, je lui mandai qu'agréant la prière qu'il me fait, je prenois sur moi la charge de vous faire sa plainte sans aigreur, sans injure, sans invective, et en des termes sans doute plus convenables à ma plume qu'à la sienne : joint que je me trouvois obligé de vous écrire, par la curiosité que j'avois de tirer de vous la lumière d'un certain passage de votre seconde lettre qui me paroissoit obscur et fort embarrassé; que j'approuvois qu'il ne vous eût point fait l'adresse de sa repartie, vu les raisons qu'il en avoit; que j'approuvois aussi qu'il eût communiqué à nos amis tous vos entretiens particuliers, et même votre dite réplique et sa dernière repartie; que je désirois néanmoins qu'il différât jusqu'au prochain mois de mettre au jour cette repartie; qu'en ce temps j'espérois faire, avec l'aide de Dieu, un petit voyage à Paris, où je demeurerois huit ou dix jours pour affaires domestiques; que, pendant ce temps, je voulois lui proposer quelques difficultés qui m'empêchoient d'acquiescer, comme il semble faire, à l'opinion touchant la suspension du vif-argent dans le tube par la pesanteur de la colonne d'air. C'est une opinion que tout le monde sait avoir été proposée par Toricelli; et je ne sais pourquoi, vous servant de cette pensée, vous ne faites pas mention qu'elle est de Toricelli. Je veux aussi proposer mes

difficultés à quelques autres personnes dont la doctrine et le profond raisonnement me sont connus depuis longues années, que je vois de même incliner à cette opinion, et de laquelle je ne suis pas moi-même peu persuadé, bien que je ne le sois pas entièrement. Je ne sais pas quel sera l'événement des difficultés que j'ai à proposer; mais comme ce n'est ni l'opiniâtreté, ni l'ambition de l'empire des connoissances qui règnent dans leur esprit ni dans le mien, je sais avec assurance que la raison l'emportera. Quoi qu'il en arrive, je ne ferai plus d'obstacle après cela à la publication de cette repartie, dont j'ai déjà fait voir le manuscrit, et de toutes vos autres communications, en cette ville de Rouen, à tous ceux qui en ont eu curiosité, comme chose déjà publique dans Paris.

Après cela, mon père, s'il vous reste quelque doute de la raison pour quoi cette dernière repartie à votre réplique n'a point encore vu le grand jour, et comment il est arrivé que, sans avoir l'honneur d'être connu de vous, je me sois donné celui de vous écrire; je vous supplie, en un mot, d'attribuer le premier à l'obéissance du fils, et le second à la condescendance du père.

Mais, avant que de m'acquitter de la charge que j'ai prise, je vous dirai, mon père, que quand mon fils me fait remarquer, par sa lettre, que votre livret est une copie très-fidèle des mêmes dictions que vous avez employées dans la seconde lettre qu'il a reçue de vous, pour expliquer votre pensée sur la question du vide, il ne le fait pas pour vous en faire plainte; et quand je réitère ici cette remarque, ce n'est simplement que par forme d'histoire, et non par forme de plainte. Au contraire, e paroîtrois ingrat au dernier point, si je ne vous rendois très-humblement grâce d'avoir voulu rendre cet honneur à mon fils, de lui présenter une pièce que vous avez sans doute incroyablement estimée, puisque vous avez jugé que vous pouviez, sans incivilité, en présenter une partie, quatre ou cinq mois après, à un prince très-illustre, et par sa naissance, et par son mérite personnel; et certainement s'il y avoit lieu de plainte, ce seroit à Son Altesse, de laquelle vous êtes obligé de reconnoître la grâce qu'elle vous a faite, d'avoir daigné recevoir de vous une pièce qui n'étoit plus entièrement vôtre, et que vous lui avez rendue peu considérable par l'usage que vous en aviez déjà fait.

Le véritable sujet de la plainte que mon fils fait de votre procédé ne consiste donc pas en cette fidèle copie; mais il consiste, mon père, en ce que, par le titre de votre livret, par la lettre dédicatoire à Son Altesse, vous avez usé d'une façon d'écrire tellement injurieuse, qu'il n'y a que vos seuls ennemis capables de l'approuver, pour vous accoutumer peu à peu à l'usage d'un style impropre à toutes choses, sinon à causer des déplaisirs sans nombre. Et certainement, mon père, quoique je ne sois pas assez heureux pour avoir le bien de votre connoissance, je ne puis vous dissimuler que vous l'avez été beaucoup d'avoir entrepris, à si bon marché, de vous commettre en style d'injures contre un jeune homme, qui, se voyant provoqué sans sujet, je dis sans aucun sujet, pouvoit, par l'amertume de l'injure et par la témérité de l'âge, se porter à repousser vos invectives, de soi très-mal établies, en termes capables de vous causer un éternel repentir. Vous me direz peut-être que vous

n'eussiez pas demeuré sans repartie. Mais estimez-vous qu'il fût de sa part demeuré dans le silence? et ainsi où eût été le bout de ce beau combat? Vous n'avez donc pas été malheureux d'avoir eu affaire à un jeune homme, lequel, par une modération de nature, qui ne s'accorde pas toujours avec cet âge, au lieu d'en venir à ces extrémités désavantageuses à l'un et à l'autre, mais beaucoup plus à vous, a pris une autre voie pour vous faire entendre sa plainte. C'est par la juste condescendance que j'ai rendue à sa prière que je vous la porte; mais sans injure, sans invective, sans user des termes de *faussetés*, d'*impostures*, d'*expériences mal reconnues* et encore *plus mal avérées*, etc. Toutefois, sur tous les passages de votre ouvrage, où je trouverai qu'il a eu sujet de se plaindre de vous, je prendrai la liberté de le faire sans dissimulation, et de vous donner des avis, qu'en cas pareil (si Dieu avoit permis que je m'y fusse précipité) je serois prêt à recevoir de tout le monde. En tout ce discours, vous ne trouverez rien qui touche la question du vide; je suis, il y a longtemps, très-persuadé de l'opinion que j'en ai; et, comme elle m'est indifférente (sinon en ce qu'il importe à tous les hommes que la vérité soit connue), j'en laisse à vous deux, si vous avez agréable, la contestation, et le jugement aux savans du siècle présent, sauf l'appel à la postérité. Je ne m'expliquerai avec vous que de vos mépris et de vos invectives, que j'ai jugés si peu préjudiciables à celui qui en est l'objet, que je n'ai fait difficulté quelconque de les insérer ici en leur entier, pour puis après les examiner en détail. Voici le titre de votre livre : *le Plein du vide, ou le corps dont le vide apparent des expériences nouvelles est rempli, trouvé par d'autres expériences, confirmé par les mêmes, et démontré par raisons physiques.*

Commençons, s'il vous plaît, à examiner votre titre : *le Plein du vide.* Le livret de mon fils, contre lequel vous écrivez, est ainsi intitulé : *Expériences nouvelles touchant le vide, faites dans des tuyaux, seringues, soufflets et siphons de plusieurs longueurs et figures*, etc. A ce titre simple, naïf, ingénu, sans artifice et tout naturel, vous opposez cet autre titre : *le Plein du vide*, subtil, artificieux, orné, ou plutôt composé d'une figure qu'on appelle *antithèse*, si j'ai bonne mémoire.

En conscience, mon père, comment pouviez-vous mieux débuter pour faire un abrégé de dérision? On voit bien que ç'a été là tout votre but, sans vous soucier beaucoup des termes de cette antithèse, laquelle peut véritablement passer dans l'École, où il est non-seulement permis, mais aussi nécessaire (tant la nature de l'homme est imparfaite) de commencer par faire mal, pour apprendre peu à peu à faire bien; mais certainement dans le monde, où l'on n'excuse rien, elle ne sauroit passer, puisque par elle-même elle n'a point de sens parfait; et je ne doute pas que vous ne l'ayez reconnu vous-même, et que ce ne soit peut-être pourquoi vous y avez ajouté un commentaire, sans lequel, quoique françoise de nation et d'habillement, elle pouvoit passer par toute la France pour *incognito*, et aussi mystérieuse que les nombres pythagoriciens, qu'un auteur moderne dit être pleins de mystères si cachés, que personne jusqu'ici n'a su en découvrir le secret.

Si j'osois, mon père, prendre la liberté de parler ici de grammaire,

et d'établir quelques principes pour l'antithèse, je vous dirois, premièrement, que l'antithèse doit contenir en soi-même un sens accompli, comme quand nous disons que servir Dieu c'est régner; que la prudence humaine n'est que folie: que la mort est le commencement de la vie véritable. et mille autres de cette nature. La raison de ceci est que l'antithèse, pour avoir bonne grâce, doit, par la seule énonciation de ses termes, découvrir non-seulement le sens qu'elle contient, mais aussi sa pointe et sa subtilité. Que si l'antithèse est de telle nature que, combien que son sens soit parfait, il ne soit pourtant pas intelligible universellement à tous, il faut, en ce cas, faire précéder un discours qui en donne l'intelligence à tout le monde, afin qu'au même temps qu'on l'entend prononcer, on en conçoive le sens et la force. C'est avec cette précaution qu'un excellentissime auteur de ce temps en a fait une très-belle, en laquelle il a, comme vous, employé le plein et le vide, en parlant des prêtres. Après avoir fait voir comme ils devoient se vider et dépouiller de toutes les affections de la terre pour être remplis de l'abondance de la grâce, il ajoute ensuite que c'est en ce sens qu'un grand saint a dit : *In apostolis multum erat pleni, quia multum erat vacui;* mais cette précaution ne peut pas servir pour les titres des ouvrages, qui ne sont précédés d'aucun discours.

Secondement, je vous dirois qu'il est impossible qu'une antithèse consistant en deux adjectifs contraires, puisse contenir un sens parfait, quand l'un est énoncé par un nominatif et l'autre par le génitif, comme la vôtre, le plein du vide, qui a tout aussi peu de sens comme celles qui seroient contenues en ces termes, le foible du fort, le petit du grand, le riche du pauvre. La raison pour laquelle ces antithèses n'ont point de sens accompli, est que dans leurs termes il n'y a ni sujet ni attribut.

Vous avez grand intérêt, mon père, d'empêcher, si vous pouvez, que cette antithèse ingénieuse dont vous vous servez pour frapper et rendre ridicule un ouvrage étranger, ne fasse une dangereuse répercussion contre le vôtre.

L'explication de votre antithèse est suivie d'une addition qui contient trois belles promesses, dont vous n'avez accompli une seule. Soyez assuré d'un ample remercîment, quand vous y aurez satisfait; mais jusqu'à présent, de tout votre titre, compris son explication et son addition, l'on ne peut en recueillir autre chose, sinon que, lorsque vous l'avez composé, vous étiez en très-belle humeur, sans autre pensée que de rire et de vous jouer. Mais la lecture de votre épître dédicatoire m'apprend que vous avez intention de mordre en riant, et d'égratigner en vous jouant. En voici la teneur : *La nature est aujourd'hui accusée*, etc.

Dieu vous maintienne longues années, mon révérend père, dans la joie que vous ont donnée ces belles pensées, et vous ôte de l'esprit les nuages qui pourroient la troubler, par une solide réflexion que vous pourrez quelque jour faire sur tous ces beaux discours! Quel pouvez-vous imaginer être le jugement de tous les savans sur l'entreprise que vous faites, de vouloir faire passer pour ridicules, et tourner en raillerie des expériences qu'ils ont tous très-sérieusement examinées durant

plusieurs mois, et qu'ils considèrent encore tous les jours avec toute la force et toute l'attention de leur esprit? La nature, dites-vous, est aujourd'hui accusée de vide, et vous entreprenez de l'en justifier, et tout le surplus de cette épître n'est rien qu'une continuation de cette allégorie pointue, ou plutôt piquante, et pleine de pointes satiriques et de reproches de hardiesse, de fausseté de faits, d'impostures de témoins, de fausses dépositions, d'expériences mal reconnues, et encore plus mal avérées. Ensuite de cette allégorie vous détruisez l'effet de toutes ces expériences par une seule hyperbole, dont nous nous expliquerons, s'il vous plaît, après que nous nous serons entretenus de votre allégorie et de ses pointes.

Je ne crois pas vous avoir encore entièrement expliqué la plainte de mon fils : en un mot, mon père, il se plaint seulement de la mauvaise volonté que vous avez fait paroître contre lui; mais il ne se plaint aucunement de l'effet. Il ne faut pas de raisonnement, pour faire paroître le dessein et la volonté que vous avez eus de le provoquer; mais pour faire paroître que l'effet de votre intention n'a été capable d'offenser que vous-même et non pas lui, je suis obligé par nécessité de vous faire remarquer beaucoup de choses, que sans doute vous n'avez pas observées, afin qu'en même temps vous jugiez que votre discours n'est pas si énergique que vous avez pensé, ni assez puissant pour produire l'effet que vous vous étiez imaginé. Enfin il a, dites-vous, accusé la nature de vide : n'est-ce pas une entreprise bien dangereuse, d'avoir osé accuser la nature de vide? Car si admettre le vide n'étoit pas un crime métaphorique, l'opinion de l'admission du vide ne seroit pas une accusation métaphorique; et vous n'entreprendriez pas de l'en justifier métaphoriquement, et tout le surplus de votre allégorie, fondée sur cette métaphore du crime, ne subsisteroit pas. Car à quoi pourroit-on rapporter la hardiesse, qu'à votre dire, les accusateurs de la nature ont prise, de lui confronter les sens et l'expérience? Comment expliqueroit-on la peine que vous vous donnez de la justifier et de faire voir son intégrité, de montrer la fausseté des faits dont elle est chargée, et les impostures des témoins qu'on lui oppose? Quel sens donneroit-on à ce que vous ajoutez, que si la nature étoit connue d'un chacun comme elle l'est de Son Altesse, on se seroit bien gardé de lui faire un procès sur de fausses dépositions? Et à quel propos demanderiez-vous justice à Son Altesse de toutes ces calomnies? Tous ces discours auroient aussi peu de sens que l'antithèse de votre titre, si l'admission du vide n'étoit un crime métaphorique.

En vérité, mon père, quand vous aurez perdu la joie que vous avez conçue, d'avoir trouvé cette allégorie, c'est-à-dire, dans quelque temps, que la production que vous ferez d'autres ouvrages de plus grande conséquence, vous aura fait oublier que vous êtes l'auteur de celui-ci, et que vous serez en état de le considérer comme un ouvrage d'autrui, j'ai grand'peine à croire que vous en faisiez la même estime que vous en faites à présent. Vous ferez alors une réflexion sur les règles de la métaphore; vous en remarquerez au moins la principale, capable toute seule de vous ôter la bonne opinion que vous avez conçue de celle

sur laquelle vous avez fondé cette allégorie, et vous reconnoîtrez qu'il faut que le terme métaphorique soit comme une figure, ou une image, du terme subtil, réel et véritable, qu'on peut représenter par sa métaphore; ce qui fait que le terme métaphorique ne peut point être adapté au terme subtil, qui est directement contraire au premier : ainsi nous appelons, par métaphore, une *langue serpentine*, quand nous parlons d'une langue médisante, parce que le venin de la langue du serpent est comme l'image et le symbole du mal et du dommage que la langue médisante apporte à l'honneur et à la réputation de celui dont elle a médit; ce qui fait que le même terme métaphorique de langue serpentine ne peut être adapté au sujet contraire, c'est-à-dire à la langue qui chante les louanges d'autrui : c'est ainsi que l'Église est appelée, par une sainte métaphore, *l'épouse de Jésus-Christ*, et c'est sur cette métaphore que roule tout le Cantique des cantiques; c'est ainsi que la Vierge dit dans le sien, qu'en elle le Seigneur a fait paroître *la puissance de son bras;* et l'Écriture en est toute remplie, parce que les divins mystères nous étant tellement inconnus, que nous n'en savons pas seulement les véritables noms, nous sommes obligés d'user de termes métaphoriques pour les exprimer; c'est ainsi que l'Église dit que *le Fils est assis à la droite de son Père;* que l'Écriture se sert si souvent du mot de royaume des cieux; que David dit : *Lavez-moi, Seigneur, et je serai plus blanc que la neige;* mais en toutes ces métaphores, il est très-certain que tous ces termes métaphoriques sont les symboles et les images des choses que nous voulons signifier, et dont nous ignorons les véritables noms. Et pour venir à votre métaphore du crime dont vous dites que la nature est accusée, considérez, je vous prie, celle que Cicéron a faite très à propos d'un autre crime, dont aussi il accuse métaphoriquement la nature : il dit que c'est une marâtre et mille fois pire qu'une marâtre; il insulte contre elle comme contre une mère criminelle qui tourmente sans cesse, et puis qui fait criminellement mourir les plus parfaits de ses enfans. Mais ne voyez-vous pas que le crime et la cruauté d'une mère qui tourmente sans cesse, et fait enfin mourir le plus parfait de ses enfans, est une image qui exprime et représente naïvement, quoique par métaphore, l'action de la nature en sa misère perpétuelle, et en la mort même qu'elle cause à tous les hommes, qui sont les plus accomplis de ses ouvrages? En un mot, mon père, la métaphore n'est autre chose qu'un abrégé de similitude ou comparaison; et la plus universelle règle de la métaphore est qu'elle ne peut être valable, si elle ne peut, par le changement de phrase, être convertie en comparaison. Considérons ensuite votre métaphore, et jugez, s'il vous plaît, vous-même que ce terme métaphorique de crime que vous avez pris pour fondement, n'a aucun rapport à l'admission du vide, n'est point crime, ni réellement, ni métaphoriquement, parce que l'admission du vide n'a aucun rapport avec le crime, et ne peut lui être raisonnablement comparé. De là il s'ensuit deux notables inconvéniens, qui font remarquer que votre métaphore a cela de commun avec votre antithèse, qu'elle ne peut passer que dans l'école, et non pas dans le monde. Le premier inconvénient est, que ce

même terme métaphorique de crime que vous avez improprement adapté à l'admission du vide, peut être également adapté au sujet directement contraire, c'est-à-dire à l'admission de la plénitude. Le second est, comme vous avez adapté le terme de crime à l'admission du vide, on peut également adapter le terme de justice ou de vertu directement contraire à celui de crime, au même sujet de l'admission du vide; tellement qu'il seroit aussi bien qu'à vous permis à quiconque voudroit se jouer comme vous, et tourner en raillerie votre allégorie, de tenir le vide pour une éminente vertu, et, au contraire, tenir la plénitude pour un infâme crime; et sur ces beaux fondemens bâtir une autre allégorie toute pareille à la vôtre; il pourroit introduire un chevalier métaphorique qui se présenteroit les armes à la main devant Son Altesse, pour défendre l'intégrité de la nature contre la plume du P. Noël, qui, sous prétexte de la justifier du crime prétendu de vide (qu'il soutiendroit, au contraire, être la plus éminente de ses vertus) l'a injurieusement accusée de celui d'une plénitude si monstrueuse, qu'elle en crève de toutes parts; il feroit (en continuant l'allégorie) que ce cavalier prendroit les armes par le commandement de Son Altesse, qu'il se métamorphoseroit, comme vous, en avocat métaphoriquement pour justifier la nature; il parleroit hautement de l'imposture des témoins qu'on lui oppose; il diroit que la matière subtile, la matière ignée, la sphère du feu, l'éther, les esprits solaires, et la légèreté mouvante, sont tous faux témoins, de la fausse déposition desquels le P. Noël prétend se servir pour faire le procès à cette vertueuse dame, prenant la hardiesse (ce que personne n'avoit encore osé) de lui confronter tous ces imposteurs gens de néant, gens inconnus au ciel et à la terre, et contre lesquels toutefois la pauvre dame ne pourra, dans la confrontation, alléguer d'autres reproches, sinon qu'elle, qui a tout produit et qui connoît toutes choses, ne les connoît point et ne les connut jamais; alors il auroit aussi bonne grâce que vous à demander justice de toutes ces calomnies à Son Altesse, laquelle, considérant que ni le vide, ni la plénitude, ne sont ni perfection, ni imperfection, ni vice, ni vertu, ni crime, ni injure à la nature, mettroit sans doute les parties hors de cour et de procès.

Je vous supplie très-humblement, mon père, et tous ceux qui verront ce discours, de s'assurer que je n'ignore pas combien cette façon d'écrire est peu digne de votre condition et de la mienne, et que si j'ai fait ici une très-mauvaise copie de votre allégorie, je ne l'ai faite qu'avec une répugnance extrême, et sans autre dessein qu'afin que vous puissiez, sur mon ouvrage, faire une réflexion que vous n'avez su faire sur la vôtre.

Aussi certainement je me résoudrois à supprimer dans le reste de ce discours le mot même d'allégorie, si je n'avois à m'expliquer des invectives que vous avez tellement entrelacées dans la vôtre, qu'il est difficile à juger si vous avez inventé les invectives, pour trouver expédient de continuer l'allégorie, ou si vous avez inventé l'allégorie, pour prendre sujet d'y faire glisser ces invectives inventées. Le dernier toutefois me semble plus vraisemblable : la conclusion de l'allégorie me le fait ainsi

juger; car, après avoir doctement étendu en termes de Tournelle (pour faire voir que vous savez un peu de tout) cette criminelle allégorie, vous concluez par la justification de la nature, contre ceux qui veulent lui faire son procès sur de fausses dépositions, et sur des expériences *mal reconnues* et encore *plus mal avérées;* ensuite *vous demandez justice* à Son Altesse de toutes ces *calomnies.* En bon françois, mon père, tout ce discours ne signifie autre chose, sinon que toutes ces expériences sont fausses et mal entendues. Partant, je vous dirai, mon père, que si Son Altesse vous fait justice, et qu'il veuille se donner la peine de faire réitérer ces expériences en sa présence, on lui fera voir qu'elles sont très-véritables, et que de plus elles sont très-bien entendues, si ce n'est que vous ayez en ce point entendu parler de vous-même, auquel cas je ne crois pas qu'il se trouve personne en disposition de vous contredire.

Je sais bien que vous ne dites pas dans votre Épître dédicatoire que ce soit des expériences de mon fils dont vous parlez; et je sais bien aussi (comme je vous ai dit ci-devant) que vous lui en avez envoyé faire civilité, et lui dire que ce n'est pas lui dont vous entendez parler dans les paroles fâcheuses qui y sont insérées, mais bien du P. Valerianus Magnus, capucin, qui a écrit en Pologne sur le même sujet. Mais trouviez-vous en lui sujet de croire qu'il fût si peu intelligent, que de ne pas connoître l'artifice de votre civilité à contre-temps? Et aviez-vous lieu d'espérer qu'il pût en être persuadé, après que la tissure entière de votre livret a fait voir si clairement que c'est lui et non un autre que vous avez voulu provoquer, après que vous avez employé tout ce que vous avez d'industrie pour tâcher à détruire les huit expériences qu'il a faites; et qu'après votre prétendue destruction de ces huit expériences, vous avez mis fin et terminé votre livre sans plus traiter d'autres matières? Trouvez-vous que la charité soit plus offensée en la personne de mon fils qu'en celle du P. Valerianus, qui, peut-être, ne vous vit jamais, ni jamais n'ouïra parler de vous? Et trouvez-vous que l'offense que vous avez commise (car enfin vous avouez d'avoir piqué et provoqué) soit légitimement excusée par l'accusation, que de votre propre mouvement vous faites contre vous-même, d'avoir offensé le P. Valerianus? Non, mon père, ne vous abusez point; on voit votre intention à découvert : vous avez pensé que ce ne vous seroit pas peu de gloire, de tâcher seulement (sans y parvenir) à détruire des expériences qui avoient été par tant d'honnêtes gens jugées dignes d'être considérées; et vous n'avez pas estimé de vous être dignement acquitté de votre tâche, si vous ne traitiez du haut en bas, et, qui plus est, injurieusement, et les expériences, et celui qui les a faites, et tous ceux qui les ont considérées, en les produisant à Son Altesse comme ridicules, fausses et mal entendues : vous vous êtes imaginé que Son Altesse jugeroit par la hardiesse de votre procédure et du ton que vous avez pris, que vous étiez l'oracle à qui l'on doit avoir recours en ces matières; car à moins de cela, vous n'auriez pas eu l'assurance de démentir, par une liberté qui ne vous appartient pas, les yeux et le jugement de tous les curieux et savans de Paris, qui ont vu et passé tant de fois par l'examen de leur raisonnement, des

choses que, par trop de chaleur et de précipitation, vous avez osé appeler fausses et mal entendues. Mais quoi que vous en ayez dit dans votre Épître, le lecteur de votre livre entier ne peut s'assurer et demeure en suspens de votre jugement propre; il a peine à le découvrir : car, d'un côté, dit-il, si le P. Noël jugeoit en soi-même ces expériences aussi ridicules, fausses et mal entendues, comme il a voulu nous le faire croire dans son Épître dédicatoire, pourquoi dans tout son livre a-t-il employé toute son industrie et toute la capacité que Dieu lui a donnée, à les réfuter toutes les unes après les autres si sérieusement? et pourquoi n'a-t-il pas essayé à les faire paroître telles, lorsqu'il travailloit de propos délibéré à cette réfutation? Et, d'autre part, si le P. Noël a jugé en soi-même que ces expériences fussent considérables et dignes d'une si sérieuse réfutation, pourquoi dans son Épître a-t-il voulu les faire passer pour ridicules, fausses et mal entendues? et pourquoi leur a-t-il donné toutes ces fameuses épithètes en un lieu qui n'étoit pas destiné à cette réfutation? C'est à vous, mon père, d'éclaircir le lecteur sur ce doute; mais, en attendant, vous me permettrez de vous dire que ces expériences, si fausses, si mal entendues et si ridicules que vous ayez voulu les figurer, vous ont désarçonné, c'est-à-dire, sans plus allégoriser, contraint de sortir hors de l'école et de la philosophie que l'on enseigne dans le collége de Clermont; vous l'avez trouvée dans l'impuissance de pouvoir résoudre les conséquences nécessaires de ces ridicules expériences; il a fallu avoir recours à des forces étrangères : il faut avouer que vous avez de fidèles amis; car en très-peu de temps, vous avez tiré secours de bien loin; on a vu, en très-peu de temps, venir à votre assistance la sphère de feu d'Aristote, la matière subtile de Descartes, la matière ignée, l'éther, les esprits solaires et la légèreté mouvante. Voilà bien des puissances qui viennent à votre assistance, desquelles, si vous en étiez pris à serment, je m'assure que vous n'oseriez affirmer en connoître une seule. Il faut assurément que vous ne soyez pas de ces humains défians, qui ne prennent confiance en qui que ce soit : vu que vous vous êtes jeté ainsi aveuglément entre les bras d'un secours inconnu. Je ne sais pourquoi vous n'avez pas voulu dire dans votre imprimé que cette matière subtile soit de l'invention de M. Descartes; je ne sais si c'est afin que quelqu'un pût s'imaginer que vous en étiez l'auteur, ou si vous avez voulu, par cette dissimulation affectée du nom de M. Descartes, persuader à tous ceux qui liront votre livret, que cette matière subtile n'est pas une chose nouvellement inventée. Quoi qu'il en soit, vous avez, 1° fort artistement (peut-être pour faire dire que vos pensées sont détachées de celles d'Aristote et de M. Descartes, et de qui que ce soit), fort artistement, dis-je, mélangé la sphère du feu avec la matière subtile et la matière ignée. En second lieu, vous avez encore plus industrieusement mélangé ce mélange avec un autre mélange que vous avez composé de l'éther et des esprits solaires. En troisième lieu, vous avez, à tous ces mélanges, ajouté une certaine qualité merveilleuse que vous appelez *légèreté mouvante* (je ne sais si elle n'est pas de votre invention), à laquelle vous attribuez la puissance de soutenir et suspendre, par sa propre vertu, les corps les plus pesans : tellement

que, pour vous débrouiller des conséquences de ces expériences puériles, vous avez été contraint de brouiller toutes ces substances inconnues à vous-même par une qualité miraculeuse. Après cela, mon père, je vous conjure de nous dire par quel droit vous avez pris la liberté de publier que ces expériences étoient mal reconnues et encore plus mal avérées, et de tâcher ainsi à faire passer celui qui les a produites pour tout autre chose qu'il n'est assurément. Est-ce par le droit de votre âge ou de votre condition, que vous avez pris la liberté d'invectiver ainsi? Si vous avez cru que ces choses aient été assez puissantes pour vous en donner l'autorité, votre imagination vous a fait malheureusement chopper contre la maxime générale de la société civile, qui veut qu'il n'y ait point d'autorité d'âge, point de condition, point de robe, point de magistrature, point d'érudition, point de vertu qui puisse nous donner la liberté d'invectiver contre qui que ce soit. Quand nous avons été si malheureux que d'avoir été provoqués par invectives, la même loi ne trouve pas qu'il soit contre les bonnes mœurs de repousser les auteurs publiquement, si l'invective est publique; mais elle ne nous permet jamais de nous servir d'injures réciproques. Certainement, quand vous aurez sérieusement examiné ce que c'est que le style d'invective, vous trouverez qu'il n'est ni fort, ni persuadant, ni charitable, ni propre pour acquérir la gloire qu'on se propose pour fin. En effet, quelle gloire un homme d'honneur peut-il prétendre de l'art d'invectiver, qui, de soi-même, n'est rien qu'une pure foiblesse, et tellement naturelle à l'homme, que tant s'en faut qu'il ait besoin d'étude pour y devenir docte, il lui en faut, au contraire, beaucoup pour y devenir ignorant; et toutefois si facile qu'il soit, et quelque application que puisse y faire un honnête homme, le plus haut degré d'honneur où il puisse aspirer, est de parvenir à celui de pouvoir un jour prêter le collet à la plus foible écolière de la moins éloquente harangère de la halle?

Vous voyez, mon père, que j'ai moi-même très-soigneusement pratiqué cette maxime générale de la société, que je me suis contenté, en repoussant vos invectives, de vous faire voir que vous les avez entrelacées dans des figures de rhétorique qui ne sont pas dans les règles de la grammaire, afin que de toutes ces choses vous puissiez recueillir que nous n'avons, grâce à Dieu, aucun sujet de nous plaindre de l'effet du mépris et du traitement injurieux que vous avez, sans aucun sujet, voulu rendre à une personne qui ne pensoit point à vous quand vous avez le premier recherché sa connoissance, et qui avoit de sa part, par toutes les civilités et reconnoissances imaginables, cultivé cet honneur; mais j'ai fait tout cela sans invectiver, et sans vous rendre injure pour injure. Après cela, mon père, j'ose vous supplier très-humblement de vous en abstenir désormais, si vous avez dessein de continuer avec mon fils ou avec moi l'honneur de vos communications : autrement je proteste devant Dieu de supporter et oublier nous-mêmes toutes les injures dont une mauvaise inclination ou un mauvais conseil pourroient vous rendre capable, en vous montrant, à la face de toute la France, l'exemple de la modestie, que vous devriez nous avoir enseigné.

J'attends, mon père, cette grâce de vous; et sur cette espérance, je

ne veux plus me ressouvenir de division, ni d'allégorie, ni d'invective, ni de tout ce qui tient ou de ce qui approche de ce malheureux nom d'injure. Laissez, s'il vous plaît, ces façons d'écrire ou de parler à ceux à qui Dieu a donné moins de lumière; ou plutôt, par raisons et corrections fraternelles, s'il y échet, et surtout par notre propre exemple, s'il nous est possible, bannissons-les du monde.

LETTRE DE PASCAL A M DE RIBEYRE,

PREMIER PRÉSIDENT DE LA COUR DES AIDES DE CLERMONT-FERRAND,

Au sujet de ce qui fut dit dans le prologue des thèses de philosophie soutenues en sa présence dans le collége des jésuites de Montferrand, le 25 *juin* 1651.

Monsieur,

Je prends la liberté de vous écrire sur le sujet des thèses qui furent dernièrement proposées dans le collége de Montferrand, et qui vous ont été dédiées, où il se fit un certain prologue, dont le principal dessein étoit d'imposer à toute l'assistance que je m'étois voulu dire l'auteur d'une expérience très-fameuse qui n'est pas de mon invention. Voici les termes de ce prologue, qui furent recueillis à l'heure même, et qui m'ont été envoyés en substance. « Il y a de certaines personnes aimant la nouveauté, qui veulent se dire les inventeurs d'une certaine expérience dont Toricelli est l'auteur, qui a été faite en Pologne; et nonobstant cela, ces personnes voulant se l'attribuer, après l'avoir faite en Normandie, sont venues la publier en Auvergne. » Vous voyez, monsieur, que c'est moi dont on a parlé, et qu'on m'a particulièrement désigné, en spécifiant les provinces de Normandie et d'Auvergne.

Je ne vous cèle point, monsieur, que je fus merveilleusement surpris d'apprendre que ce père, que je n'ai point l'honneur de connoître, dont j'ignore le nom, que je n'ai aucune mémoire d'avoir jamais vu seulement, avec qui je n'ai rien du tout de commun, ni directement, ni indirectement, neuf ou dix mois après que j'ai quitté la province, quand j'en suis éloigné de cent lieues, et lorsque je ne pense à rien moins, m'ait choisi pour le sujet de son entretien.

Je sais bien que ces sortes de contentions sont si peu importantes, qu'elles ne méritent pas une sérieuse réflexion. Néanmoins, monsieur, si vous prenez la peine de considérer toutes les circonstances de ce procédé, dont je n'exprime pas le détail, vous jugerez sans doute qu'il est capable d'exciter quelque ressentiment; car je présume qu'il est difficile que ceux qui ont été présens à cet acte, aient refusé de croire une chose de fait, prononcée publiquement, composée par un père jésuite qu'on ne peut soupçonner d'aucune animosité contre moi. Toutes ces particularités rendent cette supposition très-croyable; mais comme j'aurois un grand déplaisir que vous, monsieur, que j'honore particulièrement, eussiez de moi cette pensée, je m'adresse à vous plutôt qu'à tout autre pour vous éclaircir de la vérité, pour deux raisons : l'une, pour le res-

pect même que je vous porte ; l'autre, parce que vous avez été protecteur de cet acte en tant qu'il vous a été dédié, et que partant c'est à vous, monsieur, à réprimer le dessein de ceux qui ont entrepris d'y blesser la vérité. Ainsi, monsieur, comme vous avez donné une après-dînée entière à l'entretien que ce père vous a fourni, je vous conjure de vouloir donner au mien l'espace d'un quart d'heure seulement, et d'avoir pour agréable que cette lettre que je vous écris soit rendue aussi publique que les thèses que vous avez reçues.

Pour vous éclaircir pleinement de tout ce démêlé, vous remarquerez, s'il vous plaît, monsieur, que ce bon père vous a fait entendre deux choses : l'une, que je m'étois dit l'auteur de l'expérience de Toricelli ; l'autre, que je ne l'avois faite en Normandie qu'après qu'elle avoit été faite en Pologne.

Si ce bon père avoit dessein de m'imposer quelque chose, il pouvoit avoir fait un choix plus heureux ; car il y a de certaines calomnies dont il est difficile de prouver la fausseté, au lieu qu'il se rencontre ici malheureusement pour lui, que j'ai en main de quoi ruiner si certainement tout ce qu'il a avancé, que vous ne pourrez, sans un extrême étonnement, considérer d'une même vue la hardiesse avec laquelle il a débité ses suppositions, et la certitude que je vous donnerai du contraire. C'est ce que vous verrez sur l'un et sur l'autre de ces deux points, s'il vous plaît d'en prendre la patience.

Le premier point donc est qu'il m'accuse de m'être fait auteur de l'expérience de Toricelli. Pour vous satisfaire sur ce point, il suffiroit, monsieur, de vous dire en un mot, que toutes les fois que l'occasion s'en est présentée, je n'ai jamais manqué de dire que cette expérience est venue d'Italie, et qu'elle est de l'invention de Toricelli. C'est ainsi que j'en ai usé à Paris et en tous les lieux où je me suis trouvé, et particulièrement en Auvergne, où je l'ai publiée, soit dans les discours particuliers, soit dans nos conférences publiques, comme tous ces messieurs, avec qui j'avois l'honneur de converser plus familièrement, peuvent le témoigner. Mais pour vous en éclaircir plus à fond, permettez-moi, s'il vous plaît, monsieur, de vous dire comment la chose s'est passée dès son commencement : c'est une histoire que plusieurs seront peut-être bien aises de savoir.

En l'année 1644, on écrivit d'Italie au R. P. Mersenne, minime à Paris, que l'expérience dont nous parlons y avoit été faite, sans spécifier en aucune sorte qui en étoit l'auteur : si bien que cela demeura inconnu entre nous. Le P. Mersenne essaya de la répéter à Paris, et n'y ayant pas entièrement réussi, il la quitta et n'y pensa plus. Depuis, ayant été à Rome pour d'autres affaires, et s'étant exactement informé du moyen de l'exécuter, il en revint pleinement instruit.

Ces nouvelles nous ayant été, en l'année 1646, portées à Rouen, où j'étois alors, nous y fîmes cette expérience d'Italie sur les Mémoires du P. Mersenne, laquelle ayant très-bien réussi, je la répétai plusieurs fois ; et par cette fréquente répétition, m'étant assuré de sa vérité, j'en tirai des conséquences, pour la preuve desquelles je fis de nouvelles expériences très-différentes de celle-là, en présence de plus de cinq cents

personnes de toutes sortes de conditions, et entre autres de cinq ou six pères jésuites du collége de Rouen.

Le bruit de mes expériences étant répandu dans Paris, on les confondit avec celle d'Italie : et dans ce mélange les uns, me faisant un honneur qui ne m'étoit pas dû, m'attribuoient cette expérience d'Italie; et les autres, par une injustice contraire, m'ôtoient celles que j'avois faites.

Pour rendre aux autres et à moi-même la justice qui nous étoit due, je fis imprimer, en l'année 1647, les expériences qu'un an auparavant j'avois faites en Normandie : et afin qu'on ne les confondît plus avec celle d'Italie, j'annonçai celle d'Italie, non pas dans le cours du discours qui contient les miennes, mais à part dans l'avis que j'adresse au lecteur, et de plus en caractères italiques, au lieu que les miennes sont en romain; et ne m'étant pas contenté de la distinguer par toutes ces marques, j'ai déclaré en mots exprès, dans cet Avis au lecteur, que « je ne suis pas inventeur de celle-là; qu'elle a été faite en Italie quatre ans avant les miennes; que même elle a été l'occasion qui me les a fait entreprendre. » Voici mes propres termes :

« Mon cher lecteur : quelques considérations m'empêchant de donner à présent un traité entier, où j'ai rapporté quantité d'expériences nouvelles que j'ai faites touchant le vide, et les conséquences que j'en ai tirées, j'ai voulu faire un récit des principales dans cet abrégé, où vous verrez par avance le dessein de tout l'ouvrage. L'occasion de ces expériences est telle. Il y a environ quatre ans qu'en Italie on éprouva qu'un tuyau de verre de quatre pieds, dont un bout est ouvert, et l'autre scellé hermétiquement, étant rempli de vif-argent, puis l'ouverture bouchée avec le doigt ou autrement, et le tuyau disposé perpendiculairement à l'horizon, l'ouverture bouchée étant vers le bas, et plongée deux ou trois doigts dans d'autre vif-argent, contenu en un vaisseau moitié plein de vif-argent, et l'autre moitié d'eau; si on le débouche (l'ouverture demeurant enfoncée dans le vif-argent du vaisseau), le vif-argent du tuyau descend en partie, laissant au haut du tuyau un espace vide en apparence, le bas du même tuyau demeurant plein du même vif-argent jusqu'à une certaine hauteur. Et si on hausse un peu le tuyau jusqu'à ce que son ouverture, qui trempoit auparavant dans le vif-argent du vaisseau, sortant de ce vif-argent, arrive à la région de l'eau, le vif-argent du tuyau monte jusqu'en haut avec l'eau, et ces deux liqueurs se brouillent dans le tuyau; mais enfin tout le vif-argent tombe, et le tuyau se trouve tout plein d'eau. »

Voilà, monsieur, la même expérience que ce bon père prétend que je me suis attribuée, et laquelle, au contraire, je déclare avoir été faite en Italie quatre ans avant les miennes. Mais les paroles par lesquelles je conclus cet Avis au lecteur, sont encore plus expresses; les voici :

« Et comme les honnêtes gens joignent à l'inclination générale qu'ont tous les hommes de se maintenir dans leurs justes possessions, celle de refuser l'honneur qui ne leur est pas dû, vous approuverez sans doute que je me défende également, et de ceux qui voudroient m'ôter quelques-unes des expériences que je vous donne ici, et que je vous promets dans le traité entier, puisqu'elles sont de mon invention, et de ceux qui vou-

droient m'attribuer celle d'Italie, dont je vous ai parlé, puisqu'elle n'en est pas. Car encore que je l'aie faite en plus de façons qu'aucun autre, et avec des tuyaux de douze et même quinze pieds de long, néanmoins je n'en parlerai pas seulement dans cet écrit, parce que je n'en suis pas l'inventeur, n'ayant dessein de donner que celles qui me sont particulières et de mon propre génie. »

Voyez, monsieur, s'il est possible d'expliquer plus clairement et plus nettement que je ne suis pas l'auteur de cette expérience d'Italie. Mais afin que vous ne croyiez pas que cette vérité ait été tenue secrète, je ne dois pas vous taire que j'envoyai des exemplaires de ce petit livre à tous nos amis de Paris, et entre autres aux révérends pères jésuites, qui certainement me font l'honneur de me traiter d'une manière tout autre que celui de Montferrand. Quelques-uns même d'entre eux prirent sujet d'en écrire; et le R. P. Noël, alors recteur du collége de Clermont, en fit un livret qu'il intitula : *le Plein du vide*, où il rapporte mot à mot la plupart de mes expériences.

Je ne me contentai pas d'en envoyer à nos amis de Paris; j'en fis tenir en toutes les villes de France où j'avois l'honneur de connoître des personnes curieuses de ces matières. J'en envoyai même quinze ou trente en la seule ville de Clermont, où je ne doute pas qu'il ne s'en trouve encore : et c'est ce qui me donne lieu de prier M. le conseiller Périer, mon beau-frère, par une lettre que je lui écris, de prendre la peine d'en chercher un pour vous le donner avec la présente; s'il n'en trouve point, je lui en ferai passer un d'ici pour vous le présenter.

Enfin le P. Mersenne, ne se contentant pas d'en voir par toute la France, m'en demanda plusieurs pour les envoyer, comme il fit, en Suède, en Hollande, en Pologne, en Allemagne, en Italie et de tous les côtés. De sorte que je crois que ce bon père de Montferrand est le seul entre les curieux de toute l'Europe qui n'en a point eu de connoissance, je ne sais par quel malheur, si ce n'est qu'il fuie le commerce et la communication des savans, pour des raisons que je ne pénètre pas.

Vous voyez, monsieur, que, bien loin de m'attribuer une gloire qui ne m'est pas due, j'ai fait tous mes efforts pour la refuser, lorsqu'on a voulu me la donner. Je crois même que sans cet aveu public que j'en ai fait, l'expérience dont il s'agit auroit passé pour être de mon invention; car les avis qu'on en avoit reçus d'Italie avoient beaucoup moins éclaté que mes expériences faites à Rouen en présence de tant de personnes.

Que si vous désirez savoir pourquoi je n'ai pas déclaré dans mon petit livre le nom de l'auteur de cette expérience, je vous dirai, monsieur, que la raison en est, que nous n'en avions pas alors eu connoissance, comme je l'ai déjà dit : si bien que n'en sachant pas le véritable auteur, et voulant faire savoir cependant à tout le monde que je ne l'étois pas, je fis ce qui étoit en moi, en déclarant, comme vous avez vu, que *je n'en suis pas l'inventeur*, *et qu'elle avoit été faite en Italie quatre ans avant mon écrit.*

Mais comme nous étions tous dans l'impatience de savoir qui en étoit l'inventeur, nous en écrivîmes à Rome au cavalier del Posso, lequel nous manda, longtemps après mon imprimé, qu'elle est véritablement

du grand Toricelli, professeur du duc de Florence aux mathématiques. Nous fûmes ravis d'apprendre qu'elle venoit d'un génie si illustre, et dont nous avions déjà reçu des productions en géométrie, qui surpassent toutes celles de l'antiquité. Je ne crains pas d'être désavoué de cet éloge par aucun de ceux qui sont capables d'en juger.

Depuis que nous avons eu cette connoissance, nous avons tous publié, et moi comme les autres, que Toricelli en est l'auteur; je suis certain que ce bon père n'a jamais ouï dire de moi le contraire. Et véritablement je ne suis pas assez impudent pour m'être attribué cette expérience, ayant moi-même envoyé de toutes parts un si grand nombre d'exemplaires de mon livret, où je dis le contraire si ponctuellement.

Aussi, si ce bon père de Montferrand avoit un peu plus de commerce avec Paris, il sauroit que c'est une chose qui est si connue, qu'il seroit aussi peu possible de s'attribuer l'expérience de Toricelli, que l'invention des lunettes d'approche; et qu'il est si peu à craindre que personne prenne cette fantaisie, qu'il est même ridicule d'en soupçonner qui que ce soit.

J'estime, monsieur, que vous êtes maintenant satisfait sur le premier point, et que vous voyez évidemment que je n'ai eu aucun projet de m'attribuer l'invention de cette expérience. Et quant au second point, je vous y satisferai aussi pleinement.

Ce second point est, que ce bon père prétend que cette expérience a été faite en Pologne avant que je la fisse en Normandie : c'est ce qu'il a avancé hardiment et sans hésiter; mais le bonhomme est aussi mal instruit sur ce point que sur le précédent.

Pour vous le témoigner, monsieur, je mets en fait qu'il ne sait aucune particularité de l'histoire de ces expériences, et que si vous prenez la peine de lui demander seulement le nom de celui qui a fait cette expérience en Pologne, il ne sauroit y répondre; et que, si vous lui demandez encore en quel temps j'ai fait les miennes, et en quel temps ont été faites celles de Pologne, vous verrez un homme très-honteux et très-embarrassé. Cependant il s'ingère d'avancer hardiment que les miennes sont postérieures.

Pour mieux l'en informer, et lui donner moyen de paroître plus intelligent qu'il n'est dans ce qui se passe parmi les personnes de lettres, il saura, en premier lieu, que celui qui a fait en Pologne les expériences dont il a voulu parler, est un père capucin, nommé *Valérien Magni*, et dans les livres latins faits sur ce sujet, *Valerianus Magnus*.

Il saura, en second lieu, que le P. Valérien n'a fait aucune chose que répéter l'expérience de Toricelli, sans rien y ajouter de nouveau.

Il saura, en troisième lieu, qu'il n'a fait en Pologne cette expérience que longtemps après moi; et pour lui dire combien de temps après, il saura que je fis cette expérience en l'année 1646; que cette même année j'y en ajoutai beaucoup d'autres; qu'en 1647 je fis imprimer le récit de toutes; que mon imprimé fut envoyé en Pologne comme ailleurs en la même année 1647; et qu'un an après mon écrit imprimé, le P. Valérien fit en Pologne cette expérience de Toricelli. Si ce bon père jésuite a connoissance de mon écrit et de celui du père capucin (ce que je ne crois

pas), qu'il prenne la peine de les confronter, il verra la vérité de ce que je dis.

Il saura, en quatrième lieu, que le bon P. Valérien fit imprimer le récit de cette expérience qu'il avoit faite; que cet imprimé nous fut envoyé incontinent après sa production; et que nous fûmes très-surpris d'y voir que ce bon père s'attribuoit cette même expérience de Toricelli.

Et enfin, pour comble de conviction, le bon père jésuite saura, en dernier lieu, que la prétention du P. Valérien fut incontinent repoussée par chacun de nous, et particulièrement par M. de Roberval, professeur aux mathématiques, qui se servit de mon imprimé comme d'une preuve indubitable pour le convaincre, comme il fit par une belle lettre latine imprimée qu'il lui adressa, par laquelle il lui fit passer cette démangeaison, en lui mandant qu'il ne réussiroit pas dans sa prétention; que dès l'année 1644, on savoit en France que cette expérience avoit été faite en Italie; qu'en 1646 elle avoit été faite en France par plusieurs personnes et en plusieurs lieux; qu'en la même année j'y en avois ajouté plusieurs autres; qu'en 1647 j'en avois fait imprimer le récit, dans lequel j'avois énoncé cette même expérience comme faite en Italie quatre ans auparavant; que mes imprimés avoient été vus dès la même année 1647 en toute l'Europe, et même en Pologne; qu'enfin il étoit indubitable qu'il ne l'avoit faite que sur l'énonciation qu'il en avoit vue dans mon imprimé envoyé en Pologne; et qu'ainsi si, longtemps après mon écrit, il n'étoit pas supportable de s'en dire l'auteur.

Cette lettre lui ayant été envoyée par l'entremise de M. Desnoyers, secrétaire des commandemens de la reine de Pologne, homme très-savant et très-digne de la place qu'il tient auprès de cette grande princesse, ce bon père n'y fit aucune réponse, et se désista de cette prétention, de sorte qu'on n'en a plus ouï parler depuis.

Ainsi, monsieur, vous remarquerez, s'il vous plaît, combien il est peu véritable que j'aie voulu m'approprier l'expérience de Toricelli, ni que je l'aie faite après le P. Valérien (qui sont les deux points que le père jésuite m'impose), puisque c'est de mes expériences et de mon écrit où elles sont énoncées, que M. de Roberval a tiré sa principale conviction contre le P. Valérien, quand il a voulu s'attribuer la gloire de cette invention.

Si ce père jésuite de Montferrand connoît M. de Roberval, il n'est pas nécessaire que j'accompagne son nom des éloges qui lui sont dus; et s'il ne le connoît pas, il doit s'abstenir de parler de ces matières, puisque c'est une preuve indubitable qu'il n'a aucune entrée aux hautes connoissances, ni de la physique, ni de la géométrie.

Après tous ces témoignages, j'espère, monsieur, que vous agréerez la très-humble prière que je vous fais, que par votre moyen et par l'autorité que ce bon père jésuite vous a lui-même donnée sur lui en ce sujet, quand il vous a dédié ses thèses, je puisse apprendre d'où lui viennent ces impressions qu'il a prises de moi; car il est indubitable que c'est l'effet du rapport de quelques personnes qu'il a crues dignes de foi, ou que c'est l'ouvrage de son propre esprit. Si c'est le premier, je vous supplierai, monsieur, d'avoir la bonté, pour ce bon père, de lui remon-

trer l'importance de la légèreté de sa croyance. Et si c'est le second, je prie Dieu dès à présent de lui pardonner cette offense, et je l'en prie d'aussi bon cœur que je la lui pardonne moi-même; je supplie tous ceux qui en ont été témoins, et vous-même, monsieur, de la lui pardonner pareillement.

Maintenant, monsieur, sans plus parler de tout ce différend, que je veux oublier, je vous achèverai la suite de cette histoire; et je vous dirai que dès l'année 1647 nous fûmes avertis d'une très-belle pensée qu'eut Toricelli touchant la cause de tous les effets qu'on a jusqu'à présent attribués à l'horreur du vide. Mais comme ce n'étoit qu'une simple conjecture, et dont on n'avoit aucune preuve, pour en reconnoître ou la vérité, ou la fausseté, je méditai dès lors une expérience que vous savez avoir été faite en 1648 par M. Périer au haut et au bas du Puy de-Dôme, dont on a aussi envoyé des exemplaires de toutes parts, où elle a été reçue avec joie, comme elle avoit été attendue avec impatience

Il est véritable, monsieur, et je vous le dis hardiment, que cette expérience est de mon invention; et partant, je puis dire que la nouvelle connoissance qu'elle nous a découverte, est entièrement de moi.

Les conséquences en sont très-belles et très-utiles. Je ne m'arrêterai pas à les déduire en ce lieu, espérant que vous les verrez bientôt, Dieu aidant, dans un traité que j'achève, et que j'ai déjà communiqué à plusieurs de nos amis, où l'on connoîtra quelle est la véritable cause de tous les effets que l'on a attribués à l'horreur du vide, et où, par occasion, on verra distinctement qui sont les véritables auteurs de toutes les nouvelles vérités qui ont été découvertes en cette matière. Dans ce détail, on trouvera exactement et séparément ce qui est de l'invention de Galilée, ce qui est de celle du grand Toricelli, et ce qui est de la mienne; et enfin il paroîtra par quels degrés on est arrivé aux connoissances que nous avons maintenant sur ce sujet, et que cette dernière expérience du Puy-de-Dôme fait le dernier de ses degrés.

Et comme je suis certain que Galilée et Toricelli eussent été ravis d'apprendre de leur temps qu'on eût passé outre la connoissance qu'ils ont eue, je vous proteste, monsieur, que je n'aurai jamais plus de joie que de voir que quelqu'un passe outre celle que j'ai donnée.

Aussitôt que ce traité sera en état, je ne manquerai pas de vous en faire offrir, pour reconnoître en quelque sorte l'obligation que je vous ai, d'avoir souffert l'importunité que je vous donne, et pour vous servir de témoignage de l'extrême désir que j'ai d'être, toute ma vie, monsieur, votre, etc. *Signé*, PASCAL.

De Paris, ce 12 juillet 1651.

RÉPONSE DE M. DE RIBEYRE A LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Monsieur,

Je vous avoue que ce ne fut pas sans quelque sorte d'étonnement que j'ouïs le préambule qui fut fait par l'écolier qui m'avoit dédié ses thèses sous la direction d'un père jésuite, qui m'étoit jusqu'alors inconnu,

et qu'il ne fut pas malaisé à ceux qui ont l'honneur de vous connoître, de juger par son discours qu'il entendoit parler de vous, en désignant une personne qui, après avoir fait des expériences touchant le vide en Normandie, les avoit encore faites en Auvergne. Mais expliquant bénignement ce discours, auquel d'ailleurs je ne remarquai rien d'offensant, je voulus l'attribuer à une émulation pardonnable entre les savans, plutôt qu'à aucun dessein qu'il eût d'invectiver contre vous. Il est vrai, monsieur, que j'avois intérêt d'excuser cette faute, soit par l'honneur qui m'étoit fait par la dédicace de ces thèses, soit par celle que j'aurois commise en votre endroit, si j'avois souffert qu'en ma présence on donnât quelque atteinte à la réputation d'une personne que j'ai sujet d'honorer par ses propres mérites, et par l'attachement d'une amitié que j'ai contractée avec le père et le fils depuis plusieurs années. Donc, pour éloigner de moi ce reproche, que vous auriez droit de me faire, si j'avois souffert qu'en cette occasion, où j'avois la plus grande part, puisqu'elle m'étoit dédiée, on vous eût fait la moindre injure, je puis vous assurer, monsieur, que, s'il y a eu quelque témérité à vous manquer dans ce discours, au moins ne passa-t-elle pas fort avant, et que ni le maître ni l'écolier n'apportèrent aucune aigreur dans la suite. Et je pense, pour vous dire le vrai, que ce bon père ne fut porté à étaler cette proposition que par une démangeaison qu'il avoit de produire quelques expériences qu'il nous dit, après que l'assemblée fut levée, avoir imaginées, par lesquelles il prétendoit détruire les vôtres. Mais il fut bien trompé; car, ayant exposé à la vue des assistans un tableau qui contenoit quelques figures de ses expériences, et ayant, tant par le tableau que par l'argument de cette action, fait une espèce de défi sur cette matière, il arriva que personne ne l'attaqua sur ce sujet, et qu'il lui fallut garder ce coup de pistolet qu'il avoit préparé, pour en faire la décharge en quelque autre rencontre. Néanmoins, monsieur, j'assurerois qu'il n'a eu aucun dessein malicieux; et cela m'a paru par son ingénuité, lorsque je le suis allé voir après la réception de la vôtre, où il m'a assuré qu'il n'avoit rien fait dans cette action par un dessein prémédité de vous attaquer; qu'il ne vous avoit point accusé d'aucune affectation que vous eussiez eue de vous approprier la gloire d'une invention qui fût d'un autre; qu'il étoit prêt d'en faire telle déclaration que vous désireriez, et qu'au contraire, lorsqu'il avoit donné des écrits à ses écoliers sur cette matière, il avoit parlé de vous fort honorablement en ces termes, comme il me fit voir sur-le-champ : *quam rem multum auxit et illustravit cum suis amicis dominus Pascalius Claromontensis*, *ut patet ex libellis hanc in rem ab eo editis*, etc. Et, pour vous dire le vrai, je ne remarquai pas, dans ce préambule, qu'il vous accusât d'introduire des nouveautés, ni de vouloir vous attribuer la gloire des inventions d'autrui; et m'en étant mieux voulu assurer par les témoignages de ceux qui étoient présens à cette dispute, je les ai priés de rappeler leur mémoire là-dessus : ils m'ont assuré qu'ils n'avoient nullement remarqué qu'il s'y fût rien dit à votre désavantage, sinon que ce père pouvoit bien se passer de faire aucune mention de vous en cette déclamation, qui n'étoit pas une chose assez sérieuse pour

vous y dénommer ou désigner. De quoi je puis vous assurer, monsieur, c'est que le discours de cet écolier et l'autorité de son régent n'étoient point capables de donner aucune impression à ceux qui les écoutoient, qui pût faire aucun préjudice à l'estime que fait de vous toute la compagnie qui étoit alors présente; et je crois que les paroles qui y furent dites sont plus dignes de mépris, que d'être relevées avec le soin qu'il vous plaît d'y apporter. C'est pour cela que j'ai fait mes efforts auprès de M. le conseiller Périer pour l'empêcher de mettre sous la presse la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, afin de ne point donner ouverture à une contestation où ce bon père pourroit toujours tirer cet avantage de votre victoire, *quod quum victus erit, tecum certasse feretur*. Néanmoins j'ai trouvé M. Périer si exact et si ponctuel à suivre les ordres que M. votre père et vous lui donnez, que je n'ai pu obtenir cette grâce de lui, quoique je le priasse seulement de différer jusqu'à votre réponse, après laquelle il eût été en liberté de faire ce qui lui eût plu, en cas que vous persévérassiez dans la même volonté; et s'il n'étoit question que de rendre votre justification aussi publique (ainsi que vous témoignez le souhaiter) que cette déclamation, je puis vous assurer, monsieur, que vous avez obtenu en ce point ce que vous désirez, et que votre lettre est venue à la connoissance de plus de personnes que le père n'en avoit informé par ce discours. Que si d'un côté je puis me dire malheureux de m'être trouvé à une action qui a pu vous déplaire, j'en tire d'ailleurs beaucoup d'avantage par l'honneur de la lettre qu'il vous a plu m'écrire, par la satisfaction qui me revient de la beauté de son expression, et de l'espérance que vous me donnez de me faire part de l'ouvrage que vous méditez de mettre en lumière. Mais vous m'auriez fait tort, monsieur, si vous aviez cru que vous eussiez besoin de justification en mon endroit : votre candeur et votre sincérité me sont trop connues pour croire que vous puissiez jamais être convaincu d'avoir fait quelque chose contre la vertu dont vous faites profession, et qui paroît dans toutes vos actions et dans vos mœurs. Je l'honore et la révère en vous plus que votre science; et comme en l'une et l'autre vous égalez les plus fameux du siècle, ne trouvez pas étrange si, ajoutant à l'estime commune des autres hommes l'obligation d'une amitié contractée depuis longues années avec monsieur votre père, je me dis plus que personne, monsieur, votre, etc. RIBEYRE

De Clermont, 26 juillet 1651.

RÉPLIQUE DE PASCAL A M. DE RIBEYRE.

Monsieur,

Je me sens tellement honoré de la lettre qu'il vous a plu m'écrire, que, bien loin de conserver quelque reste de déplaisir de l'occasion qui m'a procuré cet honneur, je souhaiterois, au contraire, qu'il s'en offrît souvent de pareilles, pourvu qu'elles fussent suivies d'un succès aussi favorable. Je vous proteste, monsieur, que le seul regret que j'en ai, après celui de la peine que vous en avez reçue, est de voir que l'affaire

devienne plus publique que vous n'aviez désiré, et que M. Périer et moi en soyons cause, sans toutefois que ni l'un ni l'autre ayons eu le moindre dessein de manquer au respect et à l'obéissance que nous vous devons. Aussi, monsieur, il ne me sera pas difficile d'excuser envers vous l'un et l'autre; et c'est ce que je vous prie d'agréer que je fasse par cette lettre. Avant toutes choses, je vous supplie très-humblement, monsieur, de tenir pour constant qu'il n'y a personne au monde qui puisse vous honorer plus parfaitement que nous faisons, et qu'il faudroit que nous eussions perdu tout respect pour mon père, si, contre l'exemple et l'instruction qu'il nous en a toujours donnés, nous manquions jamais à ce devoir.

Sur ce fondement, je vous conjure, monsieur, de considérer, pour ce qui me regarde, que parmi toutes les personnes qui font profession des lettres, ce n'est pas un moindre crime de s'attribuer une invention étrangère, qu'en la société civile d'usurper les possessions d'autrui; et qu'encore que personne ne soit obligé d'être savant non plus que d'être riche, personne n'est dispensé d'être sincère : de sorte que le reproche de l'ignorance, non plus que celui de l'indigence, n'a rien d'injurieux que pour celui qui le profère; mais celui du larcin est de telle nature, qu'un homme d'honneur ne doit point souffrir de s'en voir accusé, sans s'exposer au péril que son silence tienne lieu de conviction.

Ainsi, étant très-ponctuellement averti comme j'étois, non-seulement des paroles, mais encore des gestes et de toutes les circonstances de ces actes, jugez, monsieur, si je pouvois m'en taire à mon honneur; et, puisque ces actes avoient été publics, si je ne devois pas repousser cette injure de la même manière.

Je vous avoue, monsieur, que dans le ressentiment où j'étois alors, je n'eus aucune pensée que vous auriez la bonté de désirer que cette affaire fût assoupie : de sorte que laissant agir mon dépit, et considérant d'ailleurs que ma lettre perdroit sa grâce et sa force en différant de la publier, je priai M. Périer, avec grande instance et grande précision, d'en hâter l'impression; et je fortifiai même ma prière par celle que je fis à mon père d'y joindre la sienne. Mais je puis vous protester véritablement, monsieur, que si j'eusse prévu ce que votre lettre m'a appris, j'eusse agi d'une autre sorte, et que j'aurois donné avec joie mon intérêt à votre satisfaction.

Voilà, monsieur, la vérité naïve, pour ce qui me regarde. Et pour ce qui concerne M. Périer, si vous aviez vu la lettre qu'il nous a écrite, où il témoigne le déplaisir qu'il a eu en cette occasion, je m'assure que vous plaindriez la violence qu'il a soufferte, quand il s'est vu, d'une part, sollicité par la prière d'une personne qu'il honore et qu'il respecte comme vous; et, de l'autre part, engagé à exécuter les ordres qui lui avoient été donnés par une personne qui lui tient lieu d'un autre père.

Après cela, monsieur, j'espère que vous n'imputerez qu'à la distance des lieux et à la difficulté de la communication, cette petite conjoncture. Il ne me reste qu'à vous conjurer de vouloir m'honorer de la continuation des sentimens avantageux que vous témoignez avoir pour moi;

et quoique je n'aie rien en moi qui les mérite, j'en espère néanmoins la durée, parce que je m'assure bien plus sur votre bonté, à qui je les dois, qu'à aucune qualité qui soit en moi; car je suis également éloigné de pouvoir les mériter et de pouvoir les reconnoître. Mais j'espère, monsieur, que le même esprit qui vous fait voir des vertus dans mes propres défauts, vous fera remarquer l'extrême désir que j'ai de vous honorer toute ma vie dans ce foible témoignage que je vous en donne, en vous assurant que je suis, monsieur, votre, etc. PASCAL.

De Paris, 8 août 1651.

TRAITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES LIQUEURS[1].

CHAP. I. — *Que les liqueurs pèsent suivant leur hauteur.*

Si on attache contre un mur plusieurs vaisseaux, l'un tel que celui de la première figure; l'autre penché, comme en la seconde; l'autre fort large, comme en la troisième; l'autre étroit, comme en la quatrième; l'autre qui ne soit qu'un petit tuyau qui aboutisse à un vaisseau large par en bas, mais qui n'ait presque point de hauteur, comme en la cinquième figure; et qu'on les remplisse tous d'eau jusqu'à une même hauteur, et qu'on fasse à tous des ouvertures pareilles par en bas, lesquelles on bouche pour retenir l'eau : l'expérience fait voir qu'il faut une pareille force pour empêcher tous ces tampons de sortir,

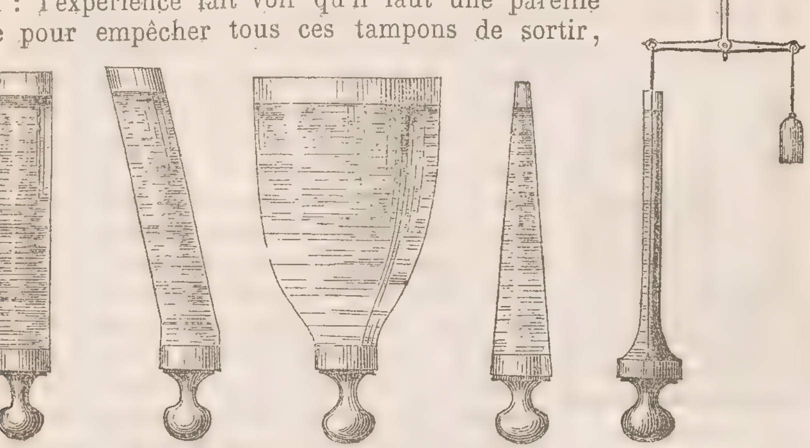


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

quoique l'eau soit en une quantité toute différente en tous ces différens vaisseaux, parce qu'elle est à une pareille hauteur en tous : et la mesure de cette force est le poids de l'eau contenue dans le premier vais-

1. Ce traité et le suivant parurent en 1663, un an après la mort de Pascal. Ils furent édités, avec privilége du roi, par M. Périer, chez G. Desprez, mar-

seau, qui est uniforme en tout son corps; car si cette eau pèse cent livres, il faudra une force de cent livres pour soutenir chacun des tampons, et même celui du vaisseau cinquième, quand l'eau qui y est ne pèseroit pas une once.

Pour l'éprouver exactement, il faut boucher l'ouverture du cinquième vaisseau avec une pièce de bois ronde, enveloppée d'étoupe comme le piston d'une pompe, qui entre et coule dans cette ouverture avec tant de justesse, qu'il n'y tienne pas, et qu'il empêche néanmoins l'eau d'en sortir, et attacher un fil au milieu de ce piston, que l'on passe dans ce petit tuyau, pour l'attacher à un bras de balance, et pendre à l'autre bras un poids de cent livres : on verra un parfait équilibre de ce poids de cent livres avec l'eau du petit tuyau qui pèse une once; et si peu qu'on diminue de ces cent livres, le poids de l'eau fera baisser le piston, et par conséquent baisser le bras de la balance où il est attaché, et hausser celui où pend le poids d'un peu moins de cent livres.

Si cette eau vient à se glacer, et que la glace ne prenne pas au vaisseau, comme en effet elle ne s'y attache pas d'ordinaire, il ne faudra à l'autre bras de la balance qu'une once pour tenir le poids de la glace en équilibre : mais si on approche contre le vaisseau du feu qui fasse fondre la glace, il faudra un poids de cent livres pour contre-balancer la pesanteur de cette glace fondue en eau, quoique nous ne la supposions que d'une once.

La même chose arriveroit, quand ces ouvertures que l'on bouche seroient à côté, ou même en haut; et il seroit même plus aisé de l'éprouver en cette sorte.

Il faut avoir un vaisseau clos de tous côtés (fig. 6), et y faire deux ouvertures en haut, une fort étroite, l'autre plus large, et souder sur l'une et sur l'autre des tuyaux de la grosseur chacun de son ouverture; et on verra que si on met un piston au tuyau large, et qu'on verse de l'eau dans le tuyau menu, il faudra mettre sur le piston un grand poids, pour empêcher que le poids de l'eau du petit tuyau ne le pousse en haut : de la même sorte que dans les premiers exemples, il falloit une force de cent livres pour empêcher que le poids de l'eau ne les poussât en bas, parce que l'ouverture étoit en bas; et si elle étoit à côté, il faudroit une pareille force pour empêcher que le poids de l'eau ne repoussât le piston vers ce côté. Et quand le tuyau plein d'eau seroit cent fois plus large ou cent fois

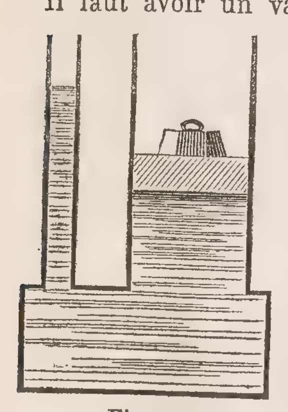


Fig. 6.

chand libraire à Paris. Pascal se proposait d'expliquer à fond toutes les questions relatives à l'équilibre des liquides, au vide et à la pression de l'air, dans un grand traité. Mais cet ouvrage a été perdu; « ou plutôt, disent les éditeurs de 1663, comme l'auteur aimoit fort la briéveté, il l'a réduit lui-même en ces deux petits traités : *De l'équilibre des liqueurs* et *De la pesanteur de la masse de l'air.* »

plus étroit, pourvu que l'eau y fût toujours à la même hauteur, il faudroit toujours un même poids pour contre-peser l'eau; et si peu qu'on diminue le poids, l'eau baissera, et fera monter le poids diminué.

Mais si on versoit de l'eau dans le tuyau à une hauteur double, il faudroit un poids double sur le piston pour contre-peser l'eau; et de même si on faisoit l'ouverture où est le piston, double de ce qu'elle est, il faudroit doubler la force nécessaire pour soutenir le piston double : d'où l'on voit que la force nécessaire pour empêcher l'eau de couler par une ouverture, est proportionnée à la hauteur de l'eau, et non pas à sa largeur; et que la mesure de cette force est toujours le poids de toute l'eau qui seroit contenue dans une colonne de la hauteur de l'eau, et de la grosseur de l'ouverture.

Ce que j'ai dit de l'eau doit s'entendre de toute autre sorte de liqueur.

Chap. II. — *Pourquoi les liqueurs pèsent suivant leur hauteur.*

On voit, par tous ces exemples, qu'un petit filet d'eau tient un grand poids en équilibre : il reste à montrer quelle est la cause de cette multiplication de force; nous allons le faire par l'expérience qui suit.

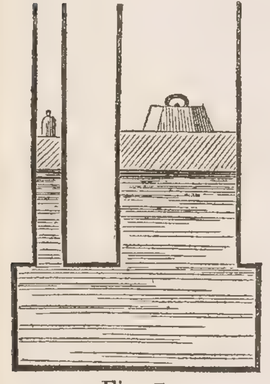
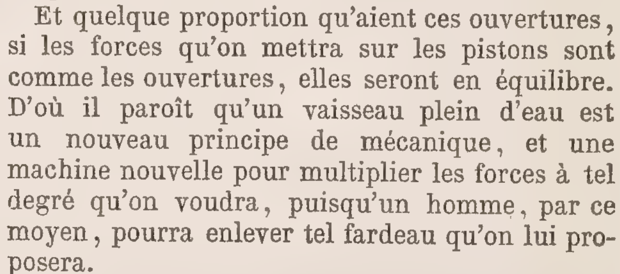


Fig. 7.



Si un vaisseau plein d'eau (fig. 7), clos de toutes parts, a deux ouvertures, l'une centuple de l'autre : en mettant à chacune un piston qui lui soit juste, un homme poussant le petit piston égalera la force de cent hommes, qui pousseront celui qui est cent fois plus large, et en surmontera quatre-vingt-dix-neuf.

Et quelque proportion qu'aient ces ouvertures, si les forces qu'on mettra sur les pistons sont comme les ouvertures, elles seront en équilibre. D'où il paroît qu'un vaisseau plein d'eau est un nouveau principe de mécanique, et une machine nouvelle pour multiplier les forces à tel degré qu'on voudra, puisqu'un homme, par ce moyen, pourra enlever tel fardeau qu'on lui proposera.

Et l'on doit admirer qu'il se rencontre en cette machine nouvelle cet ordre constant qui se trouve en toutes les anciennes; savoir, le levier, le tour, la vis sans fin, etc., qui est, que le chemin est augmenté en même proportion que la force. Car il est visible que, comme une de ces ouvertures est centuple de l'autre, si l'homme qui pousse le petit piston, l'enfonçoit d'un pouce, il ne repousseroit l'autre que de la centième partie seulement; car comme cette impulsion se fait à cause de la continuité de l'eau, qui communique de l'un des pistons à l'autre, et qui fait que l'un ne peut se mouvoir sans pousser l'autre, il est visible que quand le petit piston s'est mû d'un pouce, l'eau qu'il a poussée poussant l'autre piston, comme elle trouve son ouverture cent fois plus large, elle n'y occupe que la centième partie de la hauteur. De sorte que le

chemin est au chemin, comme la force à la force; ce que l'on peut prendre même pour la vraie cause de cet effet : étant clair que c'est la même chose de faire faire un pouce de chemin à cent livres d'eau, que de faire faire cent pouces de chemin à une livre d'eau; et qu'ainsi, lorsqu'une livre d'eau est tellement ajustée avec cent livres d'eau, que les cent livres ne puissent se remuer un pouce, qu'elles ne fassent remuer la livre de cent pouces, il faut qu'elles demeurent en équilibre, une livre ayant autant de force pour faire faire un pouce de chemin à cent livres, que cent livres pour faire faire cent pouces à une livre.

On peut encore ajouter, pour plus grand éclaircissement, que l'eau est également pressée sous ces deux pistons; car si l'un a cent fois plus de poids que l'autre, aussi en revanche il touche cent fois plus de parties; et ainsi chacune l'est également : donc toutes doivent être en repos, parce qu'il n'y a pas plus de raison pourquoi l'une cède que l'autre. De sorte que si un vaisseau plein d'eau n'a qu'une seule ouverture large d'un pouce, par exemple, où l'on mette un piston chargé d'un poids d'une livre, ce poids fait effort contre toutes les parties du vaisseau généralement, à cause de la continuité et de la fluidité de l'eau : mais pour déterminer combien chaque partie souffre, en voici la règle. Chaque partie large d'un pouce, comme l'ouverture, souffre autant que si elle étoit poussée par le poids d'une livre (sans compter le poids de l'eau dont je ne parle pas ici, car je ne parle que du poids du piston), parce que le poids d'une livre presse le piston qui est à l'ouverture, et chaque portion du vaisseau plus ou moins grande, souffre précisément plus ou moins à proportion de sa grandeur, soit que cette portion soit vis-à-vis de l'ouverture ou à côté, loin ou près; car la continuité et la fluidité de l'eau rendent toutes ces choses-là égales et indifférentes : de sorte qu'il faut que la matière dont le vaisseau est fait, ait assez de résistance en toutes ses parties pour soutenir tous ces efforts : si sa résistance est moindre en quelqu'une, elle crève; si elle est plus grande, il en fournit ce qui est nécessaire, et le reste demeure inutile en cette occasion : tellement que si on fait une ouverture nouvelle à ce vaisseau, il faudra, pour arrêter l'eau qui en jailliroit, une force égale à la résistance que cette partie devoit avoir, c'est-à-dire une force qui soit à celle d'une livre, comme cette dernière ouverture est à la première.

Voici encore une preuve qui ne pourra être entendue que par les seuls géomètres, et peut être passée par les autres.

Je prends pour principe, que jamais un corps ne se meut par son poids, sans que son centre de gravité descende. D'où je prouve que les deux pistons figurés en la figure 7, sont en équilibre en cette sorte; car leur centre de gravité commun est au point qui divise la ligne, qui joint leurs centres de gravité particuliers, en la proportion réciproque de leurs poids; qu'ils se meuvent maintenant, s'il est possible : donc leurs chemins seront entre eux comme leurs poids réciproquement, comme nous avons fait voir : or, si on prend leur centre de gravité commun en cette seconde situation, on le trouvera précisément au même endroit que la première fois; car il se trouvera toujours au point qui divise la ligne, qui joint leurs centres de gravité particuliers, en la proportion réciproque

de leurs poids; donc, à cause du parallélisme des lignes de leurs chemins, il se trouvera en l'intersection des deux lignes qui joignent les centres de gravité dans les deux situations : donc le centre de gravité commun sera au même point qu'auparavant : donc les deux pistons, considérés comme un seul corps, se sont mus, sans que le centre de gravité commun soit descendu; ce qui est contre le principe : donc ils ne peuvent se mouvoir : donc ils seront en repos, c'est-à-dire en équilibre; ce qu'il falloit démontrer.

J'ai démontré par cette méthode, dans un petit *Traité de Mécanique* la raison de toutes les multiplications de forces qui se trouvent en tous les autres instrumens de mécanique qu'on a jusqu'à présent inventés. Car je fais voir en tous, que les poids inégaux qui se trouvent en équilibre par l'avantage des machines, sont tellement disposés par la construction des machines, que leur centre de gravité commun ne sauroit jamais descendre, quelque situation qu'ils prissent : d'où il s'ensuit qu'ils doivent demeurer en repos, c'est-à-dire en équilibre.

Prenons donc pour très-véritable, qu'un vaisseau plein d'eau ayant des ouvertures et des forces à ces ouvertures qui leur soient proportionnées, elles sont en équilibre; et c'est le fondement et la raison de l'équilibre des liqueurs, dont nous allons donner plusieurs exemples.

Cette machine de mécanique pour multiplier les forces étant bien entendue, fait voir la raison pour laquelle les liqueurs pèsent suivant leur hauteur, et non pas suivant leur largeur, dans tous les effets que nous avons rapportés.

Car il est visible qu'en la figure 6, l'eau d'un petit tuyau contre-pèse un piston chargé de cent livres, parce que le vaisseau du fond est lui-même un vaisseau plein d'eau, ayant deux ouvertures, à l'une desquelles est le piston large, et à l'autre l'eau du tuyau, qui est proprement un piston pesant de lui-même, qui doit contre-peser l'autre, si leurs poids sont entre eux comme leurs ouvertures.

Aussi en la figure 5, l'eau du tuyau menu est en équilibre avec un poids de cent livres, parce que le vaisseau du fond qui est large, et peu haut, est un vaisseau clos de toutes parts, plein d'eau, ayant deux ouvertures, l'une en bas, large, où est le piston; l'autre en haut, menue, où est le petit tuyau, dont l'eau est proprement un piston pesant de lui-même, et contre-pesant l'autre, à cause de la proportion des poids aux ouvertures; car il n'importe pas si ces ouvertures sont vis-à-vis ou non, comme il a été dit.

Où l'on voit que l'eau de ces tuyaux ne fait autre chose que ce que feroient des pistons de cuivre également pesans; puisqu'un piston de cuivre pesant une once, seroit aussi bien en équilibre avec le poids de cent livres, comme le petit filet d'eau pesant une once : de sorte que la cause de l'équilibre d'un petit poids avec un plus grand, qui paroît en tous ces exemples, n'est pas en ce que ces corps qui pèsent si peu, et qui en contre-pèsent de bien plus pesans, sont d'une matière liquide; car cela n'est pas commun à tous les exemples, puisque ceux où de petits pistons de cuivre en contre-pèsent de si pesans, montrent la même

chose; mais en ce que la matière qui s'étend dans le fond des vaisseaux depuis une ouverture jusqu'à l'autre, est liquide; car cela est commun à tous, et c'est la véritable cause de cette multiplication.

Aussi dans l'exemple de la figure 5, si l'eau qui est dans le petit tuyau se glaçoit, et que celle qui est dans le vaisseau large du fond demeurât liquide, il faudroit cent livres pour soutenir le poids de cette glace; mais si l'eau qui est dans le fond se glace, soit que l'autre se gèle ou demeure liquide, il ne faut qu'une once pour la contre-peser.

D'où il paroît bien clairement que c'est la liquidité du corps qui communique d'une des ouvertures à l'autre, qui cause cette multiplication de forces, parce que le fondement en est, comme nous avons déjà dit, qu'un vaisseau plein d'eau est une machine de mécanique pour multiplier les forces.

Passons aux autres effets dont cette machine nous découvre la raison.

CHAP. III. — *Exemple et raisons de l'équilibre des liqueurs.*

Si un vaisseau plein d'eau (fig. 8), a deux ouvertures, à chacune desquelles soit soudé un tuyau; si on verse de l'eau dans l'un et dans l'autre à pareille hauteur, les deux seront en équilibre.

Car leurs hauteurs étant pareilles, elles seront en la proportion de leurs grosseurs, c'est-à-dire de leurs ouvertures; donc les deux eaux de ces tuyaux sont proprement deux pistons pesant à proportion des ouvertures; donc ils seront en équilibre par les démonstrations précédentes.

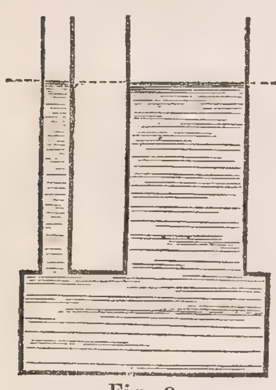


Fig. 8.

De là vient que si on verse de l'eau dans l'un de ces tuyaux seulement, elle fera remonter l'eau dans l'autre, jusqu'à ce qu'elle soit arrivée à la même hauteur, et alors elles demeureront en équilibre; car alors ce seront deux pistons pesant en la proportion de leurs ouvertures.

C'est la raison pour laquelle l'eau monte aussi haut que sa source.

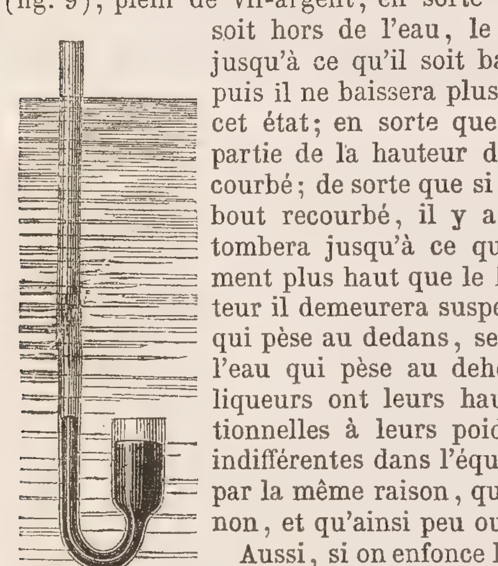
Que si l'on met des liqueurs différentes dans les tuyaux, comme de l'eau dans un et du vif-argent dans l'autre, ces deux liqueurs seront en équilibre, quand leurs hauteurs seront réciproquement proportionnelles à leurs pesanteurs; c'est-à-dire quand la hauteur de l'eau sera quatorze fois plus grande que la hauteur du vif-argent, parce que le vif-argent pèse de lui-même quatorze fois plus que l'eau; car ce sera deux pistons, l'un d'eau, l'autre de vif-argent, dont les poids seront proportionnés aux ouvertures.

Et même quand le tuyau plein d'eau seroit cent fois plus menu que celui où seroit le vif-argent, ce petit filet d'eau tiendroit en équilibre toute cette large masse de vif-argent, pourvu qu'il eût quatorze fois plus de hauteur.

Tout ce que nous avons dit jusqu'à cette heure des tuyaux doit s'entendre de quelque vaisseau que ce soit, régulier ou non; car le même équilibre s'y rencontre : de sorte que si, au lieu de ces deux tuyaux que nous avons figurés à ces deux ouvertures, on y mettoit deux vaisseaux qui aboutissent aussi à ces deux ouvertures, mais qui fussent larges en quelques endroits, étroits en d'autres, et enfin tous irréguliers dans toute leur étendue, en y versant des liqueurs à la hauteur que nous avons dite, ces liqueurs seroient aussi bien en équilibre dans ces tuyaux irréguliers, que dans les uniformes, parce que les liqueurs ne pèsent que suivant leur hauteur, et non pas suivant leur largeur.

Et la démonstration en seroit facile, en inscrivant en l'un et en l'autre plusieurs petits tuyaux réguliers; car on feroit voir, par ce que nous avons démontré, que deux de ces tuyaux inscrits, qui se correspondent dans les deux vaisseaux, sont en équilibre : donc tous ceux d'un vaisseau seroient en équilibre avec tous ceux de l'autre. Ceux qui sont accoutumés aux inscriptions et aux circonscriptions de la géométrie, n'auront nulle peine à entendre cela; et il seroit bien difficile de le démontrer aux autres, au moins géométriquement.

Si l'on met dans une rivière un tuyau recourbé par le bout d'en bas (fig. 9), plein de vif-argent, en sorte toutefois que le bout d'en haut soit hors de l'eau, le vif-argent tombera en partie, jusqu'à ce qu'il soit baissé à une certaine hauteur, et puis il ne baissera plus, mais demeurera suspendu en cet état; en sorte que sa hauteur soit la quatorzième partie de la hauteur de l'eau au-dessus du bout recourbé; de sorte que si depuis le haut de l'eau jusqu'au bout recourbé, il y a quatorze pieds, le vif-argent tombera jusqu'à ce qu'il soit arrivé à un pied seulement plus haut que le bout recourbé, à laquelle hauteur il demeurera suspendu; car le poids du vif-argent qui pèse au dedans, sera en équilibre avec le poids de l'eau qui pèse au dehors du tuyau, à cause que ces liqueurs ont leurs hauteurs réciproquement proportionnelles à leurs poids, et que leurs largeurs sont indifférentes dans l'équilibre; et il est aussi indifférent par la même raison, que le bout recourbé soit large ou non, et qu'ainsi peu ou beaucoup d'eau y pèse.


Fig. 9.

Aussi, si on enfonce le tuyau plus avant, le vif-argent remonte, car le poids de l'eau est plus grand; et si on le hausse au contraire, le vif-argent baisse, car son poids surpasse l'autre; et si on penche le tuyau, le vif-argent remonte jusqu'à ce qu'il soit revenu à la hauteur nécessaire, qui avoit été diminuée en le penchant; car un tuyau penché n'a pas tant de hauteur que debout.

La même chose arrive en un tuyau simple (fig. 10), c'est-à-dire qui n'est point recourbé; car ce tuyau ouvert par en haut et par en bas étant plein de vif-argent, et enfoncé dans une rivière, pourvu que le bout d'en haut soit hors de l'eau, si le bout d'en bas est à quatorze

pieds avant dans l'eau, le vif-argent tombera, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus que la hauteur d'un pied; et là il demeurera suspendu par le poids de l'eau : ce qui est aisé à entendre; car l'eau touchant le vif-argent par-dessous, et non par-dessus, fait effort pour le pousser en haut, comme pour chasser un piston, et avec d'autant plus de force, qu'elle a plus de hauteur; tellement que le poids de ce vif-argent ayant autant de force pour tomber, que le poids de l'eau a pour le pousser en haut, tout demeure en contre-poids.


Fig. 10.

Aussi le vif-argent n'y étant pas, il est visible que l'eau entreroit dans ce tuyau, et y monteroit à quatorze pieds de hauteur, qui est celle de son niveau; donc ce pied de vif-argent pesant autant que ces quatorze pieds d'eau, dont il tient la place, il est naturel qu'il tienne l'eau dans le même équilibre où ces quatorze pieds d'eau le tiendroient.

Mais si on mettoit le tuyau si avant dans l'eau, que le bout d'en haut y entrât, alors l'eau entreroit dans le tuyau, et le vif-argent tomberoit; car l'eau pesant aussi bien au dedans qu'au dehors du tuyau, le vif-argent seroit sans un contre-poids nécessaire pour être soutenu.

Chap. IV. — *De l'équilibre d'une liqueur avec un corps solide.*

Nous allons maintenant donner des exemples de l'équilibre de l'eau avec des corps massifs, comme avec un cylindre de cuivre massif; car on le fera nager dans l'eau en cette sorte.

Il faut avoir un tuyau fort long, comme de vingt pieds, qui s'élargisse par le bout d'en bas, comme ce qu'on appelle un entonnoir (fig. 11) : si ce bout d'en bas est rond, et qu'on y mette un cylindre de cuivre fait au tour avec tant de justesse, qu'il puisse entrer et sortir dans l'ouverture de cet entonnoir, et y couler sans que l'eau puisse du tout couler entre deux, et qu'il serve ainsi de piston, ce qui est aisé à faire, on verra qu'en mettant le cylindre et cet entonnoir ensemble dans une rivière, en sorte toutefois que le bout du tuyau soit hors de l'eau, si l'on tient le tuyau avec la main, et qu'on abandonne le cylindre de cuivre à ce qui devra arriver, ce cylindre massif ne tombera point, mais demeurera suspendu, parce que l'eau le touche par-dessous et non par-dessus (car elle ne peut entrer dans le tuyau); ainsi l'eau le pousse en haut de la même sorte qu'elle poussoit le vif-argent dans l'exemple précédent, et avec autant de force que le poids de cuivre en a pour tomber en bas; et ainsi ces efforts contraires se contre-balancent. Il est vrai qu'il faut pour cet effet qu'il soit assez avant dans l'eau, pour faire qu'elle ait la hauteur nécessaire pour contre-peser le cuivre; de sorte que si ce cylindre a un pied de haut, il faut que depuis le haut de l'eau jusqu'au bas du cylindre, il y ait neuf pieds, à cause que le cuivre pèse de lui-même neuf fois autant que l'eau; aussi si l'eau n'a pas assez de hauteur, comme si on retire le tuyau plus

vers le haut de l'eau, son poids l'emporte, et il tombe; mais si on l'enfonce encore plus avant qu'il ne faut, comme à vingt pieds, tant s'en faut qu'il puisse tomber par son poids, qu'au contraire il faudroit employer une grande force pour le séparer et l'arracher d'avec l'entonnoir, car le poids de l'eau le pousse en haut avec une force de vingt pieds de haut. Mais si on perce le tuyau et que l'eau y entre, et pèse aussi bien sur le cylindre comme par-dessous, alors le cylindre tombera par son poids, comme le vif-argent dans l'autre exemple, parce qu'il n'a plus le contre-poids qu'il faut pour le soutenir.

Si ce tuyau, tel que nous venons de le figurer, est recourbé (fig. 12), et qu'on y mette un cylindre de bois, et le tout dans l'eau, en sorte néanmoins que le bout d'en haut sorte de l'eau, le bois ne remontera pas, quoique l'eau l'environne; mais, au contraire, il s'enfoncera dans le tuyau, à cause qu'elle le touche par-dessus, et non pas par-dessous; car elle ne peut entrer dans le tuyau, et ainsi elle le pousse en bas par tout son poids, et point du tout en haut; car elle ne le touche pas par-dessous.

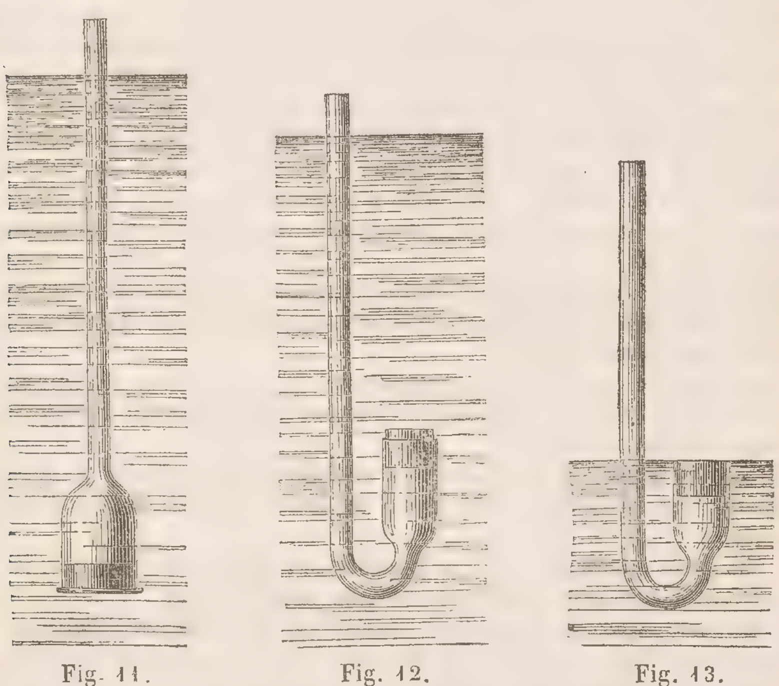


Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13.

Que si ce cylindre étoit à fleur d'eau (fig. 13), c'est-à-dire qu'il fût enfoncé seulement en sorte que l'eau ne fût pas au-dessus de lui, mais aussi qu'il n'eût rien hors de l'eau; alors il ne seroit poussé ni en haut, ni en bas, par le poids de l'eau; car elle ne le touche ni par-dessus, ni par-dessous, puisqu'elle ne peut entrer dans le tuyau; et elle le touche seulement par tous ses côtés . ainsi il ne remonteroit pas, car rien ne l'élève, et il tomberoit au contraire, mais par son propre poids seulement.

Que si le bout d'en bas du tuyau étoit tourné de côté, comme une crosse, et qu'on y mît un cylindre, et le tout dans l'eau, en sorte toujours que le bout d'en haut sorte de l'eau, le poids de l'eau le poussera de côté au dedans du tuyau, parce qu'elle ne le touche pas du côté qui lui est opposé, et elle agira de cette sorte avec d'autant plus de force, qu'elle aura plus de hauteur.

Chap. V. — *Des corps qui sont tout enfoncés dans l'eau.*

Nous voyons par là que l'eau pousse en haut les corps qu'elle touche par-dessous; qu'elle pousse en bas ceux qu'elle touche par-dessus; et qu'elle pousse de côté ceux qu'elle touche par le côté opposé : d'où il est aisé de conclure que quand un corps est tout dans l'eau, comme l'eau le touche par-dessus, par-dessous et par tous les côtés, elle fait effort pour le pousser en haut, en bas et vers tous les côtés : mais comme sa hauteur est la mesure de la force qu'elle a dans toutes ces impressions, on verra bien aisément lequel de tous ces efforts doit prévaloir.

Car il paroît d'abord que comme elle a une pareille hauteur sur toutes les faces des côtés, elle les poussera également; et partant ce corps ne recevra aucune impression vers aucun côté, non plus qu'une girouette entre deux vents égaux. Mais comme l'eau a plus de hauteur sur la face d'en bas que sur celle d'en haut, il est visible qu'elle le poussera plus en haut qu'en bas : comme la différence de ces hauteurs de l'eau est la hauteur du corps même, il est aisé d'entendre que l'eau le pousse plus en haut qu'en bas, avec une force égale au poids d'un volume d'eau pareil à ce corps.

De sorte qu'un corps qui est dans l'eau y est porté de la même sorte, que s'il étoit dans un bassin de balance, dont l'autre fût chargé d'un volume d'eau égal au sien.

D'où il paroît que s'il est de cuivre ou d'une autre matière qui pèse plus que l'eau en pareil volume, il tombe; car son poids l'emporte sur celui qui le contre-balance.

S'il est de bois, ou d'une autre matière plus légère que l'eau en pareil volume, il monte avec toute la force dont le poids de l'eau le surpasse.

Et s'il pèse également, il ne descend ni ne monte, comme la cire qui se tient à peu près dans l'eau au lieu où on la met.

De là vient que le seau d'un puits n'est pas difficile à hausser tant qu'il est dans l'eau, et qu'on ne sent son poids que quand il commence à en sortir, de même qu'un seau plein de cire ne seroit non plus difficile à hausser étant dans l'eau. Ce n'est pas que l'eau aussi bien que la cire ne pèsent autant dans l'eau que dehors; mais c'est qu'étant dans l'eau, ils ont un contre-poids qu'ils n'ont plus quand ils en sont tirés : de même qu'un bassin de balance chargé de cent livres n'est pas difficile à hausser, si l'autre l'est également.

De là vient que quand du cuivre est dans l'eau, on le sent moins pesant précisément du poids d'un volume d'eau égal au sien : de sorte que s'il pèse neuf livres en l'air, il ne pèse plus que huit livres dans

l'eau; parce que l'eau, en pareil volume qui le contre-balance, pèse une livre; et dans l'eau de la mer il pèse moins, parce que l'eau de la mer pèse plus, à peu près d'une quarante-cinquième partie.

Par la même raison, deux corps, l'un de cuivre, l'autre de plomb, étant également pesans, et par conséquent de différens volumes, puisqu'il faut plus de cuivre pour faire la même pesanteur, on les trouvera en équilibre, en les mettant chacun dans un bassin de balance : mais si on met cette balance dans l'eau, ils ne sont plus en équilibre; car chacun étant contre-pesé par un volume d'eau égal au sien, le volume de cuivre étant plus grand que celui de plomb, il y a un grand contre-poids; et partant le poids du plomb est le maître.

Ainsi deux poids de différente matière étant ajustés dans un parfait équilibre, de la dernière justesse où les hommes peuvent arriver, s'ils sont en équilibre quand l'air est fort sec, ils ne le sont plus quand l'air est humide.

C'est par le même principe que, quand un homme est dans l'eau, tant s'en faut que le poids de l'eau le pousse en bas, qu'au contraire elle le pousse en haut : mais il pèse plus qu'elle; et c'est pourquoi il ne laisse pas de tomber, mais avec bien moins de violence qu'en l'air, parce qu'il est contre-pesé par un volume d'eau pareil au sien, qui pèse presque autant que lui; et s'il pesoit autant, il nageroit. Aussi en donnant un coup à terre, ou faisant le moindre effort contre l'eau, il s'élève et nage : et dans les bains d'eau bourbeuse, un homme ne sauroit enfoncer, et si on l'enfonce, il remonte de lui-même.

Par la même cause, quand on se baigne dans une cuve, on n'a point de peine à hausser le bras, tant qu'il est dans l'eau; mais quand on le sort de l'eau, on sent qu'il pèse beaucoup, à cause qu'il n'a plus le contre-poids d'un volume d'eau pareil au sien, qu'il avoit étant dans l'eau.

Enfin, les corps qui nagent sur l'eau, pèsent précisément autant que l'eau dont ils occupent la place; car l'eau les touchant par-dessous, et non par-dessus, les pousse seulement en haut.

Et c'est pourquoi une platine de plomb étant mise en figure convexe, elle nage, parce qu'elle occupe une grande place dans l'eau par cette figure; au lieu que si elle étoit massive, elle n'occuperoit jamais dans l'eau que la place d'un volume d'eau égal au volume de sa matière, qui ne suffiroit pas pour la contre-peser.

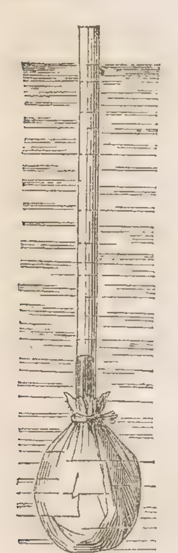
Chap. VI. — *Des corps compressibles qui sont dans l'eau.*

On voit, par tout ce que j'ai montré, de quelle sorte l'eau agit contre tous les corps qui y sont, en les pressant par tous les côtés : d'où il est aisé à juger que, si un corps compressible y est enfoncé, elle doit le comprimer en dedans vers le centre; et c'est aussi ce qu'elle fait, comme on va voir dans les exemples suivans.

Si un soufflet qui a le tuyau fort long, comme de vingt pieds, est dans l'eau, en sorte que le bout du fer sorte hors de l'eau, il sera difficile à ouvrir, si on a bouché les petits trous qui sont à l'une des ailes;

au lieu qu'on l'ouvriroit sans peine, s'il étoit en l'air, à cause que l'eau le comprime de tous côtés par son poids : mais si on y emploie toute la force qui y est nécessaire, et qu'on l'ouvre : si peu qu'on relâche de cette force, il se referme avec violence (au lieu qu'il se tiendroit tout ouvert, s'il étoit dans l'air), à cause du poids de la masse de l'eau qui le presse. Aussi plus il est avant dans l'eau, plus il est difficile à ouvrir, parce qu'il y a une plus grande hauteur d'eau à supporter.

C'est ainsi que si on met un tuyau dans l'ouverture d'un ballon (fig. 14), et qu'on lie le ballon autour du bout du tuyau long de vingt pieds, en versant du vif-argent dans le tuyau jusqu'à ce que le ballon en soit plein, le tout étant mis dans une cuve pleine d'eau, en sorte que le bout du tuyau sorte hors de l'eau, on verra le vif-argent monter du ballon dans le tuyau, jusqu'à une certaine hauteur, à cause que le poids de l'eau pressant le ballon de tous côtés, le vif-argent qu'il contient étant pressé également en tous ses points, hormis en ceux qui sont à l'entrée du tuyau (car l'eau n'y a point d'accès, le tuyau qui sort de l'eau l'empêchant), il est poussé des lieux où il est pressé vers celui où il ne l'est pas ; et ainsi il monte dans le tuyau jusqu'à une hauteur à laquelle il pèse autant que l'eau qui est au dehors du tuyau.


Fig. 14.

En quoi il arrive la même chose que si on pressoit le ballon entre les mains ; car on feroit sans difficulté remonter sa liqueur dans le tuyau, et il est visible que l'eau qui l'environne le presse de la même sorte.

C'est par la même raison que, si un homme met le bout d'un tuyau de verre, long de vingt pieds, sur sa cuisse, et qu'il se mette en cet état dans une cuve pleine d'eau, en sorte que le bout d'en haut du tuyau soit hors de l'eau, sa chair s'enflera à la partie qui est à l'ouverture du tuyau, et il s'y formera une grosse tumeur avec douleur, comme si sa chair y étoit sucée et attirée par une ventouse, parce que le poids de l'eau comprimant son corps de tous côtés, hormis en la partie qui est à la bouche du tuyau qu'elle ne peut toucher, à cause que le tuyau où elle ne peut entrer empêche qu'elle n'y arrive ; la chair est poussée des lieux où il y a de la compression, au lieu où il n'y en a point ; et plus il y a de hauteur d'eau, plus cette enflure est grosse : et quand on ôte l'eau, l'enflure cesse ; et de même si on fait entrer l'eau dans le tuyau ; car le poids de l'eau affectant aussi bien cette partie que les autres, il n'y a pas plus d'enflure en celle-là qu'aux autres.

Cet effet est tout conforme au précédent ; car le vif-argent en l'un, et la chair de cet homme en l'autre, étant pressés en toutes leurs parties excepté en celles qui sont à la bouche des tuyaux, ils sont poussés dans le tuyau autant que la force du poids de l'eau le peut faire.

Si l'on met au fond d'une cuve pleine d'eau un ballon où l'air ne soit pas fort pressé, on verra qu'il sera comprimé sensiblement : et à mesure qu'on ôtera l'eau, il s'élargira peu à peu, parce que le poids de la masse

de l'eau qui est au-dessus de lui le comprime de tous côtés vers le centre, jusqu'à ce que le ressort de cet air comprimé soit aussi fort que le poids de l'eau qui le presse.

Si l'on met au fond de la même cuve pleine d'eau un ballon plein d'air pressé extrêmement, on n'y remarquera aucune compression : ce n'est pas que l'eau ne le presse; car le contraire paroît dans l'autre ballon, et dans celui où étoit le vif-argent, dans le soufflet et dans tous les autres exemples; mais c'est qu'elle n'a pas la force de le comprimer sensiblement, parce qu'il l'étoit déjà beaucoup : de la même sorte que, quand un ressort est bien roide, comme celui d'une arbalète, il ne peut être plié sensiblement par une force médiocre, qui en comprimeroit un plus foible bien visiblement.

Et qu'on ne s'étonne pas de ce que le poids de l'eau ne comprime pas ce ballon visiblement, et que néanmoins on le comprime d'une façon fort considérable, en appuyant seulement le doigt dessus, quoiqu'on le presse alors avec moins de force que l'eau. La raison de cette différence est que, quand le ballon est dans l'eau, elle le presse de tous côtés, au lieu que quand on le presse avec le doigt, il n'est pressé qu'en une partie seulement : or, quand on le presse avec le doigt en une partie seulement, on l'enfonce beaucoup et sans peine, d'autant que les parties voisines ne sont pas pressées, et qu'ainsi elles reçoivent facilement ce qui est ôté de celle qui l'est; de sorte que, comme la matière qu'on chasse du seul endroit pressé, se distribue à tout le reste, chacune en a peu à recevoir; et ainsi il y a un enfoncement en cette partie, qui devient fort visible par la comparaison de toutes les parties qui l'environnent, et qui en sont exemptes.

Mais si on venoit à presser aussi bien toutes les autres parties comme celle-là, chacune rendant ce qu'elle avoit reçu de la première, elle reviendroit à son premier état, parce qu'elles seroient pressées elles-mêmes aussi bien qu'elle : et comme il n'y auroit plus qu'une compression générale de toutes les parties vers le centre, on ne verroit plus de compression en aucun endroit particulier; et l'on ne pourroit juger de cette compression générale, que par la comparaison de l'espace qu'il occupe à celui qu'il occupoit; et comme ils seroient très-peu différens, il seroit impossible de le remarquer. D'où l'on voit combien il y a de différence entre presser une partie seulement, ou presser généralement toutes les parties.

Il en est de même d'un corps dont on presse toutes les parties, hors une seulement; car il s'y fait une enflure par le regorgement des autres, comme il a paru en l'exemple d'un homme dans l'eau, avec un tuyau sur sa cuisse. Aussi si l'on presse le même ballon entre les mains, quoiqu'on tâche de toucher chacune de ses parties, il y en aura toujours quelqu'une qui s'échappera entre les doigts, où il se formera une grosse tumeur : mais s'il étoit possible de le presser partout également, on ne le comprimeroit jamais sensiblement, quelque effort qu'on y employât, pourvu que l'air du ballon fût déjà bien pressé de lui-même; et c'est ce qui arrive quand il est dans l'eau; car elle le touche de tous côtés.

Chap. VII. — *Des animaux qui sont dans l'eau.*

Tout cela nous découvre pourquoi l'eau ne comprime point les animaux qui y sont, quoiqu'elle presse généralement tous les corps qu'elle environne, comme nous l'avons fait voir par tant d'exemples : car ce n'est pas qu'elle ne les presse, mais c'est que, comme nous avons déjà dit, comme elle les touche de tous côtés, elle ne peut causer ni d'enflure, ni d'enfoncement en aucune partie en particulier, mais seulement une condensation générale de toutes les parties vers le centre, qui ne sauroit être visible, si elle n'est grande, et qui ne peut être qu'extrêmement légère, à cause que la chair est bien compacte.

Car si elle ne le touchoit qu'en une partie seulement, ou si elle le touchoit en toutes, excepté en une, pourvu que ce fût en une hauteur considérable, l'effet en seroit remarquable, comme nous l'avons fait voir; mais le pressant en toutes, rien ne paroît.

Il est aisé de passer de là à la raison pour laquelle les animaux qui sont dans l'eau n'en sentent pas le poids.

Car la douleur que nous sentons, quand quelque chose nous presse, est grande, si la compression est grande; parce que la partie pressée est épuisée de sang, et que les chairs, les nerfs et les autres parties qui la composent, sont poussés hors de leur place naturelle, et cette violence ne peut arriver sans douleur. Mais si la compression est petite, comme quand on effleure si doucement la peau avec le doigt, qu'on ne prive pas la partie qu'on touche de sang, qu'on n'en détourne ni la chair, ni les nerfs, et qu'on n'y apporte aucun changement; il n'y doit aussi avoir aucune douleur sensible; et si on nous touche en cette sorte en toutes les parties du corps, nous ne devons sentir aucune douleur d'une compression si légère.

Et c'est ce qui arrive aux animaux qui sont dans l'eau; car le poids les comprime à la vérité, mais si peu, que cela n'est aucunement perceptible, par la raison que nous avons fait voir : si bien qu'aucune partie n'étant pressée, ni épuisée de sang, aucun nerf, ni veine, ni chair n'étant détournés (car tout étant également pressé, il n'y a pas plus de raison pourquoi ils fussent poussés vers une partie que vers l'autre), et tout enfin demeurant sans changement, tout doit demeurer sans douleur et sans sentiment.

Et qu'on ne s'étonne pas de ce que ces animaux ne sentent point le poids de l'eau; et que néanmoins ils sentiroient bien si on appuyoit seulement le doigt dessus, quoiqu'on les pressât alors avec moins de force que l'eau; car la raison de cette différence est que, quand ils sont dans l'eau, ils sont pressés de tous les côtés généralement; au lieu que quand on les presse avec le doigt, ils ne le sont qu'en une seule partie. Or, nous avons montré que cette différence est la cause pour laquelle on les comprime bien visiblement par le bout du doigt qui les touche; et qu'ils ne le sont pas visiblement par le poids de l'eau, quand même il seroit augmenté du centuple : et comme le sentiment est toujours proportionné à la compression, cette même différence est la cause pour laquelle ils sentent bien le doigt qui les presse, et non pas le poids de l'eau.

Et ainsi la vraie cause qui fait que les animaux dans l'eau n'en sentent pas le poids, est qu'ils sont pressés également de toutes parts.

Aussi si l'on met un ver dans de la pâte, quoiqu'on le pressât entre les mains, on ne pourroit jamais l'écraser, ni seulement le blesser, ni le comprimer; parce qu'on le presseroit en toutes ses parties : l'expérience qui suit va le prouver. Il faut avoir un tuyau de verre, bouché par en bas, à demi plein d'eau, où on jette trois choses; savoir : un petit ballon à demi plein d'air, et un autre tout plein d'air, et une mouche (car elle vit dans l'eau tiède aussi bien que dans l'air); et mettre un piston dans ce tuyau qui aille jusqu'à l'eau. Il arrivera que, si on presse ce piston avec telle force qu'on voudra, comme en mettant des poids dessus en grande quantité, cette eau pressée pressera tout ce qu'elle enferme : aussi le ballon mol sera bien visiblement comprimé; mais le ballon dur ne sera non plus comprimé que s'il n'y avoit rien qui le pressât, ni la mouche non plus, et elle ne sentira aucune douleur sous ce grand poids; car on la verra se promener avec liberté et vivacité le long du verre, et même s'envoler dès qu'elle sera hors de cette prison.

Il ne faut pas avoir beaucoup de lumière pour tirer de cette expérience tout ce que nous avons déjà assez démontré.

On voit que ce poids presse tous ces corps autant qu'il peut.

On voit qu'il comprime le ballon mol; par conséquent il presse aussi celui qui est à côté; car la même raison est pour l'un que pour l'autre; mais on voit qu'il n'y paroît aucune compression.

D'où vient donc cette différence? et d'où pourroit-elle arriver, sinon de la seule chose en quoi ils diffèrent? qui est que l'un est plein d'un air pressé, et qu'on y a poussé par force, au lieu que l'autre est seulement à demi plein, et qu'ainsi l'air mol qui est dans l'un est capable d'une grande compression, dont l'autre est incapable, parce qu'il est bien compacte, et que l'eau qui le presse, l'environnant de tous côtés, ne peut y faire d'impression sensible, parce qu'il fait arcade de tous côtés.

On voit aussi que cet animal n'est point comprimé; et pourquoi, sinon par la même raison pour laquelle le ballon plein d'air ne l'est pas? et enfin on voit qu'il ne sent aucune douleur par la même cause.

Que si on mettoit au fond de ce tuyau de la pâte au lieu d'eau, et le ballon et cette mouche dans cette pâte, en mettant le piston dessus et le pressant, la même chose arriveroit.

Donc puisque cette condition d'être pressé de tous côtés, fait que la compression ne peut être sensible ni douloureuse, ne faut-il pas demeurer d'accord que cette seule raison rend le poids de l'eau insensible aux animaux qui y sont?

Qu'on ne dise donc plus que c'est parce que l'eau ne pèse pas sur elle-même, car elle pèse partout également; ou qu'elle pèse d'une autre manière que les corps solides, car tous les poids sont de même nature; et voici un poids solide qu'une mouche supporte sans le sentir.

Et si on veut encore quelque chose de plus touchant, qu'on ôte le piston, et qu'on verse de l'eau dans le tuyau, jusqu'à ce que l'eau qu'on aura mise au lieu du piston, pèse autant que le piston même ; il est

sans doute que la mouche ne sentira non plus le poids de cette eau que celui du piston D'où vient donc cette insensibilité sous un si grand poids dans ces deux exemples ? Est-ce que le poids est d'eau ? Non, car quand le poids est solide, elle arrive de même. Disons donc que c'est seulement parce que cet animal est environné d'eau, car cela seul est commun aux deux exemples; aussi c'en est la véritable raison.

Aussi, s'il arrivoit que toute l'eau qui est au-dessus de cet animal vînt à se glacer, pourvu qu'il en restât tant soit peu au-dessous de lui de liquide, et qu'ainsi il en fût tout environné, il ne sentiroit non plus le poids de cette glace, qu'il faisoit auparavant le poids de l'eau.

Et si toute l'eau de la rivière se glaçoit à la réserve de celle qui seroit à un pied près du fond, les poissons qui y nageroient ne sentiroient non plus le poids de cette glace, que celui de l'eau où elle se résoudroit ensuite.

Et ainsi les animaux dans l'eau n'en sentent pas le poids; non pas parce que ce n'est que de l'eau qui pèse dessus, mais parce que c'est de l'eau qui les environne.

TRAITÉ

DE LA PESANTEUR DE LA MASSE DE L'AIR.

CHAP. I. — *Que la masse de l'air a de la pesanteur; qu'elle presse par son poids tous les corps qu'elle enferme.*

On ne conteste plus aujourd'hui que l'air est pesant; on sait qu'un ballon pèse plus enflé que désenflé : cela suffit pour le conclure; car s'il étoit léger, plus on en mettroit dans le ballon, plus le tout auroit de légèreté; car le tout en auroit davantage qu'une partie seulement : or, puisqu'au contraire plus on y en met, plus le tout est pesant, il s'ensuit que chaque partie est elle-même pesante, et partant que l'air est pesant.

Ceux qui en désireront de plus longues preuves n'ont qu'à les chercher dans les auteurs qui en ont traité exprès.

Si on objecte que l'air est léger quand il est pur, mais que celui qui nous environne n'est pas l'air pur, parce qu'il est mêlé de vapeurs et de corps grossiers, et que ce n'est qu'à cause de ces corps étrangers qu'il est pesant, je réponds, en un mot, que je ne connois point cet air pur, et qu'il seroit peut-être difficile de le trouver; mais je ne parle, dans tout ce discours, que de l'air tel qu'il est dans l'état où nous le respirons, sans penser s'il est composé ou non; et c'est ce corps-là, ou simple, ou composé, que j'appelle l'air, et duquel je dis qu'il est pesant; ce qui ne peut être contredit; et c'est tout ce qui m'est nécessaire dans la suite.

Ce principe posé, je ne m'arrêterai qu'à en tirer quelques conséquences.

1. Puisque chaque partie de l'air est pesante, il s'ensuit que la masse entière de l'air, c'est-à-dire la sphère entière de l'air, est pesante; et comme la sphère de l'air n'est pas infinie en son étendue, qu'elle a des bornes, aussi la pesanteur de la masse de tout l'air n'est pas infinie.

2. Comme la masse de l'eau de la mer presse par son poids la partie de la terre qui lui sert de fond, et que si elle environnoit toute la terre, au lieu qu'elle n'en couvre qu'une partie, elle presseroit par son poids toute la surface de la terre : ainsi la masse de l'air couvrant toute la face de la terre, ce poids la presse en toutes les parties.

3. Comme le fond d'un seau où il y a de l'eau est plus pressé par le poids de l'eau, quand il est tout plein que quand il ne l'est qu'à demi, et qu'il l'est d'autant plus qu'il y a plus de hauteur d'eau : aussi les lieux élevés, comme les sommets des montagnes, ne sont pas si pressés par le poids de la masse de l'air, que les lieux profonds, comme les vallons; parce qu'il y a plus d'air au-dessus des vallons, qu'au-dessus des sommets des montagnes; car tout l'air qui est le long de la montagne pèse sur le vallon, et non pas sur le sommet; parce qu'il est au-dessus de l'un et au-dessous de l'autre.

4. Comme les corps qui sont dans l'eau sont pressés de toutes parts par le poids de l'eau qui est au-dessus, comme nous l'avons montré au *Traité de l'Équilibre des liqueurs ;* ainsi les corps qui sont dans l'air sont pressés de tous côtés par le poids de la masse de l'air qui est au-dessus.

5. Comme les animaux qui sont dans l'eau n'en sentent pas le poids; ainsi nous ne sentons pas le poids de l'air, par la même raison : et comme on ne pourroit pas conclure que l'eau n'a point de poids, de ce qu'on ne le sent pas quand on y est enfoncé; ainsi on ne peut pas conclure que l'air n'a pas de pesanteur, de ce que nous ne la sentons pas. Nous avons fait fait voir la raison de cet effet dans l'*Équilibre des liqueurs*.

6. Comme il arriveroit en un grand amas de laine, si on en avoit assemblé de la hauteur de vingt ou trente toises, que cette masse se comprimeroit elle-même par son propre poids, et que celle qui seroit au fond seroit bien plus comprimée que celle qui seroit au milieu, ou près du haut, parce qu'elle seroit pressée d'une plus grande quantité de laine : ainsi la masse de l'air, qui est un corps compressible et pesant, aussi bien que la laine, se comprime elle-même par son propre poids; et l'air qui est au bas, c'est-à-dire dans les lieux profonds, est bien plus comprimé que celui qui est plus haut, comme aux sommets des montagnes, parce qu'il est chargé d'une plus grande quantité d'air.

7. Comme il arriveroit en cette masse de laine, que si on prenoit une poignée de celle qui est dans le fond, dans l'état pressé où on la trouve, et qu'on la portât, en la tenant toujours pressée de la même sorte, au milieu de cette masse, elle s'élargiroit d'elle-même, étant plus proche du haut, parce qu'elle auroit une moindre quantité de laine à suppor-

ter en ce lieu-là; ainsi si l'on portoit de l'air, tel qu'il est ici-bas, et comprimé comme il y est, sur le sommet d'une montagne, par quelque artifice que ce soit, il devroit s'élargir lui-même, et devenir au même état que celui qui l'environneroit sur cette montagne, parce qu'il seroit chargé de moins d'air en cet endroit-là qu'il n'étoit au bas : et, par conséquent, si on prenoit un ballon à demi-plein d'air seulement, et non pas tout enflé, comme ils le sont d'ordinaire, et qu'on le portât sur une montagne, il devroit arriver qu'il seroit plus enflé au haut de la montagne, et qu'il devroit s'élargir à proportion de ce qu'il seroit moins chargé; et la différence devroit en être visible, si la quantité d'air qui est le long de la montagne, et de laquelle il est déchargé, a un poids assez considérable pour causer un effet et une différence sensible.

Il y a une liaison si nécessaire de ces conséquences avec leur principe, que l'un ne peut être vrai, sans que les autres le soient également : et comme il est assuré que l'air qui s'étend depuis la terre jusqu'au haut de la sphère a de la pesanteur, tout ce que nous en avons conclu est également véritable.

Mais quelque certitude qu'on trouve en ces conclusions, il me semble qu'il n'y a personne qui, même en les recevant, ne souhaitât de voir cette dernière conséquence confirmée par l'expérience, parce qu'elle enferme, et toutes les autres, et son principe même; car il est certain que si on voyoit un ballon tel que nous l'avons figuré, s'enfler à mesure qu'on l'élève, il n'y auroit aucun lieu de douter que cette enflure ne vînt de ce que l'air du ballon étoit plus pressé en bas qu'en haut, puisqu'il n'y a aucune autre chose qui pût causer qu'il s'enflât, vu même qu'il fait plus froid sur les montagnes que dans les vallons; et cette compression de l'air du ballon ne pourroit avoir d'autre cause que le poids de la masse de l'air; car on l'a pris tel qu'il étoit au bas, et sans le comprimer, puisque même le ballon étoit flasque et à demi plein seulement; et partant cela prouveroit absolument que l'air est pesant; que la masse de l'air est pesante; qu'elle presse par son poids tous les corps qu'elle enferme; qu'elle presse plus les lieux bas que les lieux hauts; qu'elle se comprime elle-même par son poids; que l'air est plus comprimé en bas qu'en haut. Et comme dans la physique les expériences ont bien plus de force pour persuader que les raisonnemens, je ne doute pas qu'on ne désirât de voir les uns confirmés par les autres.

Mais si l'on en faisoit l'expérience, j'aurois cet avantage, qu'au cas qu'il n'arrivât aucune différence à l'enflure du ballon sur les plus hautes montagnes, cela ne détruiroit pas ce que j'ai conclu; parce que je pourrois dire qu'elles n'ont pas encore assez de hauteur pour causer une différence sensible : au lieu que s'il arrivoit un changement extrêmement considérable, comme de la huitième ou neuvième partie, certainement elle seroit toute convaincante pour moi; et il ne pourroit plus rester aucun doute de la vérité de tout ce que j'ai établi.

Mais c'est trop différer; il faut dire en un mot que l'épreuve en a été faite, et qu'elle a réussi en cette sorte.

Expérience faite en deux lieux élevés l'un au-dessus de l'autre d'environ cinq cents toises.

Si l'on prend un ballon à demi plein d'air, flasque et mol, et qu'on le porte au bout d'un fil sur une montagne haute de cinq cents toises, il arrivera qu'à mesure qu'on montera, il s'enflera de lui-même, et quand il sera en haut, il sera tout plein et gonflé comme si on y avoit soufflé de l'air de nouveau; et en descendant, il s'aplatira peu à peu par les mêmes degrés; de sorte qu'étant arrivé au bas, il sera revenu à son premier état.

Cette expérience prouve tout ce que j'ai dit de la masse de l'air, avec une force toute convaincante : aussi étoit-il nécessaire de bien l'établir, parce que c'est le fondement de tout ce discours.

Il ne reste qu'à faire remarquer que la masse de l'air est plus pesante en un temps qu'en un autre; savoir, quand il est plus chargé de vapeurs, ou plus comprimé par le froid.

Remarquons donc, 1° que la masse de l'air est pesante; 2° qu'elle a un poids limité; 3° qu'elle est plus pesante en un temps qu'en un autre; 4° qu'elle est plus pesante en de certains lieux qu'en d'autres, comme dans les vallons; 5° qu'elle presse par son poids tous les corps qu'elle enferme, et d'autant plus qu'elle a plus de pesanteur

Chap. II. — *Que la pesanteur de la masse de l'air produit tous les effets qu'on a jusqu'ici attribués à l'horreur du vide.*

Ce chapitre est divisé en deux sections : dans la première est un récit des principaux effets qu'on a attribués à l'horreur du vide; et dans la seconde, on montre qu'ils viennent de la pesanteur de l'air.

Sect. I. — *Récit des effets qu'on attribue à l'horreur du vide.*

Il y a plusieurs effets qu'on prétend que la nature produit par une horreur qu'elle a pour le vide; en voici les principaux.

I. Un soufflet, dont toutes les ouvertures sont bien bouchées, est difficile à ouvrir; si on essaye de le faire, on y sent de la résistance, comme si ses ailes étoient collées. Et le piston d'une seringue bouchée résiste quand on essaye de le tirer, comme s'il tenoit au fond.

On prétend que cette résistance vient de l'horreur que la nature a pour le vide qui arriveroit dans ce soufflet, s'il pouvoit être élargi; ce qui se confirme, parce qu'elle cesse dès qu'il est débouché, et que l'air peut s'y insinuer pour le remplir quand on l'ouvrira.

II. Deux corps polis, étant appliqués l'un contre l'autre, sont difficiles à séparer et semblent adhérer.

Ainsi un chapeau étant mis sur une table, est difficile à lever tout à coup.

Ainsi un morceau de cuir mis sur un pavé, et levé promptement, l'arrache et l'enlève.

On prétend que cette adhérence vient de l'horreur que la nature a du

vide, qui arriveroit pendant le temps qu'il faudroit à l'air pour arriver des extrémités jusqu'au milieu.

III. Quand une seringue trempe dans l'eau, en tirant le piston, l'eau suit et monte comme si elle lui adhéroit.

Ainsi l'eau monte dans une pompe aspirante, qui n'est proprement qu'une longue seringue, et suit son piston, quand on l'élève, comme si elle lui adhéroit.

On prétend que cette élévation de l'eau vient de l'horreur que la nature a du vide, qui arriveroit à la place que le piston quitte, si l'eau n'y montoit pas, parce que l'air ne peut y entrer : ce qui se confirme, parce que si l'on fait des fentes par où l'air puisse entrer, l'eau ne s'élève plus.

De même, si on met le bout d'un soufflet dans l'eau, en l'ouvrant promptement l'eau y monte pour le remplir, parce que l'air ne peut y succéder, et principalement si on bouche les trous qui sont à une des ailes.

Ainsi, quand on met la bouche dans l'eau, et qu'on suce, on attire l'eau par la même raison; car le poumon est comme un soufflet dont la bouche est comme l'ouverture.

Ainsi, en respirant, on attire l'air comme un soufflet en s'ouvrant attire l'air pour remplir sa capacité.

Ainsi, quand on met des étoupes allumées dans un plat plein d'eau, et un verre par-dessus, à mesure que le feu des étoupes s'éteint, l'eau monte dans le verre, parce que l'air qui est dans le verre, et qui étoit raréfié par le feu, venant à se condenser par le froid, attire l'eau et la fait monter avec soi, en se resserrant pour remplir la place qu'il quitte; comme le piston d'une seringue attire l'eau avec soi quand on le tire.

Ainsi, les ventouses attirent la chair, et forment une ampoule; parce que l'air de la ventouse, qui étoit raréfié par le feu de la bougie, venant à se condenser par le froid quand le feu est éteint, il attire la chair avec soi pour remplir la place qu'il quitte, comme il attiroit l'eau dans l'exemple précédent.


Fig. 15.

IV. Si l'on met une bouteille pleine d'eau, et renversée le goulot en bas, dans un vaisseau plein d'eau, l'eau de la bouteille demeure suspendue sans tomber.

On prétend que cette suspension vient de l'horreur que la nature a pour le vide, qui arriveroit à la place que l'eau quitteroit en tombant, parce que l'air ne pourroit y succéder : et on le confirme, parce que si on fait une fente par où l'air puisse s'insinuer, toute l'eau tombe incontinent.

On peut faire la même épreuve avec un tuyau long, par exemple, de dix pieds, bouché par le bout d'en haut, et ouvert par le bout d'en bas (fig. 15); car s'il est plein d'eau, et que le bout d'en bas trempe dans un vaisseau plein d'eau, elle demeurera toute suspendue dans le tuyau, au lieu qu'elle tomberoit incontinent si on avoit débouché le haut du tuyau.

On peut faire la même chose avec un tuyau pareil, bouché par en haut, et recourbé par le bout d'en bas (fig. 16), sans le mettre dans un vaisseau plein d'eau, comme on avoit mis l'autre : car s'il est plein d'eau, elle y demeurera aussi suspendue; au lieu que si on débouchoit le haut, elle jailliroit incontinent avec violence par le bout recourbé en forme de jet d'eau.

Enfin, on peut faire la même chose avec un simple tuyau, sans qu'il soit recourbé, pourvu qu'il soit fort étroit par en bas (fig. 17) : car s'il est bouché par en haut, l'eau y demeurera suspendue; au lieu qu'elle en tomberoit avec violence, si on débouchoit le bout d'en haut.

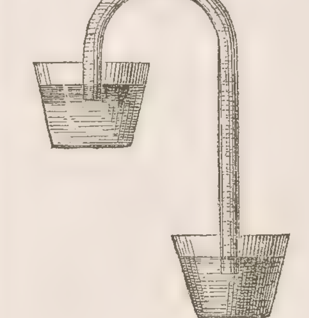


Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18.

C'est ainsi qu'un tonneau plein de vin n'en lâche pas une goutte, quoique le robinet soit ouvert, si on ne débouche le haut pour donner vent.

V. Si l'on remplit d'eau un tuyau fait en forme de croissant renversé, ce qu'on appelle d'ordinaire un *siphon*, dont chaque jambe trempe dans un vaisseau plein d'eau (fig. 18), il arrivera que si peu qu'un des vaisseaux soit plus haut que l'autre, toute l'eau du vaisseau le plus élevé montera dans la jambe qui y trempe jusqu'au haut du siphon, et se rendra par l'autre dans le vaisseau le plus bas où elle trempe; de sorte que si on substitue toujours de l'eau dans le vaisseau le plus élevé, ce flux sera continuel.

On prétend que cette élévation de l'eau vient de l'horreur que la nature a du vide qui arriveroit dans le siphon, si l'eau de ces deux branches tomboit de chacune dans son vaisseau, comme elle y tombe en effet quand on fait une ouverture au haut du siphon par où l'air peut s'y insinuer.

Il y a plusieurs autres effets pareils que j'omets à cause qu'ils sont tous semblables à ceux dont j'ai parlé, et qu'en tous il ne paroît autre chose, sinon que tous les corps contigus résistent à l'effort qu'on fait pour les séparer quand l'air ne peut succéder entre deux : soit que cet effort vienne de leur propre poids, comme dans les exemples où l'eau monte, et demeure suspendue malgré son poids; soit qu'il vienne des forces qu'on emploie pour les désunir, comme dans les premiers exemples.

Voilà quels sont les effets qu'on attribue vulgairement à l'horreur du vide ; nous allons faire voir qu'ils viennent de la pesanteur de l'air.

SECT. II. — *Que la pesanteur de la masse de l'air produit tous les effets qu'on attribue à l'horreur du vide.*

Si l'on a bien compris, dans le *Traité de l'Équilibre des liqueurs*, de quelle manière elles font impression par leur poids contre tous les corps qui y sont, on n'aura point de peine à comprendre comme le poids de la masse de l'air, agissant sur tous les corps, y produit tous les effets qu'on avoit attribués à l'horreur du vide; car ils sont tout à fait semblables, comme nous allons le montrer sur chacun.

I. Que la pesanteur de la masse de l'air cause la difficulté d'ouvrir un soufflet bouché.

Pour faire entendre comme la pesanteur de la masse de l'air cause la difficulté qu'on sent à ouvrir un soufflet, lorsque l'air ne peut y entrer, je ferai voir une pareille résistance causée par le poids de l'eau. Il ne faut pour cela que se remettre en mémoire ce que j'ai dit dans l'*Équilibre des liqueurs*, qu'un soufflet dont le tuyau est long de vingt pieds ou plus, étant mis dans une cuve pleine d'eau, en sorte que le bout du tuyau sorte hors de l'eau, il est difficile à ouvrir, et d'autant plus qu'il y a plus de hauteur d'eau; ce qui vient manifestement de la pesanteur de l'eau qui est au-dessus; car quand il n'y a point d'eau, il est très-aisé à ouvrir; et à mesure qu'on y en verse, cette résistance augmente, et est toujours égale au poids de l'eau qu'il porte, parce que comme cette eau ne peut y entrer à cause que le tuyau est hors de l'eau, on ne sauroit l'ouvrir sans soulever et sans soutenir toute la masse de l'eau; car celle qu'on écarte en l'ouvrant, ne pouvant pas entrer dans le soufflet, est forcée de se placer ailleurs, et ainsi de faire hausser l'eau, ce qui ne peut se faire sans peine; au lieu que s'il étoit crevé, et que l'eau pût y entrer, on l'ouvriroit et on le fermeroit sans résistance, à cause que l'eau y entreroit par ces ouvertures à mesure qu'on l'ouvriroit, et qu'ainsi en l'ouvrant on ne feroit point soulever l'eau.

Je ne crois pas que personne soit tenté de dire que cette résistance vienne de l'horreur du vide, et il est absolument certain qu'elle vient du seul poids de l'eau.

Or ce que nous disons de l'eau doit s'entendre de toute autre liqueur; car si on le met dans une cuve pleine de vin, on sentira une pareille résistance à l'ouvrir, et de même dans du lait, dans de l'huile, dans du vif-argent, et enfin dans quelque liqueur que ce soit. C'est donc une règle générale, et un effet nécessaire du poids des liqueurs, que si un soufflet est mis dans quelque liqueur que ce soit, en sorte qu'elle n'ait aucun accès dans le corps du soufflet, le poids de la liqueur qui est au-dessus fait qu'on ne peut l'ouvrir sans sentir de la résistance, parce qu'on ne sauroit l'ouvrir sans la supporter; et par conséquent, en appliquant cette règle générale à l'air en particulier, il sera véritable que quand un soufflet est bouché, en sorte que l'air n'y a point d'accès, le poids de la masse de l'air qui est au-dessus fait qu'on ne peut l'ouvrir sans sentir de la résistance, parce qu'on ne sauroit l'ouvrir sans faire

hausser toute la masse de l'air : mais dès qu'on y fait une ouverture, on l'ouvre et on le ferme sans résistance, parce que l'air peut y entrer et sortir, et qu'ainsi en l'ouvrant on ne hausse plus la masse de l'air; ce qui est tout conforme à l'exemple du soufflet dans l'eau.

D'où l'on voit que la difficulté d'ouvrir un soufflet bouché, n'est qu'un cas particulier de la règle générale de la difficulté d'ouvrir un soufflet dans quelque liqueur que ce soit, où elle n'a point d'accès.

Ce que nous avons dit de cet effet, nous allons le dire de chacun des autres, mais plus succinctement.

II. Que la pesanteur de la masse de l'air est la cause de la difficulté qu'on sent à séparer deux corps polis appliqués l'un contre l'autre.

Pour faire entendre comment la pesanteur de la masse de l'air cause la résistance que l'on sent, quand on veut arracher deux corps polis qui sont appliqués l'un contre l'autre, je donnerai un exemple d'une résistance toute pareille causée par le poids de l'eau, qui ne laissera aucun lieu de douter que l'air ne cause cet effet.

Il faut encore ici se remettre en mémoire ce qui a été rapporté dans l'*Équilibre des liqueurs*.

Que si l'on met un cylindre de cuivre fait au tour à l'ouverture d'un entonnoir fait aussi au tour, en sorte qu'ils soient si parfaitement ajustés, que ce cylindre entre et coule facilement dans cet entonnoir, sans que néanmoins l'eau puisse couler entre deux; et qu'on mette cette machine dans une cuve pleine d'eau, en sorte toutefois que la queue de l'entonnoir sorte hors de l'eau, en la faisant longue de vingt pieds, s'il est nécessaire; si ce cylindre est à quinze pieds avant dans l'eau, et que tenant l'entonnoir avec la main, on lâche le cylindre, et qu'on l'abandonne à ce qui doit en arriver, on verra que non-seulement il ne tombera pas, quoiqu'il n'y ait rien qui semble le soutenir; mais encore qu'il sera difficile à arracher d'avec l'entonnoir, quoiqu'il n'y adhère en aucune sorte; au lieu qu'il tomberoit par son poids avec violence, s'il n'étoit qu'à quatre pieds avant dans l'eau. J'en ai aussi fait voir la raison, qui est que l'eau le touchant par-dessous, et non pas par-dessus (car elle ne touche pas la face d'en haut, parce que l'entonnoir empêche qu'elle ne puisse y arriver), elle le pousse par le côté qu'elle touche vers celui qu'elle ne touche pas, et ainsi elle le pousse en haut, et le presse contre l'entonnoir.

La même chose doit s'entendre de toute autre liqueur; et par conséquent si deux corps sont polis et appliqués l'un contre l'autre, en tenant celui d'en haut avec la main, et en abandonnant celui qui est appliqué, il doit arriver que celui d'en bas demeure suspendu, parce que l'air le touche par-dessous, et non pas par-dessus; car il n'a point d'accès entre deux : et partant il ne peut point arriver à la face par où ils se touchent; d'où il s'ensuit par un effet nécessaire du poids de toutes les liqueurs en général, que le poids de l'air doit pousser ce corps en haut, et le presser contre l'autre; en sorte que si on essaye de les séparer, on y sente une extrême résistance : ce qui est tout conforme à l'effet du poids de l'eau.

D'où l'on voit que la difficulté de séparer deux corps polis, n'est qu'un cas particulier de la règle générale de l'impulsion de toutes les liqueurs en général contre un corps qu'elles touchent par une de ses faces, et non pas par celle qui lui est opposée.

III. Que la pesanteur de la masse de l'air est la cause de l'élévation de l'eau dans les seringues et dans les pompes.

Pour faire entendre comment la pesanteur de la masse de l'air fait monter l'eau dans les pompes à mesure qu'on tire le piston, je ferai voir un effet entièrement pareil du poids de l'eau, qui en fera parfaitement comprendre la raison en cette sorte.

Si l'on met à une seringue un piston bien long, par exemple, de dix pieds, et creux tout du long, ayant une soupape au bout d'en bas disposée d'une telle sorte qu'elle puisse donner passage du haut en bas, et non de bas en haut; et qu'ainsi cette seringue soit incapable d'attirer l'eau, ni aucune liqueur par-dessus le niveau de la liqueur, parce que l'air peut y entrer en toute liberté par le creux du piston : en mettant l'ouverture de cette seringue dans un vaisseau plein de vif-argent, et le tout dans une cuve pleine d'eau, en sorte toutefois que le haut du piston sorte hors de l'eau, il arrivera que si on tire le piston, le vif-argent montera et le suivra, comme s'il lui adhéroit; au lieu qu'il ne monteroit en aucune sorte, s'il n'y avoit point d'eau dans cette cuve, parce que l'air a un accès tout libre par le manche du piston creux, pour entrer dans le corps de la seringue.

Ce n'est donc pas de peur du vide; car quand le vif-argent ne monteroit pas à la place que le piston quitte, il n'y auroit point de vide, puisque l'air peut y entrer en toute liberté : mais c'est seulement parce que le poids de la masse de l'eau pesant sur le vif-argent du vaisseau, et le pressant en toutes ses parties, hormis en celles qui sont à l'ouverture de la seringue (car l'eau ne peut y arriver, à cause qu'elle en est empêchée par le corps de la seringue et par le piston) : ce vif-argent pressé en toutes ses parties, hormis en une, est poussé par le poids de l'eau vers celle-là, aussitôt que le piston en se levant lui laisse une place libre pour y entrer, et contre-pèse dans la seringue le poids de l'eau qui pèse au dehors.

Mais si l'on fait des fentes à la seringue par où l'eau puisse y entrer, le vif-argent ne montera plus, parce que l'eau y entre, et touche aussi bien les parties du vif-argent qui sont à la bouche de la seringue, que les autres; et ainsi tout étant également pressé, rien ne monte. Tout cela a été clairement démontré dans l'*Équilibre des liqueurs*.

On voit en cet exemple comment le poids de l'eau fait monter le vif-argent; et on pourroit faire un effet pareil avec le poids du sable, en ôtant toute l'eau de cette cuve : si au lieu de cette eau on y verse du sable, il arrivera que le poids du sable fera monter le vif-argent dans la seringue, parce qu'il le presse de même que l'eau faisoit, en toutes ses parties, hormis celle qui est à la bouche de la seringue; et ainsi il le pousse et le force d'y monter.

Et si on met les mains sur le sable, et qu'on le presse, on fera monter le vif-argent davantage au dedans de la seringue, et toujours jusqu'à une hauteur à laquelle il puisse contre-peser l'effort du dehors.

L'explication de ces effets fait entendre bien facilement pourquoi le poids de l'air fait monter l'eau dans les seringues ordinaires, à mesure qu'on hausse le piston : car l'air touchant l'eau du vaisseau en toutes ses parties, excepté en celles qui sont à l'ouverture de la seringue où il n'a point d'accès, parce que la seringue et le piston l'en empêchent, il est visible que ce poids de l'air la pressant en toutes ses parties, hormis en celle-là seulement, il doit l'y pousser et l'y faire monter, à mesure que le piston en s'élevant lui laisse la place libre pour y entrer, et contre-peser au dedans de la seringue le poids de l'air qui pèse au dehors, par la même raison, et avec la même nécessité que le vif-argent montoit, pressé par le poids de l'eau et par le poids du sable, dans l'exemple que nous venons de donner.

Il est donc visible que l'élévation de l'eau dans les seringues, n'est qu'un cas particulier de cette règle générale, qu'une liqueur étant pressée en toutes ses parties, excepté en quelqu'une seulement, par le poids de quelque autre liqueur; ce poids la pousse vers l'endroit où elle n'est point pressée.

IV. Que la pesanteur de la masse de l'air cause la suspension de l'eau dans les tuyaux bouchés par en haut.

Pour faire entendre comment la pesanteur de l'air tient l'eau suspendue dans les tuyaux bouchés par en haut, nous ferons voir un exemple entièrement pareil d'une suspension semblable causée par le poids de l'eau, qui en découvrira parfaitement la raison.

Et, premièrement, on peut dire d'abord que cet effet est entièrement compris dans le précédent; car comme nous avons montré que le poids de l'air fait monter l'eau dans les seringues, et qu'il l'y tient suspendue, ainsi le même poids de l'air tient l'eau suspendue dans un tuyau.

Afin que cet effet ne manque pas plus que les autres, d'un autre tout pareil à qui on le compare; nous dirons qu'il ne faut pour cela que se remettre ce que nous avons dit dans l'*Équilibre des liqueurs*, qu'un tuyau long de dix pieds ou plus, et recourbé par en bas (fig. 9), plein de mercure, étant mis dans une cuve pleine d'eau, en sorte que le bout d'en haut sorte de l'eau, le mercure demeure suspendu en partie au dedans du tuyau; savoir, à la hauteur où il peut contre-peser l'eau qui pèse au dehors; et que même une pareille suspension arrive dans un tuyau qui n'est point recourbé, et qui est simplement ouvert en haut et en bas, en sorte que le bout d'en haut soit hors de l'eau.

Or, il est visible que cette suspension ne vient pas de l'horreur du vide, mais seulement de ce que l'eau pesant hors le tuyau, et non pas dedans, et touchant le mercure d'un côté, et non pas de l'autre, elle le tient suspendu par son poids à une certaine hauteur : aussi si l'on perce le tuyau, en sorte que l'eau puisse y entrer, incontinent tout le mercure tombe, parce que l'eau touche partout, et agissant aussi bien dedans que

dehors le tuyau, il n'a plus de contre-poids. Tout cela a été dit dans l'*Equilibre des liqueurs*.

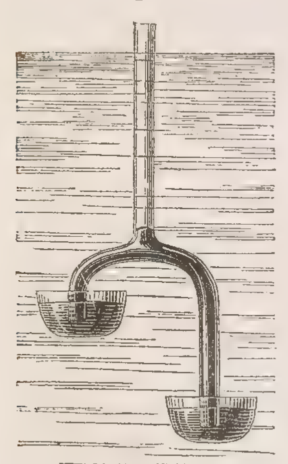
Ce qui étant un effet nécessaire de l'équilibre des liqueurs, il n'est pas étrange que quand un tuyau est plein d'eau, bouché par en haut, et recourbé par en bas, l'eau y demeure suspendue; car l'air pesant sur la partie de l'eau qui est à la recourbure, et non pas sur celle qui est dans le tuyau, puisque le bouchon l'en empêche, c'est une nécessité absolue qu'il tienne l'eau du tuyau suspendue au dedans, pour contre-peser son poids qui est au dehors, de la même sorte que le poids de l'eau tenoit le mercure en équilibre dans l'exemple que nous venons de donner.

Et de même quand le tuyau n'est pas recourbé; car l'air touchant l'eau par-dessous, et non pas par-dessus, puisque le bouchon l'empêche d'y toucher, c'est une nécessité inévitable que le poids de l'air soutienne l'eau : de la même sorte que l'eau soutient le mercure dans l'exemple que nous venons de donner, et que l'eau pousse en haut et soutient un cylindre de cuivre qu'elle touche par-dessous, et non pas par-dessus ; mais si on débouche le haut, l'eau tombe; car l'air touche l'eau dessous et dessus, et pèse dedans et dehors le tuyau.

D'où l'on voit que cet effet, que le poids de l'air soutient suspendues les liqueurs qu'il touche d'un côté et non pas de l'autre, est un cas de la règle générale, que les liqueurs contenues dans quelque tuyau que ce soit, immergé dans une autre liqueur, qui les presse par un côté et non pas par l'autre, y sont tenues suspendues par l'équilibre des liqueurs.

V. Que la pesanteur de la masse de l'air fait monter l'eau dans les siphons.

Pour faire entendre comment la pesanteur de l'air fait monter l'eau dans les siphons, nous allons faire voir que la pesanteur de l'eau fait monter le vif-argent dans un siphon tout ouvert par en haut, et où l'air a un libre accès; d'où l'on verra comment le poids de l'air produit cet effet. C'est ce que nous ferons en cette sorte.


Fig. 19.

Si un siphon (fig. 19) a une de ses jambes environ haute d'un pied, l'autre d'un pied et un pouce, et qu'on fasse une ouverture au haut du siphon, où l'on insère un tuyau long de vingt pieds, et bien soudé à cette ouverture; et qu'ayant rempli le siphon de vif-argent, on mette chacune de ces jambes dans un vaisseau aussi plein de vif-argent, et le tout dans une cuve pleine d'eau, à quinze ou seize pieds avant dans l'eau, et qu'ainsi le bout du tuyau sorte hors de l'eau, il arrivera que si un des vaisseaux est tant soit peu plus haut que l'autre, par exemple, d'un pouce, tout le vif-argent du vaisseau le plus élevé montera dans le siphon jusqu'au haut, et se rendra par l'autre

jambe dans le vaisseau le plus bas, par un flux continuel; et si on substitue toujours du vif-argent dans le vaisseau le plus haut, le flux sera perpétuel; mais si on fait une ouverture au siphon par où l'eau puisse entrer, incontinent le vif-argent tombera de chaque jambe dans chaque vaisseau, et l'eau lui succédera.

Cette élévation du vif-argent ne vient pas de l'horreur du vide, car l'air a un accès tout libre dans le siphon : aussi si on ôtoit l'eau de la cuve, le vif-argent de chaque jambe tomberoit chacun dans son vaisseau, et l'air lui succéderoit par le tuyau qui est tout ouvert.

Il est donc visible que le poids de l'eau cause cette élévation, parce qu'elle pèse sur le vif-argent qui est dans les vaisseaux, et non pas sur celui qui est dans le siphon; et par cette raison elle le force par son poids de monter et de couler comme il fait; mais dès qu'on a percé le siphon et qu'elle peut y entrer, elle n'y fait plus monter le vif-argent, parce qu'elle pèse aussi bien au dedans qu'au dehors du siphon.

Or par la même raison, et avec la même nécessité que l'eau fait ainsi monter le mercure dans un siphon quand elle pèse sur les vaisseaux, et qu'elle n'a point d'accès au dedans du siphon; aussi le poids de l'air fait monter l'eau dans les siphons ordinaires, parce qu'il pèse sur l'eau des vaisseaux où leurs jambes trempent, et qu'il n'a nul accès dans le corps du siphon, parce qu'il est tout clos : et dès qu'on y fait une ouverture, l'eau n'y monte plus : mais elle tombe, au contraire, dans chaque vaisseau, et l'air lui succède, parce qu'alors l'air pèse aussi bien au dedans qu'au dehors du siphon.

Il est visible que ce dernier effet n'est qu'un cas de la règle générale; et que si on entend bien pourquoi le poids de l'eau fait monter le vif-argent dans l'exemple que nous avons donné, on verra en même temps pourquoi le poids de l'air fait monter l'eau dans les siphons ordinaires; c'est pourquoi il faut bien éclaircir la raison pour laquelle le poids de l'eau produit cet effet, et faire entendre pourquoi c'est le vaisseau élevé qui se vide dans le plus bas, plutôt que le plus bas dans l'autre.

Pour cela il faut remarquer que l'eau pesant sur le vif-argent qui est dans chaque vaisseau, et point du tout sur celui des jambes qui y trempent, il arrive que le vif-argent des vaisseaux est pressé par le poids de l'eau à monter dans chaque jambe du siphon jusqu'au haut du siphon, et encore plus, s'il se pouvoit, à cause que l'eau a seize pieds de haut, et que le siphon n'a qu'un pied, et qu'un pied de vif-argent n'égale le poids que de quatorze pieds d'eau : d'où il se voit que le poids de l'eau pousse le vif-argent dans chaque jambe jusqu'au haut, et qu'il a encore de la force de reste; d'où il arrive que le vif-argent de chaque jambe étant poussé en haut par le poids de l'eau, ils se combattent au haut du siphon, et se poussent l'un l'autre : de sorte qu'il faut que celui qui a le plus de force prévale.

Or, cela sera aisé à supputer; car il est clair que puisque l'eau a plus de hauteur sur le vaisseau le plus bas d'un pouce, elle pousse en haut le vif-argent de la longue jambe plus fortement que celui de l'autre, de la force que lui donne un pouce de hauteur; d'où il semble d'abord qu'il doit résulter que le vif-argent doit être poussé de la jambe la plus longue

dans la plus courte; mais il faut considérer que le poids du vif-argent de chaque jambe résiste à l'effort que l'eau fait pour le pousser en haut, mais ils ne résistent pas également; car comme le vif-argent de la longue jambe a plus de hauteur d'un pouce, il résiste plus fortement de la force que lui donne la hauteur d'un pouce : donc le mercure de la plus longue jambe est plus poussé en haut par le poids de l'eau, de la force de l'eau de la hauteur d'un pouce; mais il est plus poussé en bas par son propre poids, de la force du vif-argent de la hauteur d'un pouce : or un pouce de vif-argent pèse plus qu'un pouce d'eau : donc le vif-argent de la plus courte jambe est poussé en haut avec plus de force; et partant il doit monter, et continuer à monter tant qu'il y aura du vif-argent dans le vaisseau où elle trempe.

D'où il paroît que la raison qui fait que c'est le vaisseau le plus haut qui se vide dans le plus bas, est que le vif-argent est une liqueur plus pesante que l'eau. Il en arriveroit au contraire, si le siphon étoit plein d'huile, qui est une liqueur plus légère que l'eau, et que les vaisseaux aussi où il trempe en fussent pleins, et le tout dans la même cuve pleine d'eau; car alors il arriveroit que l'huile du vaisseau le plus bas monteroit, et couleroit par le haut du siphon dans le vaisseau le plus élevé, par les mêmes raisons que nous venons de dire; car l'eau poussant toujours l'huile du vaisseau le plus bas avec plus de force, à cause qu'elle a un pouce de plus de hauteur, et l'huile de la longue jambe résistant, et pesant davantage d'un pouce qu'elle a de plus de hauteur, il arriveroit qu'un pouce d'huile pesant moins qu'un pouce d'eau, l'huile de la longue jambe seroit poussée en haut avec plus de force que l'autre; et partant elle couleroit, et se rendroit du vaisseau le plus bas dans le plus élevé.

Et enfin, si le siphon étoit plein d'une liqueur qui pesât autant que l'eau de la cuve, alors, ni l'eau du vaisseau le plus élevé ne se rendroit pas dans l'autre, ni celle du plus bas dans celle du plus élevé; mais tout demeureroit en repos, parce qu'en supputant tous les efforts, on verra qu'ils sont tous égaux.

Voilà ce qu'il étoit nécessaire de bien faire entendre, pour savoir à fond la raison pour laquelle les liqueurs s'élèvent dans les siphons; après quoi il est trop aisé de voir pourquoi le poids de l'air fait monter l'eau dans les siphons ordinaires, et pourquoi du vaisseau le plus élevé dans le plus bas, sans s'y arrêter davantage, puisque ce n'est qu'un cas de la règle générale que nous venons de donner.

VI. Que la pesanteur de la masse de l'air cause l'enflure de la chair, quand on y applique des ventouses.

Pour faire entendre comment le poids de l'air fait enfler la chair à l'endroit où l'on met des ventouses, nous rapporterons un effet entièrement pareil, causé par le poids de l'eau, qui n'en laissera aucun doute.

C'est celui que nous avons rapporté dans l'*Équilibre des liqueurs*, où nous avons fait voir qu'un homme mettant contre sa cuisse le bout d'un

tuyau de verre long de vingt pieds, et se mettant en cet état au fond d'une cuve pleine d'eau, en sorte que le bout d'en haut du tuyau sorte hors de l'eau; il arrive que sa chair s'enfle en la partie qui est à l'ouverture du tuyau, comme si quelque chose la suçoit en cet endroit-là.

Or il est évident que cette enflure ne vient pas de l'horreur du vide, car ce tuyau est tout ouvert, et elle n'arriveroit pas, s'il n'y avoit que peu d'eau dans la cuve : il est très-constant qu'elle vient de la seule pesanteur de l'eau; parce que cette eau pressant la chair en toutes les parties du corps, excepté en celle-là seulement qui est à l'entrée du tuyau (car elle n'y a point d'accès), elle y renvoie le sang et les chairs qui font cette enflure.

Et ce que nous disons du poids de l'eau doit s'entendre du poids de quelque autre liqueur que ce soit; car si l'homme se met dans une cuve pleine d'huile, la même chose arrivera, tant que cette liqueur le touchera en toutes ses parties, excepté une seulement : mais si on ôte le tuyau, l'enflure cesse; parce que l'eau venant à affecter cette partie aussi bien que les autres, il n'y aura pas plus d'impression qu'aux autres.

Ce qui étant bien compris, on verra que c'est un effet nécessaire, que quand on met une bougie sur la chair et une ventouse par-dessus, aussitôt que le feu s'éteint, la chair s'enfle; car l'air de la ventouse, qui est très-raréfié par le feu, venant à se condenser par le froid qui lui succède dès que le feu est éteint, il arrive que le poids de l'air touche le corps en toutes les parties, excepté en celles qui sont en la ventouse; car il n'y a point d'accès; et par conséquent la chair doit s'enfler en cet endroit, et le poids de l'air doit renvoyer le sang et les chairs voisines qu'il presse, dans celle qu'il ne presse pas, par la même raison et avec la même nécessité que le poids de l'eau le faisoit en l'exemple que nous avons donné, quand elle touchoit le corps en toutes ses parties, excepté en une seulement : d'où il paroît que l'effet de la ventouse n'est qu'un cas particulier de la règle générale de l'action de toutes les liqueurs contre un corps qu'elles touchent en toutes ses parties, excepté une.

VII. Que la pesanteur de la masse de l'air est cause de l'attraction qui se fait en suçant.

Il ne faut plus maintenant qu'un mot pour expliquer pourquoi, quand on met la bouche sur l'eau et qu'on suce, l'eau monte : car nous savons que le poids de l'air presse l'eau en toutes les parties, excepté en celles qui sont à la bouche; car il les touche toutes, excepté celle-là; et de là vient que quand les muscles de la respiration, élevant la poitrine, font la capacité du dedans du corps plus grande, l'air du dedans ayant plus de place à remplir qu'il n'avoit auparavant, a moins de force pour empêcher l'eau d'entrer dans la bouche, que l'air de dehors, qui pèse sur cette eau de tous côtés hors cet endroit, n'en a pour l'y faire entrer.

Voilà la cause de cette attraction, qui ne diffère en rien de l'attraction des seringues.

VIII. Que la pesanteur de la masse de l'air est la cause de l'attraction du lait que les enfans tettent de leurs nourrices.

C'est ainsi que quand un enfant a la bouche à l'entour du bout de la mamelle de sa nourrice, quand il suce, il attire le lait; parce que la mamelle est pressée de tous côtés par le poids de l'air qui l'environne, excepté en la partie qui est dans la bouche de l'enfant; et c'est pourquoi, aussitôt que les muscles de la respiration font une place plus grande dans le corps de l'enfant, comme on vient de dire, et que rien ne touche le bout de la mamelle que l'air du dedans, l'air du dehors qui a plus de force et qui la comprime, pousse le lait par cette ouverture, où il y a moins de résistance : ce qui est aussi nécessaire et aussi naturel que quand le lait en sort, lorsqu'on presse le teton entre les deux mains.

IX. Que la pesanteur de la masse de l'air est la cause de l'attraction de l'air qui se fait en respirant.

Et par la même raison, lorsqu'on respire, l'air entre dans le poumon, parce que quand le poumon s'ouvre, et que le nez et tous les conduits sont libres et ouverts, l'air qui est à ces conduits, poussé par le poids de toute sa masse, y entre et y tombe par l'action naturelle et nécessaire de son poids; ce qui est si intelligible, si facile et si naïf, qu'il est étrange qu'on ait été chercher l'horreur du vide, des qualités occultes, et des causes si éloignées et si chimériques, pour en rendre la raison, puisqu'il est aussi naturel que l'air entre et tombe ainsi dans le poumon à mesure qu'il s'ouvre, que du vin tombe dans une bouteille quand on l'y verse.

Voilà de quelle sorte le poids de l'air produit tous les effets qu'on avoit jusqu'ici attribués à l'horreur du vide. Je viens d'en expliquer les principaux; s'il en reste quelqu'un, il est si aisé de l'entendre ensuite de ceux-ci, que je croirois faire une chose fort inutile et fort ennuyeuse, d'en rechercher d'autres pour les traiter en détail : et on peut même dire qu'on les avoit déjà tous vus comme en leur source dans le traité précédent, puisque tous ces effets ne sont que des cas particuliers de la règle générale de l'*Équilibre des liqueurs*.

Chap. III. — *Que comme la pesanteur de la masse de l'air est limitée, aussi les effets qu'elle produit sont limités.*

Puisque la pesanteur de l'air produit tous les effets qu'on avoit jusqu'ici attribués à l'horreur du vide, il doit arriver que, comme cette pesanteur n'est pas infinie, et qu'elle a des bornes, aussi ses effets doivent être limités; et c'est ce que l'expérience confirme, comme il paroîtra par celles qui suivent.

Aussitôt qu'on tire le piston d'une pompe aspirante ou d'une seringue, l'eau suit: et si on continue à l'élever, l'eau suivra toujours, mais non pas jusqu'à quelque hauteur qu'on l'élève; car il y a un certain degré qu'elle ne passe point, qui est à peu près à la hauteur de trente et un pieds; de sorte que tant qu'on n'élève le piston que jusqu'à cette

hauteur, l'eau s'y élève et demeure toujours contiguë au piston; mais aussitôt qu'on le porte plus haut, il arrive que le piston ne tire plus l'eau, et qu'elle demeure immobile et suspendue à cette hauteur, sans se hausser davantage; et à quelque hauteur qu'on élève le piston au delà, elle le laisse monter sans le suivre; parce que le poids de la masse de l'air pèse à peu près autant que l'eau à la hauteur de trente et un pieds. De sorte que comme il fait monter cette eau dans la seringue, parce qu'il pèse au dehors, et non pas au dedans, pour la contre-peser il la fait monter jusqu'à la hauteur à laquelle elle pèse autant que lui, et alors l'eau dans la seringue et l'air dehors pesant également, tout demeure en équilibre, de la même sorte que l'eau et du vif-argent se tiennent en équilibre, quand leurs hauteurs sont réciproquement comme leurs poids, comme nous l'avons tant fait voir dans l'*Équilibre des liqueurs :* et comme l'eau ne montoit que par cette seule raison, que le poids de l'air l'y forçoit; quand elle est arrivée à cette hauteur, où le poids de l'air ne peut plus la faire hausser, nulle autre cause ne la mouvant, elle demeure en ce point.

Et quelque grosseur qu'ait la pompe, l'eau s'y élève toujours a la même hauteur, parce que les liqueurs ne pèsent pas suivant leur grosseur, mais suivant leur hauteur, comme nous l'avons montré dans l'*Équilibre des liqueurs.*

Que si on élève du vif-argent dans une seringue, il montera jusqu'à la hauteur de deux pieds trois pouces et cinq lignes, qui est précisément celle à laquelle il pèse autant que l'eau à trente et un pieds, parce qu'elle pèsera alors autant que la masse de l'air.

Et si on élève de l'huile dans une pompe, elle s'élèvera environ près de trente-quatre pieds, et puis plus; parce qu'elle pèse autant à cette hauteur, que l'eau à trente et un pieds, et par conséquent autant que l'air, et ainsi des autres liqueurs.

Un tuyau bouché par en haut et ouvert par en bas, étant plein d'eau, s'il a une hauteur telle qu'on voudra au-dessous de trente et un pieds, toute l'eau y demeurera suspendue; parce que le poids de la masse de l'air est capable de l'y soutenir.

Mais s'il a plus de trente et un pieds de hauteur, il arrivera que l'eau tombera en partie, savoir : jusqu'à ce qu'elle soit baissée en sorte qu'elle n'ait plus que trente et un pieds de haut, et alors elle demeurera suspendue à cette hauteur, sans baisser davantage, de la même sorte que dans l'*Équilibre des liqueurs* on a vu que le vif-argent d'un tuyau mis dans une cuve pleine d'eau tomberoit en partie, jusqu'à ce que le vif-argent restât à la hauteur à laquelle il pèse autant que l'eau.

Mais si on mettoit dans ce tuyau du vif-argent au lieu d'eau, il arriveroit que le vif-argent tomberoit jusqu'à ce qu'il fût resté à la hauteur de deux pieds trois pouces cinq lignes, qui correspond précisément à trente et un pieds d'eau.

Et si on penche un peu ces tuyaux où l'eau et le vif-argent sont restés suspendus, il arrivera que ces liqueurs remonteront jusqu'à ce qu'elles soient revenues à la même hauteur qu'elles avoient, et qui étoit diminuée par cette inclinaison; parce que le poids de l'air prévaut tant

qu'elles sont au-dessous de cette hauteur, et est en équilibre quand elles y sont arrivées; ce qui est tout semblable à ce qui est rapporté au *Traité de l'Équilibre des liqueurs*, d'un tuyau de vif-argent mis dans une cuve pleine d'eau : et en redressant ce tuyau, les liqueurs ressortent, pour revenir toujours à leur même hauteur.

C'est ainsi que dans un siphon, toute l'eau du vaisseau le plus élevé monte et se rend dans le plus bas, tant que la branche du siphon qui y trempe est d'une hauteur telle qu'on voudra au-dessous de trente et un pieds; parce que, comme nous avons dit ailleurs, le poids de l'air peut bien hausser et tenir suspendue l'eau à cette hauteur; mais dès que la branche qui trempe dans le vaisseau élevé excède cette hauteur, il arrive que le siphon ne fait plus son effet; c'est-à-dire que l'eau du vaisseau élevé ne monte plus au haut du siphon pour se rendre dans l'autre, parce que le poids de l'air ne peut pas l'élever à plus de trente et un pieds : de sorte que l'eau se divise au haut du siphon, et tombe de chaque jambe dans chaque vaisseau, jusqu'à ce qu'elle soit restée à la hauteur de trente et un pieds au-dessus de chaque vaisseau, et demeure en repos suspendue à cette hauteur par le poids de l'air qui la contrepèse.

Si on penche un peu le siphon, l'eau remontera dans l'une et l'autre jambe, jusqu'à ce qu'elle soit à la même hauteur qui avoit été diminuée en l'inclinant, et si on le penche en sorte que le haut du siphon n'ait plus que la hauteur de trente et un pieds au-dessus du vaisseau le plus élevé, il arrivera que l'eau de la jambe qui y trempe sera au haut du siphon : de sorte qu'elle tombera dans l'autre jambe, et ainsi l'eau du vaisseau élevé lui succédant toujours, elle coulera toujours par un petit filet seulement; et si on incline davantage, l'eau coulera à plein tuyau.

Il faut entendre la même chose de toutes les autres liqueurs, en observant toujours la proportion de leur poids.

C'est ainsi que si on essaye d'ouvrir un soufflet, tant qu'on n'y emploiera qu'un certain degré de force, on ne le pourra pas; mais si on passe ce point, on l'ouvrira. Or, la force nécessaire est telle. Si ses ailes ont un pied de diamètre, il faudra, pour l'ouvrir, une force capable d'élever un vaisseau plein d'eau, d'un pied de diamètre, comme ses ailes, et long de trente et un pieds, qui est la hauteur où l'eau s'élève dans une pompe. Si ses ailes n'ont que six pouces de diamètre, il faudra, pour l'ouvrir, une force égale au poids de l'eau d'un vaisseau de six pouces de diamètre et haut de trente et un pieds, et ainsi du reste : de sorte qu'en pendant à une de ces ailes un poids égal à celui de cette eau, on l'ouvre, et un moindre poids ne sauroit le faire, parce que le poids de l'air qui le presse est précisément égal à celui de trente et un pieds d'eau.

Un même poids tire le piston d'une seringue bouchée, et un même poids sépare deux corps polis appliqués l'un contre l'autre; de sorte que s'ils ont un pouce de diamètre, en y appliquant une force égale au poids de l'eau, d'un pouce de grosseur et de trente et un pieds de hauteur, on les séparera.

Chap. IV. — *Que comme la pesanteur de la masse de l'air varie suivant les vapeurs qui arrivent, aussi les effets qu'elle produit doivent varier à proportion.*

Puisque la pesanteur de l'air cause tous les effets dont nous traitons, il doit arriver que comme cette pesanteur n'est pas toujours la même sur une même contrée, et qu'elle varie à toute heure, suivant les vapeurs qui y arrivent; ses effets ne doivent pas y être toujours uniformes; mais, au contraire, variables à toute heure : aussi l'expérience le confirme, et fait voir que la mesure de trente et un pieds d'eau que nous avons donnée pour servir d'exemple, n'est pas une mesure précise qui soit toujours exacte; car l'eau ne s'élève pas dans les pompes, et ne demeure pas toujours suspendue à cette hauteur précisément; au contraire elle s'élève quelquefois à trente et un pieds et demi, puis elle revient à trente et un pieds, puis elle baisse encore de trois pouces au-dessous, puis elle monte tout à coup d'un pied, suivant les variétés qui arrivent à l'air; et tout cela avec la même bizarrerie avec laquelle l'air se brouille et s'éclaircit.

Et l'expérience fait voir qu'une même pompe élève l'eau plus haut en un temps qu'en un autre d'un pied huit pouces; en sorte que l'on peut faire une pompe, et aussi un siphon par la même raison, d'une telle hauteur, qu'en un temps ils feront leur effet, et en un autre ils ne le feront point, selon que l'air sera plus ou moins chargé de vapeurs, ou que par quelque autre raison il pèsera plus ou moins; ce qui seroit une expérience assez curieuse, et qui seroit assez facile, en se servant du vif-argent au lieu d'eau, car par ce moyen l'on n'auroit pas besoin de si longs tuyaux pour la faire.

De là on doit entendre que l'eau demeure suspendue dans les tuyaux à une moindre hauteur en un temps qu'en un autre, et qu'un soufflet est plus aisé à ouvrir en un temps qu'en un autre en la même proportion précisément, et ainsi des autres effets; car ce qui se dit de l'un convient exactement avec tous les autres, chacun suivant sa nature.

Chap. V. — *Que comme le poids de la masse de l'air est plus grand sur les lieux profonds que sur les lieux élevés, aussi les effets qu'elle y produit sont plus grands à proportion.*

Puisque le poids de la masse de l'air produit tous les effets dont nous traitons, il doit arriver que comme elle n'est pas égale sur tous les lieux du monde, puisqu'elle est plus grande sur ceux qui sont les plus enfoncés, ces effets doivent aussi y être différens : aussi l'expérience le confirme, et fait voir que cette mesure de trente et un pieds, que nous avons prise pour servir d'exemple, n'est pas celle où l'eau s'élève dans les pompes, dans tous les lieux du monde; car elle s'y élève différemment en tous ceux qui ne sont pas à même niveau, et d'autant plus qu'ils sont enfoncés, et d'autant moins qu'ils sont plus élevés : de sorte que par les expériences qui en ont été faites en des lieux élevés l'un au-

dessus de l'autre de cinq ou six cents toises, on a trouvé une différence de quatre pieds trois pouces; de sorte que la même pompe qui élève l'eau en un endroit à la hauteur de trente pieds quatre pouces, ne l'élève en l'autre, plus haut d'environ cinq cents toises, qu'à la hauteur de vingt-six pieds un pouce, en même tempérament d'air; en quoi il y a différence de la sixième partie.

La même chose doit s'entendre de tous les autres effets, chacun suivant sa manière, c'est-à-dire, par exemple, que deux corps polis sont plus difficiles à se désunir en un vallon que sur une montagne, etc.

Or, comme cinq cents toises d'élévation causent quatre pieds trois pouces de différence à la hauteur de l'eau, les moindres hauteurs font de moindres différences à proportion; savoir, cent toises, environ dix pouces; vingt toises, environ deux pouces, etc.

L'instrument le plus propre pour observer toutes ces variations, est un tuyau de verre bouché par en haut, recourbé par en bas, de trois ou quatre pieds de haut, auquel on colle une bande de papier, divisée par pouces et lignes; car si on le remplit de vif-argent, on verra qu'il tombera en partie, et qu'il demeurera suspendu en partie; et on pourra remarquer exactement le degré auquel il sera suspendu; et il sera facile d'observer les variations qui y arriveront de la part des charges de l'air, par les changemens du temps, et celles qui y arriveront en le portant en un lieu plus élevé; car en le laissant en un même lieu, on verra qu'à mesure que le temps changera, il haussera et baissera; et on remarquera qu'il sera plus haut en un temps qu'en un autre, d'un pouce six lignes, qui répondent précisément à un pied huit pouces d'eau, que nous avons donné dans l'autre chapitre, pour la différence qui arrive de la part du temps.

Et en le portant du pied d'une montagne jusque sur son sommet, on verra que quand on sera monté de dix toises, il sera baissé de près d'une ligne; quand on sera monté de vingt toises, il sera baissé de deux lignes; quand on sera monté de cent toises, il sera baissé de neuf lignes; quand on sera monté de cinq cents toises, il sera baissé de trois pouces dix lignes; et redescendant, il remontera par les mêmes degrés.

Tout cela a été éprouvé sur la montagne du Puy-de-Dôme, en Auvergne, comme on verra par la relation de cette expérience qui est après ce Traité; et ces mesures en vif-argent répondent précisément à celles que nous venons de donner en l'eau.

La même chose doit s'entendre de la difficulté d'ouvrir un soufflet, et du reste.

Où l'on voit que la même chose arrive précisément dans les effets que la pesanteur de l'air produit, que dans ceux que la pesanteur de l'eau produit; car nous avons vu qu'un soufflet immergé dans l'eau et qui est difficile à ouvrir, à cause du poids de l'eau, l'est d'autant moins qu'on l'élève plus près de la fleur de l'eau; et que le vif-argent, dans un tuyau immergé dans l'eau, se tient suspendu à une hauteur plus ou moins grande, suivant qu'il est plus ou moins avant dans

l'eau; et tous ces effets, soit de la pesanteur de l'air, soit de celle de l'eau, sont les suites si nécessaires de l'équilibre des liqueurs, qu'il n'y a rien de plus clair au monde.

CHAP. VI — *Que, comme les effets de la pesanteur de la masse de l'air augmentent ou diminuent à mesure qu'elle augmente ou diminue, ils cesseroient entièrement si l'on étoit au-dessus de l'air, ou en un lieu où il n'y en eût point.*

Après avoir vu jusqu'ici que ces effets qu'on attribuoit à l'horreur du vide, et qui viennent en effet de la pesanteur de l'air, suivent toujours sa proportion, et qu'à mesure qu'elle augmente, ils augmentent; qu'à mesure qu'elle diminue, ils diminuent; et que par cette raison l'on voit que dans le tuyau plein de vif-argent il demeure suspendu à une hauteur d'autant moindre, qu'on le porte en un lieu plus élevé, parce qu'il reste moins d'air au-dessus de lui; de même que celui d'un tuyau immergé dans l'eau baisse à mesure qu'on l'élève vers la fleur de l'eau, parce qu'il reste moins d'eau pour le contre-peser : on peut conclure avec assurance que, si on l'élevoit jusqu'au haut de l'extrémité de l'air, et qu'on le portât entièrement hors de sa sphère, le vif-argent du tuyau tomberoit entièrement, puisqu'il n'y auroit plus aucun air pour le contre-peser, comme celui d'un tuyau immergé dans l'eau tombe entièrement, quand on le tire entièrement hors de l'eau.

La même chose arriveroit, si on pouvoit ôter tout l'air de la chambre où l'on feroit cette épreuve; car n'y ayant plus d'air qui pesât sur le bout du tuyau qui est recourbé, on doit croire que le vif-argent tomberoit, n'ayant plus son contre-poids.

Fig. 20.

Mais parce que l'une et l'autre de ces épreuves est impossible, puisque nous ne pouvons pas aller au-dessus de l'air, et que nous ne pourrions pas vivre dans une chambre dont tout l'air auroit été ôté, il suffit d'ôter l'air, non de toute la chambre, mais seulement d'alentour du bout recourbé, pour empêcher qu'il ne puisse y arriver, pour voir si tout le vif-argent retombera, quand il n'aura plus d'air qui le contre-pèse, et on pourra facilement le faire en cette façon.

Il faut avoir un tuyau recourbé par en bas, bouché par le bout A (fig. 20) et ouvert par le bout B, et un autre tuyau tout droit ouvert par les deux bouts M et N, mais inséré et soudé par le bout M, dans le bout recourbé de l'autre, comme il paroît en cette figure.

Il faut boucher B, qui est l'ouverture du bout recourbé du premier tuyau, avec le doigt ou autrement, comme avec une vessie de pourceau, et renverser le tuyau entier, c'est-à-dire les deux tuyaux qui n'en font proprement qu'un, puisqu'ils ont communication l'un dans l'autre; le remplir de vif-argent, et puis remettre le bout A en haut, et le bout N dans une écuelle pleine de vif-argent : il arrivera que le vif-argent

du tuyau d'en haut tombera entièrement, et sera tout reçu dans sa recourbure, si ce n'est qu'il y en aura une partie qui s'écoulera dans le tuyau d'en bas par le trou M; mais le vif-argent du tuyau d'en bas tombera en partie seulement, et demeurera suspendu aussi en partie, à une hauteur de vingt-six à vingt-sept pouces, suivant le lieu et le temps où l'on en fait l'épreuve. Or la raison de cette différence est que l'air pèse sur le vif-argent qui est dans l'écuelle au bout du tuyau d'en bas; et ainsi il tient son vif-argent du dedans suspendu et en équilibre; mais il ne pèse pas sur le vif-argent qui est au bout recourbé du tuyau d'en haut; car le doigt ou la vessie qui le bouche, empêche qu'il n'y ait d'accès : de sorte que, comme il n'y a aucun air qui pèse en cet endroit, le vif-argent du tuyau tombe librement, parce que rien ne le soutient et ne s'oppose à sa chute.

Mais comme rien ne se perd dans la nature, si le vif-argent qui est dans la recourbure ne sent pas le poids de l'air, parce que le doigt qui bouche son ouverture l'en garde, il arrive, en récompense, que le doigt souffre beaucoup de douleur; car il porte tout le poids de l'air qui le presse par-dessus, et rien ne le soutient par-dessous : aussi il se sent pressé contre le verre, et comme attiré et sucé au dedans du tuyau, et une ampoule s'y forme, comme s'il y avoit une ventouse, parce que le poids de l'air pressant le doigt, la main et le corps entier de cet homme de toutes parts, excepté en la seule partie qui est dans cette ouverture où il n'a point d'accès, cette partie s'enfle, et souffre par la raison que nous avons tantôt dite.

Et si on ôte le doigt de cette ouverture, il arrivera que le vif-argent qui est dans la recourbure montera tout d'un coup dans le tuyau jusqu'à la hauteur de vingt-six ou vingt-sept pouces, parce que l'air, tombant tout d'un coup sur le vif-argent, le fera incontinent monter à la hauteur capable de le contre-peser, et même, à cause de la violence de sa chute, il le fait monter un peu au delà de ce terme : mais il tombera ensuite un peu plus bas, et puis il remontera encore, et après quelques allées et venues, comme d'un poids suspendu au bout d'un fil, il demeurera ferme à une certaine hauteur à laquelle il contre-pèse l'air précisément.

D'où l'on voit que quand l'air ne pèse point sur le vif-argent qui est au bout recourbé, celui du tuyau tombe entièrement, et que par conséquent, si on avoit porté ce tuyau en un lieu où il n'y eût point d'air, ou, si on le pouvoit, jusqu'au-dessus de la sphère de l'air, il tomberoit entièrement.

Conclusion des trois derniers chapitres.

D'où il se conclut qu'à mesure que la charge de l'air est grande, petite ou nulle, aussi la hauteur où l'eau s'élève dans la pompe est grande, petite ou nulle, et qu'elle lui est toujours précisément proportionnée comme l'effet à sa cause.

Il faut entendre la même chose de la difficulté d'ouvrir un soufflet bouché, etc.

CHAP. VII. — *Combien l'eau s'élève dans les pompes en chaque lieu du monde.*

De toutes les connoissances que nous avons, il s'ensuit qu'il y a autant de différentes mesures de la hauteur où l'eau s'élève dans les pompes, qu'il y a de différens lieux et de différens temps où on l'éprouve; et qu'ainsi si on demande à quelle hauteur les pompes aspirantes élèvent l'eau en général, on ne sauroit répondre précisément à cette question, ni même à celle-ci : à quelle hauteur les pompes élèvent l'eau à Paris, si l'on ne détermine aussi le tempérament de l'air, puisqu'elle l'élève plus haut, quand il est plus chargé : mais on peut bien dire à quelle hauteur les pompes élèvent l'eau à Paris quand l'air est le plus chargé; car tout est spécifié. Mais sans nous arrêter aux différentes hauteurs où l'eau s'élève en chaque lieu, suivant que l'air est plus ou moins chargé, nous prendrons la hauteur où elle se trouve, quand il l'est médiocrement, pour la hauteur naturelle de ce lieu-là; parce qu'elle tient le milieu entre les deux extrémités, et qu'en connoissant cette mesure, on aura la connoissance des deux autres, parce qu'il ne faudra qu'ajouter ou diminuer dix pouces. Ainsi nous donnerons la hauteur où l'eau s'élève en tous les lieux du monde, quelque hauts et quelque profonds qu'ils soient, quand l'air y est médiocrement chargé.

Mais auparavant, il faut entendre qu'en toutes les pompes qui sont à même niveau, l'eau s'élève précisément à la même hauteur (j'entends toujours en un même tempérament d'air) : car l'air y ayant une même hauteur, et partant un même poids, ce poids y produit de semblables effets.

Et c'est pourquoi nous donnerons d'abord la hauteur où l'eau s'élève aux lieux qui sont au niveau de la mer, parce que toute la mer est précisément du même niveau, c'est-à-dire également distante du centre de la terre en tous ses points : car les liquides ne peuvent reposer autrement, puisque les points qui seroient plus hauts couleroient en bas; et ainsi la hauteur où nous trouverons que l'eau s'élève dans les pompes en quelque lieu que ce soit, qui soit au bord de la mer, sera commune à tous les lieux du monde qui sont au bord de la mer : et il sera aisé d'inférer de là à quelle hauteur l'eau s'élèvera dans les lieux plus ou moins élevés de dix ou vingt, cent, deux cents ou cinq cents toises, puisque nous avons donné la différence qu'elles apportent.

Au niveau de la mer, les pompes aspirantes élèvent l'eau à la hauteur de trente et un pieds deux pouces à peu près; il faut entendre quand l'air y est chargé médiocrement.

Voilà la mesure commune à tous les points de la mer du monde : d'où il s'ensuit qu'un siphon élève l'eau en ces lieux-là, tant que sa jambe la plus courte a une hauteur au-dessous de celle-là; et qu'un soufflet bouché s'ouvre avec le poids de l'eau de cette hauteur-là, et de la largeur de ses ailes; ce qui est toujours conforme. Il est aisé de passer de là à la connoissance de la hauteur où l'eau s'élève dans les pompes aux lieux plus élevés de dix toises : car, puisque nous avons dit que dix toises d'élévation causent un pouce de diminution à la hauteur où

l'eau s'élève; il s'ensuit qu'en ces lieux-là l'eau s'élève seulement à trente et un pieds un pouce.

Et par le même moyen, on trouve qu'aux lieux plus élevés que le niveau de la mer, de vingt toises, l'eau s'élève à trente et un pieds seulement.

Dans ceux qui sont élevés au-dessus de la mer de cent toises, l'eau monte seulement à trente pieds quatre pouces.

Dans ceux qui sont élevés de deux cents toises, l'eau monte à vingt-neuf pieds six pouces.

Dans ceux qui sont élevés d'environ cinq cents toises, l'eau monte à peu près à vingt-sept pieds.

Ainsi on pourroit éprouver le reste. Et pour les lieux plus enfoncés que le niveau de la mer, on trouvera de même les hauteurs où l'eau s'élève, en ajoutant, au lieu de soustraire, les différences que ces différentes hauteurs donnent.

CONSÉQUENCES.

I. De toutes ces choses, il est aisé de voir qu'une pompe n'élève jamais l'eau à Paris à trente-deux pieds, et qu'elle ne l'élève jamais moins de vingt-neuf pieds et demi.

II. On voit aussi qu'un siphon, dont la courte jambe a trente-deux pieds, ne fait jamais son effet à Paris.

III. Qu'un siphon, dont la jambe la plus courte a vingt-neuf pieds et au-dessous, fait toujours son effet à Paris.

IV. Qu'un siphon dont la courte jambe a trente et un pieds précisément à Paris, fait son effet quelquefois, et quelquefois ne le fait pas, selon que l'air est chargé.

V. Qu'un siphon qui a vingt-neuf pieds pour sa courte jambe, fait toujours son effet à Paris, et jamais à un lieu plus élevé, comme à Clermont en Auvergne.

VI. Qu'un siphon qui a dix pieds de haut, fait son effet en tous les lieux du monde; car il n'y a point de montagne assez haute pour l'en empêcher; et qu'un siphon qui a cinquante pieds de haut ne fait son effet en aucun lieu du monde; car il n'y a point de caverne assez creuse pour faire que l'air pèse assez pour soulever l'eau à cette hauteur.

VII. Que l'eau s'élève dans les pompes à Dieppe, quand l'air est médiocrement chargé, à trente et un pieds deux pouces, comme nous avons dit, et quand l'air est le plus chargé à trente-deux pieds; qu'elle s'élève dans les pompes sur les montagnes hautes de cinq cents toises au-dessus de la mer, quand l'air est médiocrement chargé, à vingt-six pieds onze pouces; et quand il est le moins chargé, à vingt-six pieds un pouce : de sorte qu'il y a une différence entre cette hauteur et celle qui se trouve à Dieppe, quand l'air y est le plus chargé, de cinq pieds onze pouces, qui est presque le quart de la hauteur qui se trouve sur les montagnes.

VIII. Comme nous voyons qu'en tous les lieux qui sont à même niveau, l'eau s'élève à pareille hauteur, et qu'elle s'élève moins en ceux qui sont plus élevés; aussi, par le contraire, si nous voyons que l'eau s'élève à

pareille hauteur en deux lieux différens, on peut conclure qu'ils sont à même niveau; et si elle ne s'y élève pas à même hauteur, on peut juger, par cette différence, combien l'un est plus élevé que l'autre : ce qui est un moyen de niveler les lieux, quelque éloignés qu'ils soient, assez exactement et bien facilement; puisqu'au lieu de se servir d'une pompe aspirante qui seroit difficile à faire de cette hauteur, il ne faut que prendre un tuyau de trois ou quatre pieds plein de vif-argent, et bouché par en haut, dont nous avons souvent parlé, et voir à quelle hauteur il demeure suspendu; car sa hauteur correspond parfaitement à la hauteur où l'eau s'élève dans les pompes.

IX. On voit aussi de là que les degrés de chaleur ne sont pas marqués exactement dans les meilleurs thermomètres; puisqu'on attribuoit toutes les différentes hauteurs où l'eau demeure suspendue à la raréfaction ou condensation de l'air intérieur du tuyau, et que nous apprenons de ces expériences, que les changemens qui arrivent à l'air extérieur, c'est-à-dire à la masse de l'air, y contribuent beaucoup.

Je laisse un grand nombre d'autres conséquences qui s'ensuivent de ces nouvelles connoissances, comme, par exemple, la voie qu'elles ouvrent pour connoître l'étendue précise de la sphère de l'air et des vapeurs qu'on appelle l'atmosphère; puisqu'en observant exactement de cent en cent toises, combien les premières, combien les secondes et combien toutes les autres donnent de différences, on arriveroit à conclure exactement la hauteur entière de l'air. Mais je laisse tout cela pour m'attacher à ce qui est propre au sujet.

Chap. VIII. — *Combien chaque lieu du monde est chargé par le poids de la masse de l'air.*

Nous apprenons de ces expériences que, puisque le poids de l'air et le poids de l'eau qui est dans les pompes se tiennent mutuellement en équilibre, ils pèsent précisément autant l'un que l'autre, et qu'ainsi en connoissant la hauteur où l'eau s'élève en tous les lieux du monde, nous connoissons en même temps combien chacun de ces lieux est pressé par le poids de l'air qui est au-dessus d'eux; et partant :

Que les lieux qui sont au bord de la mer sont pressés par le poids de l'air qui est au-dessus d'eux, jusqu'au haut de sa sphère, autant précisément que si au lieu de cet air on substituoit une colonne d'eau de la hauteur de trente et un pieds deux pouces.

Ceux qui sont plus élevés de dix toises, autant que s'ils portoient de l'eau de la hauteur de trente et un pieds un pouce.

Ceux qui sont élevés au-dessus de la mer de cinq cents toises, autant que s'ils portoient de l'eau à la hauteur de vingt-six pieds onze pouces, et ainsi du reste.

Chap. IX. — *Combien pèse la masse entière de tout l'air qui est au monde.*

Nous apprenons, par ces expériences, que l'air qui est sur le niveau de la mer, pèse autant que l'eau, à la hauteur de trente et un pieds deux

pouces; mais parce que l'air pèse moins sur les lieux plus élevés que le niveau de la mer, et qu'ainsi il ne pèse pas sur tous les points de la terre également, et même qu'il pèse différemment partout : on ne peut pas prendre un pied fixe qui marque combien tous les lieux du monde sont chargés par l'air, le fort portant le foible; mais on peut en prendre un par conjecture bien approchant du juste : comme, par exemple, on peut faire état que tous les lieux de la terre en général, considérés comme s'ils étoient également chargés d'air, le fort portant le foible, en sont autant pressés que s'ils portoient de l'eau à la hauteur de trente et un pieds; et il est certain qu'il n'y a pas un demi-pied d'eau d'erreur en cette supposition.

Or, nous avons vu que l'air qui est au-dessus des montagnes hautes de cinq cents toises sur le niveau de la mer, pèse autant que l'eau à la hauteur de vingt-six pieds onze pouces.

Et, par conséquent, tout l'air qui s'étend depuis le niveau de la mer jusqu'au haut des montagnes hautes de cinq cents toises, pèse autant que l'eau à la hauteur de quatre pieds un pouce, qui étant à peu près la septième partie de la hauteur entière, il est visible que l'air compris depuis la mer jusqu'à ces montagnes, est à peu près la septième partie de la masse entière de l'air.

Nous apprenons de ces mêmes expériences, que les vapeurs qui sont épaisses dans l'air, lorsqu'il en est le plus chargé, pèsent autant que l'eau à la hauteur d'un pied huit pouces; puisque pour les contre-peser, elles font hausser l'eau dans les pompes à cette hauteur, par-dessus celle où l'eau contre-pesoit déjà la pesanteur de l'air : de sorte que, si toutes les vapeurs qui sont sur une contrée étoient réduites en eau, comme il arrive quand elles se changent en pluie, elles ne pourroient produire que cette hauteur d'un pied huit pouces d'eau sur cette contrée; et s'il arrive parfois des orages où l'eau de la pluie qui tombe vienne à plus grande hauteur, c'est parce que le vent y porte les vapeurs des contrées voisines.

Nous voyons aussi de là que, si toute la sphère de l'air étoit pressée et comprimée contre la terre par une force qui, la poussant par le haut, la réduisît en bas à la moindre place qu'elle puisse occuper, et qu'elle la réduisît comme en eau, elle auroit alors la hauteur de trente et un pieds seulement.

Et, par conséquent, qu'il faut considérer toute la masse de l'air, en l'état libre où elle est, de la même sorte que si elle eût été autrefois comme une masse d'eau de trente et un pieds de haut à l'entour de toute la terre, qui eût été raréfiée et dilatée extrêmement, et convertie en cet état où nous l'appelons air, auquel elle occupe, à la vérité, plus de place, mais auquel elle conserve précisément le même poids que l'eau à trente et un pieds de haut.

Et comme il n'y auroit rien de plus aisé que de supputer combien l'eau qui environneroit toute la terre à trente et un pieds de haut pèseroit de livres, et qu'un enfant qui sait l'addition et la soustraction pourroit le faire, on trouveroit, par le même moyen, combien tout l'air de la nature pèse de livres, puisque c'est la même chose; et si on en fait

l'épreuve, on trouvera qu'il pèse à peu près huit millions de millions de millions de livres.

J'ai voulu avoir ce plaisir, et j'en ai fait le compte en cette sorte.

J'ai supposé que le diamètre d'un cercle est à sa circonférence, comme sept à vingt-deux.

J'ai supposé que le diamètre d'une sphère étant multiplié par la circonférence de son grand cercle, le produit est le contenu de la superfici sphérique.

Nous savons qu'on a divisé le tour de la terre en trois cent soixante degrés. Cette division a été volontaire; car on l'eût divisée en plus ou moins si on eût voulu, aussi bien que les cercles célestes.

On a trouvé que chacun de ces degrés contient cinquante mille toises.

Les lieues autour de Paris sont de deux mille cinq cents toises, et, par conséquent, il y a vingt lieues au degré : d'autres en comptent vingt-cinq; mais aussi ils ne mettent que deux mille toises à la lieue; ce qui revient à la même chose.

Chaque toise a six pieds.

Un pied cube d'eau pèse soixante-douze livres.

Cela posé, il est bien aisé de faire la supputation qu'on cherche.

Car puisque la terre a pour son grand cercle, ou pour sa circonférence. . . . . 360 degrés.

Elle a par conséquent, de tour. . . . . 7200 lieues.

Et par la proportion de la circonférence au diamètre, son diamètre aura. . . . . 2291 lieues.

Donc, en multiplant le diamètre de la terre par la circonférence de son grand cercle, on trouvera qu'elle a en toute sa superficie sphérique 16 495 200 lieues carrées.

C'est-à-dire, 103 095 000 000 000 toises carrées.

C'est-à-dire, 3 711 420 000 000 000 pieds carrés.

Et parce qu'un pied cube d'eau pèse soixante-douze livres, il s'ensuit qu'un prisme d'eau d'un pied carré de base et de trente et un pieds de haut, pèse deux mille deux cent trente-deux livres.

Donc si la terre étoit couverte d'eau jusqu'à la hauteur de trente et un pieds, il y auroit autant de prismes d'eau de trente et un pieds de haut, qu'elle a de pieds carrés en toute sa surface. (Je sais bien que ce ne seroit pas des prismes, mais des secteurs de sphère; et je néglige exprès cette précision.)

Et partant elle porteroit autant de deux mille deux cent trente-deux livres d'eau, qu'elle a de pieds carrés en toute sa surface.

Donc cette masse d'eau entière pèseroit 8 283 889 440 000 000 000 livres.

Donc toute la masse entière de la sphère de l'air qui est au monde, pèse ce même poids de 8 283 889 440 000 000 000 livres.

C'est-à-dire, huit millions de millions de millions, deux cent quatre-vingt-trois mille huit cent quatre-vingt-neuf millions de millions, quatre cent quarante mille millions de livres

CONCLUSION

DES DEUX PRÉCÉDENS TRAITÉS.

J'ai rapporté dans le traité précédent tous les effets généralement qu'on a pensé jusqu'ici que la nature produit pour éviter le vide, où j'ai fait voir qu'il est absolument faux qu'ils arrivent par cette raison imaginaire : et j'ai démontré, au contraire, que la pesanteur de la masse de l'air en est la véritable et unique cause, par des raisons et des expériences absolument convaincantes : de sorte qu'il est maintenant assuré qu'il n'arrive aucun effet dans toute la nature qu'elle produise pour éviter le vide.

Il ne sera pas difficile de passer de là à montrer qu'elle n'en a point d'horreur; car cette façon de parler n'est pas propre, puisque la nature créée, qui est celle dont il s'agit, n'étant pas animée, n'est pas capable de passion; aussi elle est métaphorique, et on n'entend par là autre chose, sinon que la nature fait les mêmes efforts pour éviter le vide, que si elle en avoit de l'horreur : de sorte qu'au sens de ceux qui parlent de cette sorte, c'est une même chose de dire que la nature abhorre le vide, et dire que la nature fait de grands efforts pour empêcher le vide. Donc, puisque j'ai montré qu'elle ne fait aucune chose pour fuir le vide, il s'ensuit qu'elle ne l'abhorre pas; car pour suivre la même figure, comme on dit d'un homme qu'une chose lui est indifférente, quand on ne remarque jamais en aucune de ses actions aucun mouvement de désir ou d'aversion pour cette chose; on doit aussi dire de la nature qu'elle a une extrême indifférence pour le vide, puisqu'on ne voit jamais qu'elle fasse aucune chose, ni pour le rechercher, ni pour l'éviter. (J'entends toujours par le mot de *vide*, un espace vide de tous les corps qui tombent sous les sens.)

Il est bien vrai (et c'est ce qui a trompé les anciens) que l'eau monte dans une pompe quand il n'y a point de jour par où l'air puisse entrer, et qu'ainsi il y auroit du vide, si l'eau ne suivoit pas le piston, et même qu'elle n'y monte plus aussitôt qu'il y a des fentes par où l'air peut entrer pour la remplir; d'où il semble qu'elle n'y monte que pour empêcher le vide, puisqu'elle n'y monte que quand il y auroit du vide.

Il est certain de même qu'un soufflet est difficile à ouvrir, quand ses ouvertures sont si bien bouchées, que l'air ne peut y entrer, et qu'ainsi s'il s'ouvroit, il y auroit du vide; au lieu que cette résistance cesse quand l'air peut y entrer pour le remplir : de sorte qu'elle ne se trouve que quand il y auroit du vide; d'où il semble qu'elle n'arrive que par la crainte du vide.

Enfin, il est constant que tous les corps généralement font de grands efforts pour se suivre, et se tenir unis toutes les fois qu'il y auroit du vide entre eux en se séparant, et jamais autrement; et c'est d'où l'on a conclu que cette union vient de la crainte du vide.

Mais pour faire voir la foiblesse de cette conséquence, je me servirai

de cet exemple : Quand un soufflet est dans l'eau, en la manière que nous l'avons souvent représenté, en sorte que le bout du tuyau, que je suppose long de vingt pieds, sorte hors de l'eau et aille jusqu'à l'air, et que les ouvertures qui sont à l'une des ailes soient bien bouchées, afin que l'eau ne puisse pas y entrer; on sait qu'il est difficile à ouvrir, et d'autant plus qu'il y a plus d'eau au-dessus, et que, si on débouche ces ouvertures qui sont à une des ailes, et qu'ainsi l'eau y entre en liberté, cette résistance cesse.

Si on vouloit raisonner sur cet effet comme sur les autres, on diroit ainsi : Quand les ouvertures sont bouchées, et qu'ainsi, s'il s'ouvroit, il y entreroit de l'air par le tuyau, il est difficile de le faire; et quand l'eau peut y entrer pour le remplir au lieu de l'air, cette résistance cesse. Donc, puisqu'il résiste quand il y entreroit de l'air, et non pas autrement, cette résistance vient de l'horreur qu'il a de l'air.

Il n'y a personne qui ne rît de cette conséquence, parce qu'il peut se faire qu'il y ait une autre cause de sa résistance. En effet, il est visible qu'on ne pourroit l'ouvrir sans faire hausser l'eau, puisque celle qu'on écarteroit en l'ouvrant, ne pourroit pas entrer dans le corps du soufflet; et ainsi il faudroit qu'elle trouvât sa place ailleurs, et qu'elle fît hausser toute la masse, et c'est ce qui cause la résistance : ce qui n'arrive pas quand le soufflet a des ouvertures par où l'eau peut entrer; car alors, soit qu'on l'ouvre ou qu'on le ferme, l'eau n'en hausse ni ne baisse, parce que celle qu'on écarte entre dans le soufflet à mesure; aussi on l'ouvre sans résistance.

Tout cela est clair, et par conséquent il faut considérer qu'on ne peut l'ouvrir sans qu'il arrive deux choses : l'une, qu'à la vérité il y entre de l'air; l'autre, qu'on fasse hausser la masse de l'eau; et c'est la dernière de ces choses qui est cause de la résistance, et la première y est fort indifférente, quoiqu'elle arrive en même temps.

Disons de même de la peine qu'on sent à ouvrir dans l'air un soufflet bouché de tous les côtés : si on l'ouvroit par force, il arriveroit deux choses : l'une, qu'à la vérité il y auroit du vide; l'autre, qu'il faudroit hausser et soutenir toute la masse de l'air, et c'est la dernière de ces choses qui cause la résistance qu'on y sent, et la première y est fort indifférente; aussi cette résistance augmente et diminue à proportion de la charge de l'air, comme je l'ai fait voir.

Il faut entendre la même chose de la résistance qu'on sent à séparer tous les corps entre lesquels il y auroit du vide; car l'air ne peut pas s'y insinuer, autrement il n'y auroit pas du vide. Et ainsi on ne pourroit les séparer, sans faire hausser et soutenir toute la masse de l'air, et c'est ce qui cause cette résistance.

Voilà la véritable cause de l'union des corps entre lesquels il y auroit du vide, qu'on a demeuré si longtemps à connoître, parce qu'on a demeuré si longtemps dans de fausses opinions, dont on n'est sorti que par degrés; de sorte qu'il y a eu trois divers temps où l'on a eu de différens sentimens.

Il y avoit trois erreurs dans le monde, qui empêchoient la connoissance de cette cause de l'union des corps

La première est, qu'on a cru presque de tout temps que l'air est léger, parce que les anciens auteurs l'ont dit; et que ceux qui font profession de les croire les suivoient aveuglément, et seroient demeurés éternellement dans cette pensée, si des personnes plus habiles ne les en avoient retirés par la force des expériences. De sorte qu'il n'étoit pas possible de penser que la pesanteur de l'air fût la cause de cette union, quand on pensoit que l'air n'a point de pesanteur.

La seconde est, qu'on s'est imaginé que les élémens ne pèsent point dans eux-mêmes, sans autre raison sinon qu'on ne sent point le poids de l'eau quand on est dedans, et qu'un seau plein d'eau qui y est enfoncé n'est point difficile à lever tant qu'il y est, et qu'on ne commence à sentir son poids que quand il en sort : comme si ces effets ne pouvoient pas venir d'une autre cause, ou plutôt comme si celle-là n'étoit pas hors d'apparence, n'y ayant point de raison de croire que l'eau qu'on puise dans un seau pèse quand elle en est tirée, et ne pèse plus quand elle y est renversée; qu'elle perde son poids en se confondant avec l'autre, et qu'elle le retrouve quand elle en quitte le niveau. Étranges moyens que les hommes cherchent pour couvrir leur ignorance! Parce qu'ils n'ont pu comprendre pourquoi on ne sent point le poids de l'eau, et qu'ils n'ont pas voulu l'avouer, ils ont dit qu'elle n'y pèse pas, pour satisfaire leur vanité par la ruine de la vérité; et on l'a reçu de la sorte : et c'est pourquoi il étoit impossible de croire que la pesanteur de l'air fût la cause de ces effets, tant qu'on a été dans cette imagination; puisque quand même on auroit su qu'il est pesant, on auroit toujours dit qu'il ne pèse pas dans lui-même; et ainsi on n'auroit pas cru qu'il y produisît aucun effet par son poids.

C'est pourquoi j'ai montré, dans l'*Équilibre des liqueurs*, que l'eau pèse dans elle-même autant qu'au dehors, et j'y ai expliqué pourquoi, nonobstant ce poids, un seau n'y est pas difficile à hausser, et pourquoi on n'en sent pas le poids: et dans le *Traité de la pesanteur de la masse de l'air*, j'ai montré la même chose de l'air, afin d'éclaircir tous les doutes.

La troisième erreur est d'une autre nature; elle n'est plus sur le sujet de l'air, mais sur celui des effets mêmes qu'ils attribuoient à l'horreur du vide, dont ils avoient des pensées bien fausses.

Car ils s'étoient imaginé qu'une pompe élève l'eau non-seulement à dix ou vingt pieds, ce qui est bien véritable, mais encore à cinquante, cent, mille, et autant qu'on voudroit, sans aucunes bornes.

Ils ont cru de même, qu'il n'est pas seulement difficile de séparer deux corps polis appliqués l'un contre l'autre, mais que cela est absolument impossible; qu'un ange, ni aucune force créée ne sauroit le faire, avec cent exagérations que je ne daigne pas rapporter; et ainsi des autres.

C'est une erreur de fait si ancienne, qu'on n'en voit point l'origine; et Héron même, l'un des plus anciens et des plus excellens auteurs qui ont écrit de l'élévation des eaux, dit expressément, comme une chose qui ne doit pas être mise en doute, que l'on peut faire passer l'eau d'une rivière par-dessus une montagne pour la faire rendre dans le

vallon opposé, pourvu qu'il soit un peu plus profond, par le moyen d'un siphon placé sur le sommet, et dont les jambes s'étendent le long des coteaux, l'une dans la rivière, l'autre de l'autre côté; et il assure que l'eau s'élèvera de la rivière jusque sur la montagne, pour redescendre dans l'autre vallon, quelque hauteur qu'elle ait.

Tous ceux qui ont écrit de ces matières ont dit la même chose; et même tous nos fontainiers assurent encore aujourd'hui qu'ils feront des pompes aspirantes qui attireront l'eau à soixante pieds, si l'on veut.

Ce n'est pas que, ni Héron, ni ces auteurs, ni ces artisans, et encore moins les philosophes, aient poussé ces épreuves bien loin; car s'ils avoient essayé d'attirer l'eau seulement à quarante pieds, ils l'auroient trouvé impossible; mais c'est seulement qu'ils ont vu des pompes aspirantes et des siphons de six pieds, de dix, de douze, qui ne manquoient point de faire leur effet, et ils n'ont jamais vu que l'eau manquât d'y monter dans toutes les épreuves qu'il leur est arrivé de faire. De sorte qu'ils ne se sont pas imaginé qu'il y eût un certain degré après lequel il en arrivât autrement. Ils ont pensé que c'étoit une nécessité naturelle, dont l'ordre ne pouvoit être changé; et comme ils croyoient que l'eau montoit par une horreur invincible du vide, ils se sont assurés qu'elle continueroit à s'élever, comme elle avoit commencé sans cesser jamais; et ainsi tirant une conséquence de ce qu'ils voyoient à ce qu'ils ne voyoient pas, ils ont donné l'un et l'autre pour également véritable.

Et on l'a cru avec tant de certitude, que les philosophes en ont fait un des grands principes de leur science, et le fondement de leurs traités du vide : on le dicte tous les jours dans les classes et dans tous les lieux du monde, et depuis tous les temps dont on a des écrits, tous les hommes ensemble ont été fermes dans cette pensée, sans que jamais personne y ait contredit jusqu'à ce temps.

Peut-être que cet exemple ouvrira les yeux à ceux qui n'osent penser qu'une opinion soit douteuse, quand elle a été de tout temps universellement reçue de tous les hommes; puisque de simples artisans ont été capables de convaincre d'erreur tous les grands hommes qu'on appelle philosophes : car Galilée déclare dans ses Dialogues, qu'il a appris des fontainiers d'Italie, que les pompes n'élèvent l'eau que jusqu'à une certaine hauteur : ensuite de quoi il l'éprouva lui-même; et d'autres ensuite en firent l'épreuve en Italie, et depuis en France avec du vif-argent, avec plus de commodité, mais qui ne montroit que la même chose en plusieurs manières différentes.

Avant qu'on en fût instruit, il n'y avoit pas lieu de démontrer que la pesanteur de l'air fût ce qui élevoit l'eau dans les pompes; puisque cette pesanteur étant limitée, elle ne pouvoit pas produire un effet infini.

Mais toutes ces expériences ne suffirent pas pour montrer que l'air produit ces effets; parce qu'encore qu'elles nous eussent tirés d'une erreur, elles nous laissoient dans une autre : car on apprit bien par toutes ces expériences, que l'eau ne s'élève que jusqu'à une certaine

hauteur; mais on n'apprit pas qu'elle s'élevât plus haut dans les lieux plus profonds : on pensoit, au contraire, qu'elle s'élevoit toujours à la même hauteur, qu'elle étoit invariable en tous les lieux du monde; et comme on ne pensoit point à la pesanteur de l'air, on s'imagina que la nature de la pompe est telle, qu'elle élève l'eau à une certaine hauteur limitée, et puis plus. Aussi Galilée la considéra comme la hauteur naturelle de la pompe, et il l'appela *la altezza limitatissima.*

Aussi comment se fût-on imaginé que cette hauteur eût été variable, suivant la variété des lieux ? Certainement cela n'étoit pas vraisemblable; et cependant cette dernière erreur mettoit encore hors d'état de prouver que la pesanteur de l'air est la cause de ces effets; car comme elle est plus grande sur le pied des montagnes que sur le sommet, il est manifeste que les effets y seront plus grands à proportion.

C'est pourquoi je conclus qu'on ne pouvoit arriver à cette preuve, qu'en en faisant l'expérience en deux lieux élevés, l'un au-dessus de l'autre, de quatre cents ou cinq cents toises; et je choisis pour cela la montagne du Puy-de-Dôme en Auvergne, par la raison que j'ai déclarée dans un petit écrit que je fis imprimer dès l'année 1648, aussitôt qu'elle eut réussi.

Cette expérience ayant découvert que l'eau s'élève dans les pompes à des hauteurs toutes différentes, suivant la variété des lieux et des temps, et qu'elle est toujours proportionnée à la pesanteur de l'air, elle acheva de donner la connoissance parfaite de ces effets; elle termina tous les doutes; elle montra quelle en est la véritable cause; elle fit voir que l'horreur du vide ne l'est pas; et enfin elle fournit toutes les lumières qu'on peut désirer sur ce sujet.

Qu'on rende raison maintenant, s'il est possible, autrement que par la pesanteur de l'air, pourquoi les pompes aspirantes élèvent l'eau plus bas d'un quart sur le Puy-de-Dôme en Auvergne, qu'à Dieppe.

Pourquoi un même siphon élève l'eau et l'attire à Dieppe, et non pas a Paris.

Pourquoi deux corps polis, appliqués l'un contre l'autre, sont plus faciles à séparer sur un clocher que dans la rue.

Pourquoi un soufflet bouché de tous côtés est plus facile à ouvrir sur le haut d'une maison que dans la cour.

Pourquoi, quand l'air est plus chargé de vapeurs, le piston d'une seringue bouchée est plus difficile à tirer.

Enfin pourquoi tous ces effets sont toujours proportionnés au poids de l'air, comme l'effet à la cause.

Est-ce que la nature abhorre plus le vide sur les montagnes que dans les vallons, quand il fait humide que quand il fait beau? Ne le hait-elle pas également sur un clocher, dans un grenier et dans les cours?

Que tous les disciples d'Aristote assemblent tout ce qu'il y a de fort dans les écrits de leur maître et de ses commentateurs, pour rendre raison de ces choses par l'horreur du vide, s'ils le peuvent : sinon qu'ils reconnoissent que les expériences sont les véritables maîtres qu'il faut suivre dans la physique; que celle qui a été faite sur les montagnes, a

renversé cette croyance universelle du monde, que la nature abhorre le vide, et ouvert cette connoissance qui ne sauroit plus jamais périr, que la nature n'a aucune horreur pour le vide, qu'elle ne fait aucune chose pour l'éviter, et que la pesanteur de la masse de l'air est la véritable cause de tous les effets qu'on avoit jusqu'ici attribués à cette cause imaginaire.

FRAGMENT

D'un autre plus long ouvrage de Pascal sur la même matière, divisé en parties, livres, chapitres, sections et articles, dont il ne s'est trouvé que ceci parmi ses papiers.

PART. I, LIV. III, CHAP. I, SECT. II.

SECTION II. — *Que les effets sont variables suivant la variété des temps, et qu'ils sont d'autant plus ou moins grands, que l'air est plus ou moins chargé.*

Nous avons vu dans l'Introduction sur le sujet de la pesanteur de l'air, qu'en une même région l'air pèse davantage en un temps qu'en un autre, suivant que l'air est plus ou moins chargé; et nous allons montrer dans cette section que ces effets sont variables en une même région, suivant la variété des temps, et qu'ils sont d'autant plus ou moins grands, que l'air y est plus ou moins chargé.

Article 1. — Pour faire l'expérience de cette variation avec justesse, il faut avoir un tuyau de verre scellé par en haut, ouvert par en bas, recourbé par le bout ouvert, plein de mercure, tel que nous l'avons figuré plusieurs fois, où le mercure demeure suspendu à une certaine hauteur : soit ce tuyau placé à demeure dans une chambre, en un lieu où l'on puisse le voir commodément et où il ne puisse être offensé : soit collée une bande de papier divisée par pouces et par lignes le long du tuyau, afin qu'on puisse remarquer la division à laquelle le mercure se trouve suspendu, comme on fait aux thermomètres.

On verra que dans Dieppe, quand le temps est le plus chargé, le mercure sera à la hauteur de vingt-huit pouces quatre lignes, à compter depuis le mercure du bout recourbé.

Et quand le temps se déchargera, on verra le mercure baisser, peut-être de quatre lignes.

Le lendemain, on le verra peut-être baissé de dix lignes; quelquefois une heure après il sera remonté de dix lignes; quelque temps après on le verra ou haussé ou baissé, suivant que le temps sera chargé ou déchargé.

Et depuis l'un à l'autre de ses périodes, on trouvera dix-huit lignes de différence, c'est-à-dire qu'il sera quelquefois à la hauteur de vingt-huit pouces quatre lignes, et quelquefois à la hauteur de vingt-six pouces dix lignes.

Cette expérience s'appelle *l'expérience continuelle*, à cause qu'on l'observe, si l'on veut, continuellement, et qu'on trouve le mercure à presque autant de divers points qu'il y a de différens temps où on l'observe.

Article 2. — La conformité de tous les effets attribués à l'horreur du vide, étant telle que ce qui se dit de l'un s'entend de tous les autres, doit nous faire conclure avec certitude que, puisque le mercure suspendu varie ses hauteurs suivant les variétés des temps, il arrivera aussi de semblables variétés dans tous les autres, comme dans les hauteurs où les pompes élèvent l'eau, et qu'ainsi les pompes élèvent l'eau plus haut en un temps qu'en un autre; qu'un soufflet bouché est plus difficile à ouvrir en un temps qu'en un autre, etc.

Que si l'on veut avoir le plaisir d'en faire l'épreuve en quelqu'un des autres exemples, nous en donnerons ici le moyen dans l'exemple du soufflet bouché en cette sorte.

Soit un soufflet plus étroit que les ordinaires, et dont les ailes n'aient que trois pouces de diamètre : qu'il soit bien bouché de toutes parts sans aucune ouverture; soit l'une de ses ailes attachée à la poutre du plancher d'une chambre; soit à l'autre aile attachée une chaîne de fer à plusieurs chaînons qui pendent depuis le soufflet jusqu'à terre, et qui traînent même contre terre; soit la chaîne de telle grosseur, et la distance des planchers haut et bas, telle que les chaînons suspendus depuis le soufflet jusqu'à terre, sans compter ceux qui traînent, pèsent environ cent vingt livres.

On verra que ce poids ouvrira le soufflet : car il ne faut pour l'ouvrir qu'un poids de cent treize livres, comme nous l'avons dit au livre I (chap. I, art. 2).

Et le soufflet, en s'ouvrant, baissera son aile, à laquelle la chaîne qui l'entraîne est attachée; donc cette chaîne se baissera elle-même, et ses chaînons qui pendoient les plus proches de terre seront reçus à terre; et ainsi leur poids n'agira plus contre le soufflet. Ainsi il restera d'autant moins de chaînons suspendus, que le soufflet s'ouvrira davantage; donc, quand le soufflet sera tant ouvert, qu'il ne restera de chaînons suspendus que jusqu'au poids de cent treize livres, si le temps est alors très-chargé, la chaîne ne se baissera pas davantage; mais le soufflet demeurera ainsi ouvert en partie, et la chaîne en partie suspendue et en partie rampante, et le tout en repos.

Et ce qui surprendra merveilleusement est que, quand le temps se déchargera, et qu'ainsi un moindre poids suffira pour ouvrir le soufflet, les chaînons suspendus pesant cent treize livres qui étoient en équilibre avec l'air, quand il étoit le plus chargé, deviendront trop forts, à cause de la décharge de l'air; et ainsi entraîneront l'aile du soufflet, et l'ouvriront davantage, jusqu'à ce que les chaînons qui resteront suspendus soient en équilibre avec le poids de l'air supérieur dans le tempérament où il est; et tant plus l'air se déchargera, tant plus les chaînons se baisseront.

Mais quand l'air se chargera, on verra, au contraire, le soufflet se resserrer comme de soi-même, et en se resserrant attirer la chaîne, et

la faire remonter jusqu'à ce que les chaînons suspendus soient en équilibre avec la charge de l'air supérieur en ce tempérament : de sorte que la chaîne haussera et baissera, et le soufflet s'ouvrira ou se fermera plus ou moins suivant que l'air se charge ou se décharge, et toujours les chaînons suspendus seront en équilibre avec l'air supérieur, lequel pressant le soufflet qu'il environne de toutes parts, le tiendroit serré si la chaîne ne faisoit effort pour l'ouvrir. Et la chaîne, au contraire, le tiendroit toujours ouvert, si l'air ne faisoit effort pour le fermer; mais ces deux efforts contraires se contre-balancent, comme nous l'avons dit.

Il reste à dire que, quand le temps est le plus chargé, les chaînons suspendus pèsent cent treize livres; et quand le temps est le moins chargé, ils pèsent seulement cent sept livres; et ces deux mesures périodiques de cent treize et cent sept livres ont un rapport parfait avec les deux mesures périodiques des hauteurs du mercure suspendu de vingt-huit pouces quatre lignes, et de vingt-six pouces dix lignes; car un cylindre de mercure de trois pouces de diamètre, comme les ailes de ce soufflet, et de vingt-huit pouces quatre lignes de hauteur, pèse cent treize livres, et un cylindre de mercure de trois pouces de diamètre, et de vingt-six pouces dix lignes de hauteur, pèse cent sept livres.

Article 3. — Que si l'on veut faire ces observations avec plus de plaisir, il faut les faire en trois ou quatre de ces exemples à la fois. Par exemple, il faut avoir un tuyau plein de mercure, tel que nous l'avons figuré au premier article.

Un soufflet bouché tel que nous venons de le figurer au second article.

Une pompe aspirante de trente-cinq pieds de haut.

Un siphon dont la courte jambe ait environ trente et un pieds de hauteur, et la longue trente-cinq pieds.

Et on verra, en observant tous ces effets à la fois, que, quand le temps sera le plus chargé, le mercure sera dans le tuyau à vingt-huit pouces quatre lignes, les chaînons suspendus au soufflet pèseront cent treize livres.

L'eau sera dans la pompe à trente-deux pieds.

Le siphon jouera, puisque sa courte jambe, qui est de trente et un pieds, est moindre que trente-deux pieds.

Et quand le temps se déchargera un peu, le mercure sera baissé de douze lignes, et n'aura plus que vingt-sept pouces et quatre lignes.

La chaîne à proportion; et il n'y aura plus de chaînons suspendus que jusqu'à la concurrence de cent neuf livres.

L'eau de la pompe sera baissée d'un pied, et sera ainsi haute de trente et un pieds seulement.

Le siphon ne jouera plus que par un petit filet, puisque sa courte jambe a précisément trente et un pieds.

Et quand le temps sera le plus déchargé, le mercure sera baissé de dix-huit lignes, et n'aura plus que vingt-six pouces dix lignes : les chaînons suspendus ne pèseront que cent sept livres.

L'eau sera baissée d'un pied six pouces, et ne sera plus qu'à trente pieds quatre pouces. Le siphon ne jouera plus, parce que sa courte

jambe, qui est de trente et un pieds, excède la hauteur de trente pieds quatre pouces, à laquelle l'eau demeure suspendue dans la pompe dans le même temps; mais l'eau demeurera supendue dans chacune des jambes du siphon à la même hauteur de trente pieds quatre pouces, comme dans la pompe, suivant la règle du siphon.

Quelque temps après, le mercure et la chaîne et l'eau remonteront, et le siphon jouera par un petit filet; quelque temps après tout rebaissera, puis tout rehaussera, et toujours tous à la fois recevront les mêmes différences; et le jeu continuera tant qu'on voudra en avoir le plaisir.

Que si le siphon à eau est dans une basse-cour, et que le tuyau du mercure soit une chambre; lorsqu'on observera que le mercure hausse dans la chambre où l'on est, on peut assurer, sans le voir, que le siphon joue dans la cour où l'on n'est pas; et lorsqu'on verra baisser le mercure, on peut assurer, sans le voir, que le siphon ne joue plus, parce que tous ces effets sont conformes, et dépendans immédiatement de la pesanteur de l'air qui les règle tous, et les diversifie suivant ses propres diversités.

Section III. — *De la règle des variations qui arrivent à ces effets par la variété des temps.*

Comme les variations de ces effets procèdent des variations qui arrivent dans le tempérament de l'air, et que celles de l'air sont très-bizarres, et presque sans règle, aussi celles qui arrivent à ces effets sont si étranges, qu'il est difficile d'y en assigner. Nous remarquerons néanmoins tout ce que nous y avons trouvé de plus certain et de plus constant, en nous expliquant de tous ces effets par un seul à l'ordinaire, comme par celui de la suspension du mercure dans un tuyau bouché par en haut, dont nous nous sommes servis ordinairement.

1. Il y a un certain degré de hauteur, et un certain degré de bassesse que le mercure n'outre-passe presque jamais, parce qu'il y a de certaines bornes dans la charge de l'air, qui ne sont quasi jamais outre-passées, et qu'il y a des temps où l'air est si serein, qu'on ne voit jamais de plus grande sérénité, et d'autres où l'air est si chargé, qu'il ne peut presque l'être davantage. Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver tel accident en l'air, qui le rendroit plus chargé que jamais; et en ce cas, le mercure monteroit plus haut que jamais; mais cela est si rare, qu'on ne doit pas en faire de règle.

2. On voit rarement le mercure à l'un ou à l'autre de ces périodes; et pour l'ordinaire, il est entre les deux, plus proche quelquefois de l'un, et quelquefois de l'autre; parce qu'il arrive aussi rarement que l'air soit entièrement déchargé ou chargé à l'excès, et que pour l'ordinaire il l'est médiocrement, tantôt plus, tantôt moins.

3. Ces vicissitudes sont sans règles dans les changemens du mercure aussi bien que dans l'air : de sorte que quelquefois d'un quart d'heure à l'autre, il y a grande différence, et quelquefois durant quatre ou cinq jours il y en a très-peu.

4. La saison où le mercure est le plus haut pour l'ordinaire est l'hiver

Celle où d'ordinaire il est le plus bas est l'été. Où il est le moins variable est aux solstices et où il est le plus variable, est aux équinoxes.

Ce n'est pas que le mercure ne soit quelquefois haut en été, bas en hiver, inconstant aux solstices, constant aux équinoxes; car il n'y a point de règle certaine; mais, pour l'ordinaire, la chose est comme nous l'avons dite, parce qu'aussi, pour l'ordinaire, quoique non pas toujours, l'air est le plus chargé en hiver, le moins en été; le plus inconstant en mars et en septembre, et le plus constant aux équinoxes.

5. Il arrive aussi, pour l'ordinaire, que le mercure baisse quand il fait beau temps, qu'il hausse quand le temps devient froid ou chargé; mais cela n'est pas infaillible; car il hausse quelquefois quand le temps s'embellit, il baisse quelquefois quand le temps se couvre, parce qu'il arrive quelquefois, comme nous l'avons dit dans l'Introduction, que quand le temps s'embellit dans la basse région, néanmoins l'air, considéré dans toutes ses régions, s'appesantit; et qu'encore que l'air se charge dans la basse région, il se décharge quelquefois dans les autres.

6. Mais il est aussi très-remarquable que, quand il arrive en un même temps que l'air devienne nuageux et que le mercure baisse, on peut s'assurer que les nuées qui sont dans la basse région ont peu d'épaisseur, et qu'elles se dissiperont bientôt, et que le beau temps est proche.

Et lorsqu'au contraire il arrive en un même temps que le temps est serein, et que néanmoins le mercure est haut, on peut s'assurer qu'il y a des vapeurs en quantité éparses, et qui ne paroissent pas, et qui formeront bientôt quelque pluie.

Et lorsqu'on voit ensemble le mercure bas et le temps serein, on peut assurer que le beau temps durera, parce que l'air est peu chargé.

Et enfin lorsqu'on voit ensemble l'air chargé et le mercure haut, on peut s'assurer que le mauvais temps durera, parce qu'assurément l'air est beaucoup chargé.

Ce n'est pas qu'un vent survenant ne puisse frustrer ces conjectures; mais pour l'ordinaire elles réussissent, parce que la hauteur du mercure suspendu étant un effet de la charge présente de l'air, elle en est aussi la marque très-certaine, et sans comparaison plus certaine que le thermomètre, ou tout autre artifice.

Cette connoissance peut être très-utile aux laboureurs, voyageurs, etc., pour connoître l'état présent du temps, et le temps qui doit suivre immédiatement, mais non pas pour connoître celui qu'il fera dans trois semaines : mais je laisse les utilités qu'on peut tirer de ces nouveautés, pour continuer notre projet.

AUTRE FRAGMENT

Sur la même matière, consistant en tables, dont on n'en a trouvé que sept, intitulées comme s'ensuit.

Avertissement. — Pour l'intelligence de ces tables, il faut savoir:

1° Que Clermont est la ville de Clermont, capitale d'Auvergne, élevée au-dessus de Paris, autant qu'on a pu le juger par estimation, d'environ 400 toises.

2° Que le Puy est une montagne d'Auvergne tout proche de Clermont, appelée le *Puy de Dôme*, élevée au-dessus de Clermont d'environ 500 toises.

3° Que Lafon est un lieu nommé *Lafon de l'Arbre*, situé le long de la montagne du Puy de Dôme, beaucoup plus près dans la vérité de son pied que de son sommet, mais que l'on prend néanmoins, dans les tables suivantes, pour le juste milieu de la montagne, et par conséquent pour être également distant de son pied et de son sommet; savoir, d'environ 250 toises de l'un et de l'autre.

Il faut encore savoir que *médiocr.* fait *médiocrement; différ.* fait *différence; pi.* fait *pieds; po.* ou *pouc.* fait *pouces; lig.* ou *lign.* fait *lignes; liv.* ou *livr.* fait *livres; onc.* fait *onces.*

SECONDE TABLE

Pour assigner un cylindre de plomb, dont la pesanteur soit égale à la résistance de deux corps polis appliqués l'un contre l'autre, quand on les sépare.

Cette résistance est égale au poids du cylindre de plomb, ayant pour base la face commune, et pour hauteur :

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.			MÉDIOCR.			LE MOINS.			DIFFER.	
	pi.	po.	lig.	pi.	po.	lig.	pi.	po.	lig.	po.	lig.
A Paris	2	9	4	2	8	6	2	7	8	1	8
A Clermont	2	6	10	2	6		2	5	2	1	8
A Lafon	2	5	2	2	4	4	2	3	6	1	8
Au Puy	2	3	6	2	2	8	2	1	10	1	8

DIFFÉRENCE D'UN LIEU A L'AUTRE.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.		MÉDIOCR.		LE MOINS.	
	po.	lig.	po.	lig.	po.	lig.
De Paris a Clermont	2	6	2	6	2	6
De Clermont a Lafon	1	8	1	8	1	8
De Lafon au Puy	1	8	1	8	1	8
De Clermont au Puy	3	4	3	4	3	4
De Paris au Puy	5	10	5	10	5	10

TROISIÈME TABLE

Pour assigner la force nécessaire pour séparer deux corps unis par une face qui a de diamètre un pied.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.	MÉDIOCR.	LE MOINS.	DIFFÉR.
	livres.	livres.	livres.	livres.
A PARIS	1808	1761	1714	94
A CLERMONT	1675	1628	1581	94
A LAFON	1579	1532	1485	94
AU PUY	1483	1436	1389	94

DIFFÉRENCE D'UN LIEU A L'AUTRE.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.	MÉDIOCR.	LE MOINS.
	livres.	livres.	livres.
DE PARIS A CLERMONT	133	133	133
DE CLERMONT A LAFON	96	96	96
DE LAFON AU PUY	96	96	96
DE CLERMONT AU PUY	92	192	392
DE PARIS AU PUY	325	325	325

QUATRIÈME TABLE

Pour assigner la force nécessaire pour désunir deux corps unis par une face qui a de diamètre six pouces.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.		MÉDIOCR.		LE MOINS.		DIFFÉR.	
	liv.	onc.	liv.	onc.	liv.	onc.	liv.	onc.
A PARIS	452		440	4	428	8	23	8
A CLERMONT	419	6	407	10	395	14	23	8
A LAFON	395	10	383	14	372	2	23	8
AU PUY	371	14	360	2	348	6	23	8

DIFFÉRENCE D'UN LIEU A L'AUTRE.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.		MÉDIOCR.		LE MOINS.	
	liv.	onc.	liv.	onc.	liv.	onc.
DE PARIS A CLERMONT	32	10	32	10	32	10
DE CLERMONT A LAFON	23	12	23	12	23	12
DE LAFON AU PUY	23	12	23	12	23	12
DE CLERMONT AU PUY	47	8	47	8	47	8
DE PARIS AU PUY	80	2	80	2	80	2

CINQUIÈME TABLE

Pour assigner la force nécessaire pour diviser deux corps unis par une face qui a de diamètre un pouce.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.		MÉDIOCR.		LE MOINS.		DIFFÉR
	liv.	onc.	liv.	onc.	liv.	onc.	onces.
A PARIS	12	9	12	4	11	15	10
A CLERMONT	11	11	11	6	11	1	10
A LAFON	11	1	10	12	10	7	10
AU PUY	10	7	10	2	9	13	10

DIFFÉRENCE D'UN LIEU A L'AUTRE.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.		MÉDIOCR.		LE MOINS.	
	liv.	onc.	liv.	onc.	liv.	onc.
DE PARIS A CLERMONT		14		14		14
DE CLERMONT A LAFON		10		10		10
DE LAFON AU PUY		10		10		10
DE CLERMONT AU PUY	1	4	1	4	1	4
DE PARIS AU PUY	2	2	2	2	2	2

SIXIÈME TABLE

Pour assigner la force nécessaire pour désunir deux corps contigus par une face qui a de diamètre six lignes.

Quand l'air est chargé,

	LE PLUS.		MÉDIOCR.		LE MOINS.		DIFFÉR
	liv.	onc.	liv.	onc.	liv.	onc.	onces.
A PARIS	3	1	3		2	15	2
A CLERMONT	2	12	2	11	2	10	2
A LAFON	2	9	2	8	2	7	2
AU PUY	2	6	2	5	2	4	2

DIFFÉRENCE D'UN LIEU A L'AUTRE.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.	MÉDIOCR.	LE MOINS.
	onces.	onces.	onces.
DE PARIS A CLERMONT	5	5	5
DE CLERMONT A LAFON	3	3	3
DE LAFON AU PUY	3	3	3
DE CLERMONT AU PUY	6	6	6
DE PARIS AU PUY	11	11	11

SEPTIÈME TABLE

Pour assigner la hauteur à laquelle s'élève et demeure suspendu le mercure ou vif-argent en l'expérience ordinaire.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.			MÉDIOCR.			LE MOINS.			DIFFÉR.	
	pi.	po.	lig.	pi.	po.	lig.	pi.	po.	lig.	po.	lig.
A Paris	2	4	4	2	3	7	2	2	10	1	6
A Clermont	2	2	3	2	1	6	2		9	1	6
A Lafon	2		9	2			1	11	3	1	6
Au Puy	1	11	3	1	10	6	1	9	9	1	6

DIFFÉRENCE D'UN LIEU A L'AUTRE.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.		MÉDIOCR.		LE MOINS.	
	po.	lig.	po.	lig	po.	lig.
De Paris a Clermont	2	1	2	1	2	1
De Clermont a Lafon	1	6	1	6	1	6
De Lafon au Puy	1	6	1	6	1	6
De Clermont au Puy	3		3		3	
De Paris au Puy	5	1	5	1	5	1

HUITIÈME TABLE

Pour assigner la hauteur à laquelle l'eau s'élève et demeure suspendue en l'expérience ordinaire.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.		MÉDIOCR.		LE MOINS.		DIFFÉR.	
	pi.	po.	pi.	po.	pi.	po.	pi.	po.
A Paris	32		31	2	30	4	1	8
A Clermont	29	8	28	10	28		1	8
A Lafon	28		27	2	26	4	1	8
Au Puy	26	3	25	6	24	7	1	8

DIFFÉRENCE D'UN LIEU A L'AUTRE.

Quand l'air est chargé.

	LE PLUS.		MÉDIOCR.		LE MOINS.	
	pi.	po.	pi.	po.	pi.	po.
De Paris a Clermont	2	4	2	4	2	4
De Clermont a Lafon	1	8	1	8	1	8
De Lafon au Puy	1	8	1	8	1	8
De Clermont au Puy	3	4	3	4	3	4
De Paris au Puy	5	8	5	8	5	8

RÉCIT DE LA GRANDE EXPÉRIENCE

DE L'ÉQUILIBRE DES LIQUEURS.

Projetée par le sieur B. Pascal, pour l'accomplissement du traité qu'il a promis dans son Abrégé touchant le vide, et faite par le sieur F. Périer, en une des plus hautes montagnes d'Auvergne, appelée vulgairement *le Puy de Dôme.*

Lorsque je mis au jour mon Abrégé sous ce titre : *Expériences nouvelles touchant le vide*, etc., où j'avois employé la maxime de l'horreur du vide, parce qu'elle étoit universellement reçue, et que je n'avois point encore de preuves convaincantes du contraire, il me resta quelques difficultés qui me firent défier de la vérité de cette maxime, pour l'éclaircissement desquelles je méditai dès lors l'expérience dont je fais voir ici le récit, qui pouvoit me donner une parfaite connoissance de ce que je devois en croire. Je l'ai nommée la *grande Expérience de l'Équilibre des liqueurs*, parce qu'elle est la plus démonstrative de toutes celles qui peuvent être faites sur ce sujet, en ce qu'elle fait voir l'équilibre de l'air avec le vif-argent, qui sont, l'un la plus légère, et l'autre la plus pesante de toutes les liqueurs qui sont connues dans la nature. Mais parce qu'il étoit impossible de la faire en cette ville de Paris, qu'il n'y a que très-peu de lieux en France propres pour cet effet, et que la ville de Clermont en Auvergne est un des plus commodes, je priai M. Périer, conseiller en la cour des aides d'Auvergne, mon beau-frère, de prendre la peine de l'y faire. On verra quelles étoient mes difficultés, et quelle est cette expérience, par cette lettre que je lui en écrivis alors.

Copie de la lettre de M. Pascal, le jeune, à M. Périer, du 15 *novembre* 1647.

Monsieur,

Je n'interromprois pas le travail continuel où vos emplois vous engagent, pour vous entretenir de méditations physiques, si je ne savois qu'elles serviront à vous délasser en vos heures de relâche, et qu'au lieu que d'autres en seroient embarrassés, vous en aurez du divertissement. J'en fais d'autant moins de difficulté, que je sais le plaisir que vous recevez en cette sorte d'entretien. Celui-ci ne sera qu'une continuation de ceux que nous avons eus ensemble touchant le vide. Vous savez quel sentiment les philosophes ont eu sur ce sujet : tous ont tenu pour maxime, que la nature abhorre le vide; et presque tous, passant plus avant, ont soutenu qu'elle ne peut l'admettre, et qu'elle se détruiroit elle-même plutôt que de le souffrir. Ainsi les opinions ont été divisées; les uns se sont contentés de dire qu'elle l'abhorroit seulement, les autres ont maintenu qu'elle ne pouvoit le souffrir. J'ai travaillé, dans mon Abrégé du Traité du vide, à détruire cette dernière opinion, et je crois que les expériences que j'y ai rapportées suffisent pour faire voir mani-

festement que la nature peut souffrir et souffre en effet un espace, si grand que l'on voudra, vide de toutes les matières qui sont en notre connoissance et qui tombent sous nos sens. Je travaille maintenant à examiner la vérité de la première; savoir, que la nature abhorre le vide, et à chercher des expériences qui fassent voir si les effets que l'on attribue à l'horreur du vide, doivent être véritablement attribués à cette horreur du vide, ou s'ils doivent l'être à la pesanteur et pression de l'air; car, pour vous ouvrir franchement ma pensée, j'ai peine à croire que la nature, qui n'est point animée, ni sensible, soit susceptible d'horreur, puisque les passions présupposent une âme capable de les ressentir, et j'incline bien plus à imputer tous ces effets à la pesanteur et pression de l'air, parce que je ne les considère que comme des cas particuliers d'une proposition universelle de l'équilibre des liqueurs, qui doit faire la plus grande partie du traité que j'ai promis. Ce n'est pas que je n'eusse ces mêmes pensées lors de la production de mon Abrégé; et toutefois, faute d'expériences convaincantes, je n'osai pas alors (et je n'ose pas encore) me départir de la maxime de l'horreur du vide, et je l'ai même employée pour maxime dans mon Abrégé : n'ayant alors d'autre dessein que de combattre l'opinion de ceux qui soutiennent que le vide est absolument impossible, et que la nature souffriroit plutôt sa destruction que le moindre espace vide. En effet, je n'estime pas qu'il nous soit permis de nous départir légèrement des maximes que nous tenons de l'antiquité, si nous n'y sommes obligés par des preuves indubitables et invincibles. Mais, en ce cas, je tiens que ce seroit une extrême foiblesse d'en faire le moindre scrupule, et qu'enfin nous devons avoir plus de vénération pour les vérités évidentes, que d'obstination pour ces opinions reçues. Je ne saurois mieux vous témoigner la circonspection que j'apporte avant que de m'éloigner des anciennes maximes, que de vous remettre dans la mémoire l'expérience que je fis ces jours passés en votre présence avec deux tuyaux, l'un dans l'autre, qui montre apparemment le vide dans le vide. Vous vîtes que le vif-argent du tuyau intérieur demeura suspendu à la hauteur où il se tient par l'expérience ordinaire, quand il étoit contre-balancé et pressé par la pesanteur de la masse entière de l'air, et qu'au contraire, il tomba entièrement, sans qu'il lui restât aucune hauteur ni suspension, lorsque, par le moyen du vide dont il fut environné, il ne fut plus du tout pressé ni contre-balancé d'aucun air, en ayant été destitué de tous côtés. Vous vîtes ensuite que cette hauteur ou suspension du vif-argent augmentoit ou diminuoit à mesure que la pression de l'air augmentoit ou diminuoit, et qu'enfin toutes ces diverses hauteurs ou suspensions du vif-argent se trouvoient toujours proportionnées à la pression de l'air.

Certainement, après cette expérience, il y avoit lieu de se persuader que ce n'est pas l'horreur du vide, comme nous estimons, qui cause la suspension du vif-argent dans l'expérience ordinaire, mais bien la pesanteur et pression de l'air, qui contre-balance la pesanteur du vif-argent. Mais parce que tous les effets de cette dernière expérience des deux tuyaux, qui s'expliquent si naturellement par la seule pression et

pesanteur de l'air, peuvent encore être expliqués assez probablement par l'horreur du vide, je me tiens dans cette ancienne maxime : résolu néanmoins de chercher l'éclaircissement entier de cette difficulté par une expérience décisive.

J'en ai imaginé une qui pourra seule suffire pour nous donner la lumière que nous cherchons, si elle peut être exécutée avec justesse. C'est de faire l'expérience ordinaire du vide plusieurs fois en même jour, dans un même tuyau, avec le même vif-argent, tantôt en bas et tantôt au sommet d'une montagne, élevée pour le moins de cinq ou six cents toises, pour éprouver si la hauteur du vif-argent suspendu dans le tuyau se trouvera pareille ou différente dans ces deux situations. Vous voyez déjà, sans doute, que cette expérience est décisive de la question, et que, s'il arrive que la hauteur du vif-argent soit moindre au haut qu'au bas de la montagne (comme j'ai beaucoup de raisons pour le croire, quoique tous ceux qui ont médité sur cette matière soient contraires à ce sentiment), il s'ensuivra nécessairement que la pesanteur et pression de l'air est la seule cause de cette suspension du vif-argent, et non pas l'horreur du vide, puisqu'il est bien certain qu'il y a beaucoup plus d'air qui pèse sur le pied de la montagne, que non pas sur son sommet ; au lieu qu'on ne sauroit dire que la nature abhorre le vide au pied de la montagne plus que sur son sommet.

Mais comme la difficulté se trouve d'ordinaire jointe aux grandes choses, j'en vois beaucoup dans l'exécution de ce dessein, puisqu'il faut pour cela choisir une montagne excessivement haute, proche d'une ville dans laquelle se trouve une personne capable d'apporter à cette épreuve toute l'exactitude nécessaire ; car si la montagne étoit éloignée, il seroit difficile d'y porter des vaisseaux, le vif-argent, les tuyaux et beaucoup d'autres choses nécessaires, et d'entreprendre ces voyages pénibles autant de fois qu'il le faudroit pour rencontrer au haut de ces montagnes le temps serein et commode, qui ne s'y voit que peu souvent ; et comme il est aussi rare de trouver des personnes hors de Paris qui aient ces qualités, que des lieux qui aient ces conditions, j'ai beaucoup estimé mon bonheur, d'avoir, en cette occasion, rencontré l'un et l'autre, puisque notre ville de Clermont est au pied de la haute montagne du Puy de Dôme, et que j'espère de votre bonté que vous m'accorderez la grâce de vouloir y faire vous-même cette expérience ; et sur cette assurance, je l'ai fait espérer à tous nos curieux de Paris, et entre autres au R. P. Mersenne, qui s'est déjà engagé, par les lettres qu'il en a écrites en Italie, en Pologne, en Suède, en Hollande, etc., d'en faire part aux amis qu'il s'y est acquis par son mérite. Je ne touche pas aux moyens de l'exécuter, parce que je sais bien que vous n'omettrez aucune des circonstances nécessaires pour la faire avec précision.

Je vous prie seulement que ce soit le plus tôt qu'il vous sera possible et d'excuser cette liberté où m'oblige l'impatience que j'ai d'en apprendre le succès, sans lequel je ne puis mettre la dernière main au traité que j'ai promis au public, ni satisfaire au désir de tant de personnes qui l'attendent, et qui vous en seront infiniment obligées. Ce n'est pas

que je veuille diminuer ma reconnoissance par le nombre de ceux qui la partageront avec moi, puisque je veux, au contraire, prendre part à celle qu'ils vous auront, et en demeurer d'autant plus, monsieur, votre très-humble et très-obéissant serviteur, PASCAL.

M. Périer reçut cette lettre à Moulins, où il étoit dans un emploi qui lui ôtoit la liberté de disposer de soi-même; de sorte que, quelque désir qu'il eût de faire promptement cette expérience, il ne le put néanmoins plus tôt qu'au mois de septembre dernier.

Vous verrez les raisons de ce retardement, la relation de cette expérience, et la précision qu'il y a apportée, par la lettre suivante qu'il me fit l'honneur de m'en écrire.

Copie de la lettre de M. Périer à M. Pascal le jeune, du 22 septembre 1648.

Monsieur,

Enfin j'ai fait l'expérience que vous avez si longtemps souhaitée. Je vous aurois plus tôt donné cette satisfaction; mais j'en ai été empêché, autant par les emplois que j'ai eus en Bourbonnois, qu'à cause que, depuis mon arrivée, les neiges ou les brouillards ont tellement couvert la montagne du Puy de Dôme, où je devois la faire, que, même en cette saison qui est ici la plus belle de l'année, j'ai eu peine de rencontrer un jour où l'on pût voir le sommet de cette montagne, qui se trouve d'ordinaire au dedans des nuées, et quelquefois au-dessus, quoiqu'au même temps il fasse beau dans la campagne : de sorte que je n'ai pu joindre ma commodite avec celle de la saison, avant le 19 de ce mois. Mais le bonheur avec lequel je la fis ce jour-là m'a pleinement consolé du petit déplaisir que m'avoient donné tant de retardemens que je n'avois pu éviter.

Je vous en donne ici une ample et fidèle relation, où vous verrez la précision et les soins que j'y ai apportés, auxquels j'ai estimé à propos de joindre encore la présence de personnes aussi savantes qu'irréprochables, afin que la sincérité de leur témoignage ne laissât aucun doute de la certitude de l'expérience.

Copie de la relation de l'expérience faite par M. Périer.

La journée de samedi dernier, 19 de ce mois, fut fort inconstante; néanmoins, le temps paroissant assez beau sur les cinq heures du matin, et le sommet du Puy de Dôme se montrant à découvert, je me résolus d'y aller pour y faire l'expérience. Pour cet effet, j'en donnai avis à plusieurs personnes de condition de cette ville de Clermont, qui m'avoient prié de les avertir du jour que j'irois, dont quelques-uns sont ecclésiastiques et les autres séculiers : entre les ecclésiastiques étoient le T. R. P. Bannier, l'un des pères minimes de cette ville, qui a été plusieurs fois correcteur (c'est-à-dire supérieur), et M. Mosnier, chanoine de l'église cathédrale de cette ville; et entre les séculiers, MM. La Ville et Begon, conseillers en la cour des aides, et M. La Porte, docteur en médecine, et la professant ici; toutes personnes très-

capables, non-seulement en leurs charges, mais encore dans toutes les belles connoissances, avec lesquels je fus ravi d'exécuter cette belle partie. Nous fûmes donc ce jour-là tous ensemble sur les huit heures du matin dans le jardin des pères minimes, qui est presque le lieu le plus bas de la ville, où fut commencée l'expérience en cette sorte.

Premièrement, je versai dans un vaisseau seize livres de vif-argent, que j'avois rectifié durant les trois jours précédens; et ayant pris deux tuyaux de verre de pareille grosseur, et longs de quatre pieds chacun, scellés hermétiquement par un bout et ouverts par l'autre, je fis, en chacun d'iceux, l'expérience ordinaire du vide dans ce même vaisseau, et ayant approché et joint les deux tuyaux l'un contre l'autre, sans les tirer hors de leur vaisseau, il se trouva que le vif-argent qui étoit resté en chacun d'eux étoit à même niveau, et qu'il y en avoit en chacun d'eux, au-dessus de la superficie de celui du vaisseau, vingt-six pouces trois lignes et demie. Je refis cette expérience dans ce même lieu, dans les deux mêmes tuyaux, avec le même vif-argent et dans le même vaisseau deux autres fois, et il se trouva toujours que le vif-argent des deux tuyaux étoit à même niveau et en la même hauteur que la première fois.

Cela fait, j'arrêtai à demeure l'un de ces deux tuyaux sur son vaisseau en expérience continuelle : je marquai au verre la hauteur du vif-argent, et, ayant laissé ce tuyau en sa même place, je priai le R. P. Chastin, l'un des religieux de la maison, homme aussi pieux que capable, et qui raisonne très-bien en ces matières, de prendre la peine d'y observer, de moment en moment, pendant toute la journée, s'il y arriveroit du changement. Et avec l'autre tuyau, et une partie de ce même vif-argent, je fus, avec tous ces messieurs, au haut du Puy-de-Dôme, élevé au-dessus des Minimes d'environ cinq cents toises, où, ayant fait les mêmes expériences de la même façon que je les avois faites aux Minimes, il se trouva qu'il ne resta plus dans ce tuyau que la hauteur de vingt-trois pouces deux lignes de vif-argent; au lieu qu'il s'en étoit trouvé aux Minimes, dans ce même tuyau, la hauteur de vingt-six pouces trois lignes et demie, et qu'ainsi, entre les hauteurs du vif-argent de ces deux expériences, il y eut trois pouces une ligne et demie de différence : ce qui nous ravit tous d'admiration et d'étonnement, et nous surprit de telle sorte, que, pour notre satisfaction propre, nous voulûmes la répéter. C'est pourquoi je la fis encore cinq autres fois très-exactement en divers endroits du sommet de la montagne, tantôt à couvert dans la petite chapelle qui y est, tantôt à découvert, tantôt à l'abri, tantôt au vent, tantôt en beau temps, tantôt pendant la pluie et les brouillards qui venoient nous y voir parfois, ayant à chaque fois purgé très-soigneusement d'air le tuyau; et il s'est toujours trouvé à toutes ces expériences la même hauteur de vif-argent de vingt-trois pouces deux lignes, qui font les trois pouces une ligne et demie de différence d'avec les vingt-six pouces trois lignes et demie qui s'étoient trouvés aux Minimes; ce qui nous satisfit pleinement.

Après, en descendant la montagne, je refis en chemin la même expérience, toujours avec le même tuyau, le même vif-argent et le même

vaisseau, en un lieu appelé *Lafon de l'Arbre*, beaucoup au-dessus des Minimes, mais beaucoup plus au-dessous du sommet de la montagne; et là je trouvai que la hauteur du vif-argent resté dans le tuyau étoit de vingt-cinq pouces. Je la refis une seconde fois en ce même lieu, et M. Mosnier, un des ci-devant nommés, eut la curiosité de la faire lui-même : il la fit donc aussi en ce même lieu, et il se trouva toujours la même hauteur de vingt-cinq pouces, qui est moindre que celle qui s'étoit trouvée aux Minimes, d'un pouce trois lignes et demie, et plus grande que celle que nous venions de trouver au haut du Puy-de-Dôme d'un pouce dix lignes, ce qui n'augmenta pas peu notre satisfaction, voyant la hauteur du vif-argent se diminuer suivant la hauteur des lieux.

Enfin étant revenu aux Minimes, j'y trouvai le vaisseau que j'avois laissé en expérience continuelle, en la même hauteur où je l'avois laissé, de vingt-six pouces trois lignes et demie, à laquelle hauteur le R. P. Chastin, qui y étoit demeuré pour l'observation, nous rapporta n'être arrivé aucun changement pendant toute la journée, quoique le temps eût été fort inconstant, tantôt serein, tantôt pluvieux, tantôt plein de brouillards, et tantôt venteux.

J'y refis l'expérience avec le tuyau que j'avois porté au Puy de Dôme, et dans le vaisseau où étoit le tuyau en expérience continuelle; je trouvai que le vif-argent étoit en même niveau dans ces deux tuyaux, et à la même hauteur de vingt-six pouces trois lignes et demie, comme il s'étoit trouvé le matin dans ce même tuyau, et comme il étoit demeuré durant tout le jour dans le tuyau en expérience continuelle.

Je la répétai encore pour la dernière fois, non-seulement dans le même tuyau où je l'avois faite sur le Puy de Dôme, mais encore avec le même vif-argent et dans le même vaisseau que j'y avois porté, et je trouvai toujours le vif-argent à la même hauteur de vingt-six pouces trois lignes et demie, qui s'y étoit trouvée le matin : ce qui acheva de nous confirmer dans la certitude de l'expérience.

Le lendemain, le T. R. P. de La Mare, prêtre de l'Oratoire et théologal de l'église cathédrale, qui avoit été présent à ce qui s'étoit passé le matin du jour précédent dans le jardin des Minimes, et à qui j'avois rapporté ce qui étoit arrivé au Puy de Dôme, me proposa de faire la même expérience au pied et sur le haut de la plus haute des tours de Notre-Dame de Clermont, pour éprouver s'il y arriveroit de la différence. Pour satisfaire à la curiosité d'un homme de si grand mérite, et qui a donné à toute la France des preuves de sa capacité, je fis le même jour l'expérience ordinaire du vide, en une maison particulière qui est au plus haut lieu de la ville, élevée par-dessus le jardin des Minimes de six ou sept toises, et à niveau du pied de la tour : nous y trouvâmes le vif-argent à la hauteur d'environ vingt-six pouces trois lignes, qui est moindre que celle qui s'étoit trouvée aux Minimes d'environ demi-ligne.

Ensuite je la fis sur le haut de la même tour, élevé par-dessus son pied de vingt toises, et par-dessus le jardin des Minimes d'environ vingt-six ou vingt-sept toises; j'y trouvai le vif-argent à la hauteur d'environ vingt-six pouces une ligne, qui est moindre que celle qui s'étoit trouvée

au pied de la tour d'environ deux lignes, et que celle qui s'étoit trouvée aux Minimes d'environ deux lignes et demie.

De sorte que, pour reprendre et comparer ensemble les différentes élévations des lieux où les expériences ont été faites, avec les diverses hauteurs du vif-argent qui est resté dans les tuyaux, il se trouve :

Qu'en l'expérience faite au plus bas lieu, le vif-argent restoit à la hauteur de vingt-six pouces trois lignes et demie.

En celle qui a été faite en un lieu élevé au-dessus du plus bas d'environ sept toises, le vif-argent est resté à la hauteur de vingt-six pouces trois lignes.

En celle qui a été faite en un lieu élevé au-dessus du plus bas d'environ vingt-sept toises, le vif-argent s'est trouvé à la hauteur de vingt-six pouces une ligne.

En celle qui a été faite en un lieu élevé au-dessus du plus bas d'environ cent cinquante toises, le vif-argent s'est trouvé à la hauteur de vingt-cinq pouces.

En celle qui a été faite en un lieu élevé au-dessus du plus bas d'environ cinq cents toises, le vif-argent s'est trouvé à la hauteur de vingt-trois pouces deux lignes.

Et partant il se trouve qu'environ sept toises d'élévation donnent de différence en la hauteur du vif-argent une demi-ligne.

Environ vingt-sept toises, deux lignes et demie.

Environ cent cinquante toises, quinze lignes et demie, qui font un pouce trois lignes et demie.

Et environ cinq cents toises, trente-sept lignes et demie, qui font trois pouces une ligne et demie.

Voilà, au vrai, tout ce qui s'est passé en cette expérience, dont tous ces messieurs qui y ont assisté vous signeront la relation quand vous le désirerez.

Au reste, j'ai à vous dire que les hauteurs du vif-argent ont été prises fort exactement; mais celles des lieux où les expériences ont été faites, l'ont été bien moins.

Si j'avois eu assez de loisir et de commodité, je les aurois mesurées avec plus de précision, et j'aurois même marqué des endroits en la montagne de cent en cent toises, en chacun desquels j'aurois fait l'expérience, et marqué les différences qui se seroient trouvées à la hauteur du vif-argent en chacune de ces stations, pour vous donner au juste la différence qu'auroient produite les premières cent toises, celle qu'auroient donnée les secondes cent toises, et ainsi des autres; ce qui pourroit servir pour en dresser une table, dans la continuation de laquelle ceux qui voudroient se donner la peine de le faire pourroient peut-être arriver à la parfaite connoissance de la juste grandeur du diamètre de toute la sphère de l'air.

Je ne désespère pas de vous envoyer quelque jour ces différences de cent en cent toises, autant pour notre satisfaction que pour l'utilité que le public pourra en recevoir.

Si vous trouvez quelques obscurités dans ce récit, je pourrai vous en éclaircir de vive voix dans peu de jours, étant sur le point de faire un

petit voyage à Paris, où je vous assurerai que je suis, monsieur, votre très-humble et très-affectionné serviteur, PÉRIER.

Cette relation ayant éclairci toutes mes difficultés, je ne dissimule pas que j'en reçus beaucoup de satisfaction; et y ayant vu que la différence de vingt toises d'élévation faisoit une différence de deux lignes à la hauteur du vif-argent, et que six à sept toises en faisoient une d'environ demi-ligne, ce qu'il étoit facile d'éprouver en cette ville, je fis l'expérience ordinaire du vide au haut et au bas de la tour Saint-Jacques de la Boucherie, haute de vingt-quatre à vingt-cinq toises : je trouvai plus de deux lignes de différence à la hauteur du vif-argent; et ensuite je la fis dans une maison particulière, haute de quatre-vingt-dix marches, où je trouvai très-sensiblement demi-ligne de différence; ce qui se rapporte parfaitement au contenu en la relation de M. Périer.

Tous les curieux pourront l'éprouver eux-mêmes, quand il leur plaira.

CONSÉQUENCES.

De cette expérience se tirent beaucoup de conséquences, comme :

Le moyen de connoître si deux lieux sont en même niveau, c'est-à-dire également distans du centre de la terre, ou lequel des deux est le plus élevé, si éloignés qu'ils soient l'un de l'autre, quand même ils seroient antipodes; ce qui seroit comme impossible par tout autre moyen.

Le peu de certitude qui se trouve au thermomètre pour marquer les degrés de chaleur (contre le sentiment commun); que son eau hausse quelquefois lorsque la chaleur augmente, et qu'elle baisse quelquefois au contraire lorsque la chaleur diminue, bien que le thermomètre soit demeuré au même lieu.

L'inégalité de la pression de l'air qui, en méme degré de chaleur, se trouve toujours beaucoup plus pressé dans les lieux les plus bas.

Toutes ces conséquences seront déduites au long dans le *Traité du vide*, et beaucoup d'autres aussi utiles que curieuses.

AU LECTEUR.

Mon cher lecteur, le consentement universel des peuples et la foule des philosophes concourent à l'établissement de ce principe, que la nature souffriroit plutôt sa destruction propre, que le moindre espace vide. Quelques esprits des plus élevés en ont pris un plus modéré : car encore qu'ils aient cru que la nature a de l'horreur pour le vide, ils ont néanmoins estimé que cette répugnance avoit des limites, et qu'elle pouvoit être surmontée par quelque violence; mais il ne s'est encore trouvé personne qui ait avancé ce troisième : que la nature n'a aucune répugnance pour le vide, qu'elle ne fait aucun effort pour l'éviter, et qu'elle l'admet sans peine et sans résistance.

Les expériences que je vous ai données dans mon Abrégé détruisent, à mon jugement, le premier de ces principes; et je ne vois pas que le second puisse résister à celle que je vous donne maintenant; de sorte que je ne fais plus de difficulté de prendre ce troisième, que la nature n'a aucune répugnance pour le vide; qu'elle ne fait aucun effort pour

l'éviter; que tous les effets qu'on a attribués à cette horreur procèdent de la pesanteur et pression de l'air; qu'elle en est la seule et véritable cause, et que, manque de la connoître, on avoit inventé exprès cette horreur imaginaire du vide, pour en rendre raison. Ce n'est pas en cette seule rencontre que, quand la foiblesse des hommes n'a pu trouver les véritables causes, leur subtilité en a substitué d'imaginaires, qu'ils ont exprimées par des noms spécieux qui remplissent les oreilles et non pas l'esprit : c'est ainsi que l'on dit, que la sympathie et antipathie des corps naturels sont les causes efficientes et univoques de plusieurs effets, comme si des corps inanimés étoient capables de sympathie et antipathie; il en est de même de l'antipéristase, et de plusieurs autres causes chimériques, qui n'apportent qu'un vain soulagement à l'avidité qu'ont les hommes de connoître les vérités cachées, et qui, loin de les découvrir, ne servent qu'à couvrir l'ignorance de ceux qui les inventent, et à nourrir celle de leurs sectateurs.

Ce n'est pas toutefois sans regret, que je me départs de ces opinions si généralement reçues; je ne le fais qu'en cédant à la force de la vérité qui m'y contraint. J'ai résisté à ces sentimens nouveaux, tant que j'ai eu quelque prétexte pour suivre les anciens; les maximes que j'ai employées en mon Abrégé le témoignent assez. Mais enfin, l'évidence des expériences me force de quitter les opinions où le respect de l'antiquité m'avoit retenu. Aussi je ne les ai quittées que peu à peu, et je ne m'en suis éloigné que par degrés : car du premier de ces trois principes, que la nature a pour le vide une horreur invincible, j'ai passé à ce second, qu'elle en a de l'horreur, mais non pas invincible; et de là je suis enfin arrivé à la croyance du troisième, que la nature n'a aucune horreur pour le vide.

C'est où m'a porté cette dernière expérience de l'équilibre des liqueurs, que je n'aurois pas cru vous donner entière, si je ne vous avois fait voir quels motifs m'ont porté à la rechercher; c'est pour cette raison que je vous donne ma lettre du 16 novembre dernier, adressante à M. Périer, qui s'est donné la peine de la faire avec toute la justesse et précision que l'on peut désirer, et à qui tous les curieux qui l'ont si longtemps souhaitée, en auront l'obligation entière.

Et comme, par un avantage particulier, ce souhait universel l'avoit rendue fameuse avant que de paroître, je m'assure qu'elle ne deviendra pas moins illustre après sa production, et qu'elle donnera autant de satisfaction que son attente a causé d'impatience.

Il n'étoit pas à propos d'y laisser languir plus longtemps ceux qui la désirent; et c'est pour cette raison que je n'ai pu m'empêcher de la donner par avance, contre le dessein que j'avois de ne le faire que dans le traité entier (que je vous ai promis dans mon Abrégé), dans lequel je déduirai les conséquences que j'en ai tirées, et que j'avois différé d'achever jusqu'à cette dernière expérience, parce qu'elle doit y faire l'accomplissement de mes démonstrations. Mais comme il ne peut pas sitôt paroître, je n'ai pas voulu la retenir davantage, autant pour mériter de vous plus de reconnoissance par ma précipitation, que pour éviter le reproche du tort que je croirois vous faire par un plus long retardement.

RÉCIT

Des observations faites par M. Périer, continuellement jour par jour, pendant les années 1649, 1650 et 1651, en la ville de Clermont en Auvergne, sur la diversité des élévations ou abaissemens du vif-argent dans les tuyaux, et de celles qui ont été faites en même temps sur le même sujet à Paris, par un de ses amis, et à Stockholm en Suède par MM. Chanut et Descartes.

Après l'expérience que je fis au Puy de Dôme, dont la relation est ci-dessus, M. Pascal me manda de Paris à Clermont où j'étois, que non-seulement la diversité des lieux, mais aussi la diversité des temps en un même lieu, selon qu'il faisoit plus ou moins froid ou chaud, sec ou humide, causoient de différentes élévations ou abaissemens du vif-argent dans les tuyaux.

Pour savoir si cela étoit vrai, et si la différence du tempérament de l'air causoit si régulièrement et si constamment cette diversité, qu'on pût en faire une règle générale et en déterminer la cause univoque, je me résolus d'en faire plusieurs expériences durant un long temps.

Et, pour exécuter ce dessein avec plus de facilité, je mis un tuyau avec son vif-argent en expérience continuelle, attaché dans un coin de mon cabinet, marqué par pouces et par lignes, depuis la superficie du vif-argent où il trempoit, jusqu'à trente pouces de hauteur. Je le regardois plusieurs fois le jour, mais particulièrement le soir et le matin, et je marquois en une feuille de papier à quelle hauteur précisément étoit le vif-argent à chaque jour, le matin et le soir, et quelquefois même au milieu du jour, lorsque j'y trouvois des différences; et j'y marquois aussi les différences des temps, pour voir si l'un suivoit toujours l'autre.

Je commençai ces observations au commencement de l'année 1649, et les continuai jusqu'au dernier mars 1651.

Après les avoir faites pendant cinq ou six mois, qui m'avoient fait voir de grandes différences en la hauteur du vif-argent, je trouvai, à la vérité, que d'ordinaire et communément le vif-argent, comme on me l'avoit mandé, se haussoit dans les tuyaux en temps froid et humide ou couvert, et s'abaissoit en temps chaud et sec; mais que cela n'arrivoit pas toujours, et qu'il arrivoit quelquefois au contraire que le vif-argent s'abaissoit le temps devenant plus froid ou plus humide, et se haussoit quand le temps devenoit plus chaud ou plus sec.

Je m'avisai, pour en avoir plus de lumière et plus de connoissance, de tâcher d'en avoir des observations qui fussent faites en d'autres lieux bien éloignés les uns des autres, et qui fussent toutes faites en même temps, afin de voir si on pouvoit découvrir quelque chose en les confrontant les unes aux autres.

Pour cet effet, j'en écrivis à Paris à un de mes amis, qui y étoit pour lors, et qui étoit une personne fort exacte en toutes choses : je le priai de prendre la peine d'y faire les mêmes observations que je faisois à Clermont, et de m'en envoyer ses feuilles tous les mois; ce qu'il fit,

depuis le 1er août 1649 jusqu'à la fin de mars 1651, auquel temps je finis aussi.

Et je me donnai l'honneur d'en écrire aussi à M. Chanut, dont le mérite et la réputation sont connus par toute l'Europe, qui étoit pour lors ambassadeur en Suède, lequel me fit la faveur d'agréer ma prière, et de m'envoyer pareillement les observations que lui et M. Descartes firent à Stockholm, depuis le 21 octobre 1649 jusqu'au 24 septembre 1650, comme je lui envoyois aussi les miennes.

Mais je ne pus faire aucun autre profit de toutes ces observations, confrontées les unes aux autres, sinon de me confirmer ce que j'avois appris par les miennes seules, qui est que d'ordinaire et communément le vif-argent se hausse en temps froid ou en temps couvert et humide, et qu'il s'abaisse en temps chaud et sec, et en temps de pluie ou de neige; mais que cela n'arrive pas toujours, et qu'il arrive quelquefois tout au contraire que le vif-argent se hausse le temps devenant plus chaud, et s'abaisse le temps devenant plus froid; et de même qu'il s'abaisse quand le temps devient plus couvert et plus humide, et se hausse quand il devient plus sec ou plus pluvieux et neigeux; et qu'ainsi on ne sauroit faire de règle générale.

Je crois pourtant qu'on pourroit faire celle-ci avec quelque certitude, que le vif-argent se hausse toutes les fois que ces deux choses arrivent tout ensemble, savoir, que le temps se refroidit, et qu'il se charge ou couvre; et qu'il s'abaisse au contraire toutes les fois que ces deux choses arrivent aussi ensemble, que le temps devienne plus chaud, et qu'il se décharge par la pluie ou par la neige; mais quand il ne se rencontre que l'une de ces deux choses, par exemple, que le temps seulement se refroidit et qu'il ne se couvre point, il peut bien arriver que le vif-argent ne hausse pas, quoique le froid le fasse hausser d'ordinaire, parce qu'il se rencontre une qualité en l'air, comme de la pluie ou de la neige, qui produit un effet contraire; et en ce cas celle des deux qualités, du froid ou de la neige, qui prévaut, l'emporte.

M. Chanut avoit conjecturé, par ses observations des vingt-deux premiers jours, que c'étoient les vents régnans qui causoient ces divers changemens; mais il ne me semble pas que cette conjecture puisse se soutenir dans ses expériences suivantes : aussi avoit-il bien prévu lui-même, comme il paroît par ses lettres, qu'elles pourroient la détruire. Et, en effet, le vif-argent hausse et baisse à toutes sortes de vents et en toutes saisons, quoiqu'il soit ordinairement plus haut en hiver qu'en été; je dis *ordinairement*, parce que cette règle n'est pas sûre. Car, par exemple, je l'ai vu à Clermont, le 16 de janvier 1651, à vingt-cinq pouces onze lignes, et le 17 à vingt-cinq pouces dix lignes, qui est presque son plus bas état : il faisoit ces jours-là un calme doux et un grand ouest; et on l'a vu à Paris, le 9 août 1649, à vingt-huit pouces deux lignes, qui est un état qu'il ne passe guère : je ne puis dire quel temps il faisoit, parce que celui qui faisoit les observations à Paris ne l'a pas marqué. Cependant on peut faire ces remarques générales touchant les plus grandes et les plus petites hauteurs remarquées dans ces expériences.

A Clermont, *le plus haut*, *vingt-six pouces onze lignes et demie*, le 14 février 1651, nord, bien gelé et assez beau.

Cela n'est arrivé que ce jour-là; mais en beaucoup d'autres, durant ce même hiver, il y a eu *vingt-six pouces dix lignes* ou *neuf lignes*, et même *onze lignes*, le 5 novembre 1649.

Le plus bas, *vingt-cinq pouces huit lignes*, le 5 octobre 1649.

Il n'y a que celui-là de si bas, quelques autres à *vingt-cinq pouces neuf lignes*, ou *dix* ou *onze*.

La différence entre le plus haut et le plus bas à Clermont, est d'*un pouce trois lignes et demie.*

A Paris, *le plus haut*, *vingt-huit pouces sept lignes*, le 3 et 5 novembre 1649.

Le plus bas, *vingt-sept pouces trois lignes et demie*, le 4 octobre 1649.

Et on peut remarquer que, dans le même mois de cette année, il se trouva presque au plus haut et au plus bas :

Savoir, *vingt-huit pouces six lignes*, le 4 décembre 1649; et *vingt-sept pouces quatre lignes*, le 14 décembre 1649.

La différence entre le plus haut et le plus bas à Paris, est d'*un pouce trois lignes et demie.*

A Stockholm, *le plus haut*, *vingt-huit pouces sept lignes*, le 8 décembre 1649, auquel jour M. Descartes remarque qu'il faisoit froid.

Le plus bas, *vingt-six pouces quatre lignes et trois quarts*, le 6 mai 1650, vent sud-ouest, temps trouble et doux.

La différence entre le plus haut et le plus bas à Stockholm, est de *deux pouces deux lignes et un quart.*

Et ainsi les inégalités se sont trouvées beaucoup plus grandes à Stockholm, qu'à Paris ou à Clermont.

Et ces inégalités sont quelquefois fort promptes.

Par exemple, 6 décembre 1649, *vingt-sept pouces cinq lignes.*

Et le 8 du même mois, *vingt-huit pouces sept lignes.*

Il m'auroit été facile de faire imprimer la plus grande partie de ces observations, parce que j'en garde encore les originaux; mais j'ai jugé que cela seroit agréable à peu de personnes. On pourra le faire néanmoins, si on le désire; et en attendant, j'ajoute ici deux lettres de M. Chanut, dont j'ai déjà parlé, qui confirment tout ce que j'ai dit de lui dans ce récit.

Copie d'une lettre écrite par M. Chanut à M. Périer.

A Stockholm, le 28 mars 1150.

Monsieur,

Peu de jours après vous avoir écrit la lettre à laquelle vous m'avez fait l'honneur de me répondre le 11 de mars dernier, nous perdîmes M. Descartes d'une maladie pareille à celle que j'avois eue peu de jours auparavant; je soupire encore en vous l'écrivant, car sa doctrine et son esprit étoient encore au-dessous de sa grandeur, de sa bonté et de l'innocence de sa vie. Son serviteur s'en allant ne s'est pas souvenu de me laisser le Mémoire des observations du vif-argent, tel qu'il vous fut en-

voyé. Comme je reçus le vôtre, je réveillai cette curiosité, et pensa que jetant les yeux une fois par jour en un coin de mon cabinet, je n'ôterois rien à ce que je dois au service du roi. J'ai donc commencé à observer depuis le 6 de ce mois, et considérant que si ce que vous m'écrivez est vrai, toutes nos observations seroient vaines, je ne m'en suis pas voulu tenir à cette maxime, que votre expérience me donnoit, que la température et mouvement de l'air ne causoient aucun changement régulier. J'ai ajouté à mes observations du chaud et du froid, sec et humide, trouble et serein, celle des vents régnans, qu'il me semble que feu M. Descartes n'avoit pas observés. Or, je trouve en vingt-deux jours d'expériences que j'ai faites pendant des temps bizarres et changeans, comme cette saison est toujours inégale en ce pays, que les vents qui règnent causent une augmentation ou diminution uniforme, et presque régulière, du mercure dans son tuyau, ce que je ne puis croire qui ait échappé à des observateurs exacts comme vous êtes, et je croirois plutôt que vous vouliez exercer l'esprit de M. Descartes, en lui célant cette particularité. Je continuerai jusqu'à ce que je m'en lasse, et vous enverrai la copie de mon journal si vous la désirez, où vous verrez fidèlement ce qui s'est passé dans mon cabinet. Je vous supplierai aussi de me donner l'histoire de votre observation, sans y omettre les vents, car c'est là où je trouve ici la cause continuelle des variétés en la hauteur du mercure dans le tuyau. Peut-être que les expériences suivantes détruiront cette première conjecture que j'ai, et dont je vous fais part, sans avoir la pensée de vous dire une chose nouvelle. Je souhaite, de tout mon cœur, que M. Pascal, votre beau-frère, qui a le temps et un esprit merveilleux, trouve en cette matière quelque ouverture de conséquence pour la physique. Je me tiendrois heureux que notre septentrion lui donnât quelques observations qui pussent aider sa spéculation; elles me seront d'autant plus chères, que par leur moyen je vous écrirai plus souvent que je suis, monsieur, votre très-humble et obéissant serviteur, CHANUT.

Copie d'une autre lettre du même sieur Chanut audit sieur Périer.

A Stockholm, le 24 septembre 1650.

Monsieur,

J'ai reçu, avec la lettre que vous m'avez fait la faveur de m'écrire du 27 juillet, le Mémoire des observations que je garde bien précieusement, et comme une marque de la bienveillance dont vous m'honorez, et comme une matière de bonne méditation, quand je me trouverai en plus de liberté que ces occupations civiles ne m'en donnent. Je vous demande trêve jusqu'alors, et je pense beaucoup faire de continuer l'observation sur laquelle nous raisonnerons un jour, si elle nous en donne le moyen. Cependant, afin que vous tiriez quelque petite satisfaction de la peine que vous avez prise de m'écrire, je vous dirai que feu M. Descartes s'étoit proposé de continuer cette même observation dans un tuyau de verre, vers le milieu duquel il y eût une retraite et un gros ventre, environ à la hauteur où monte à peu près le vif-argent, au-dessus duquel vif-argent mettant de l'eau jusqu'au milieu environ de la

hauteur qui reste au-dessus du vif-argent, il auroit vu plus exactement les changemens. J'ai voulu essayer ce moyen; mais, parce que nos verriers sont maladroits, et qu'ils n'ont pas de lieu propre à faire recuire ces tuyaux avec cette retraite ou gros ventre dans le milieu, ils se sont tous cassés, et je n'ai autre expérience à la main que l'ordinaire, laquelle je vous envoie, vaille ce qu'elle pourra. Si cet entretien, que vous m'avez fait la faveur d'agréer, ne réussit pas à nous avancer dans la connoissance de la nature, au moins servira-t-il, s'il vous plaît, à entretenir notre amitié. Je vous demande aussi que vous me fassiez la faveur de m'aider à conserver celle de MM. Pascal. Ma femme et moi présentons nos très-humbles baisemains à Mme Périer et à Mlle Pascal, et ne sommes pas sans espérance que nous aurons quelque jour le bonheur de vous saluer dans la province. Je suis, monsieur, votre très-humble et très-obéissant serviteur, CHANUT.

NOUVELLES EXPÉRIENCES

FAITES EN ANGLETERRE,

Expliquées par les principes établis dans les deux traités précédens, *De l'équilibre des liqueurs*, et *De la pesanteur de la masse de l'air.*

Outre les expériences qui ont été rapportées dans les traités précédens, il peut s'en faire une infinité d'autres pareilles, dont on rendra toujours raison par le principe de la pesanteur de la masse de l'air.

Plusieurs personnes ont pris plaisir depuis quinze ou vingt ans d'en inventer de nouvelles; et entre les autres, un gentilhomme anglois, nommé M. Boyle, en a fait de fort curieuses, que l'on peut voir dans un livre qu'il en a composé en anglois, et qui a été depuis traduit en latin sous ce titre : *Nova experimenta physico-mechanica de aere.*

L'on a jugé à propos d'en mettre ici en abrégé les principales, pour faire voir le rapport qu'elles ont avec celles qui sont contenues dans les traités précédens, et pour confirmer encore davantage le principe qu'on y a établi de la pesanteur de la masse de l'air.

Une des choses les plus remarquables qui soit dans ce livre des expériences de M. Boyle, est la machine dont il s'est servi pour les faire; car comme il est impossible d'ôter tout l'air d'une chambre, et qu'on ne s'étoit avisé que de vider le bout d'un tuyau bouché par en haut par le moyen du vif-argent; cet espace vide étant si petit, l'on ne pouvoit y faire aucune expérience considérable.

Au lieu que se servant d'une machine dont la première invention est due à ceux de Magdebourg, mais qu'il a depuis beaucoup perfectionnée, il a trouvé moyen de vider un fort grand vase de verre qui a une grande ouverture par en haut, par le moyen de laquelle on peut y mettre tout ce que l'on veut, et voir au travers du verre ce qui arrive quand on l'a vidé.

Cette machine est composée de deux principales parties; savoir, d'un grand vase de verre, qu'il appelle *récipient*, à cause de la ressemblance qu'il a avec les vases dont se servent les chimistes, et qu'ils appellent de

ce nom, et d'un autre vase qu'il appelle *pompe*, à cause qu'il sert à attirer et à sucer l'air contenu dans le récipient.

Le premier vase, nommé *récipient*, est d'une figure ronde comme une boule, pour être plus fort, et pouvoir mieux résister à la pression de l'air quand on le vide. Il est d'une telle grandeur, qu'il peut contenir soixante livres d'eau à seize onces la livre; c'est-à-dire environ trente pintes, mesure de Paris. Et c'est, dit-il, le plus grand que les ouvriers aient pu faire.

Il a par en haut une ouverture fort large, et un couvercle propre pour la boucher, qui est encore percé par le milieu, et que l'on bouche avec une clef de robinet que l'on lève plus ou moins ou tout à fait, pour faire rentrer autant d'air que l'on veut dans le récipient que l'on a vidé.

Outre cette ouverture d'en haut, le récipient en a encore une par en bas, qui va un peu en pointe, et dans laquelle entre une des ouvertures d'un robinet.

L'autre partie de la machine, appelée *pompe*, est faite d'airain en forme d'un cylindre creux, long environ de treize ou quatorze pouces, et dont la cavité en a près de trois de diamètre.

Elle a deux ouvertures par en haut, l'une dans laquelle entre l'autre ouverture du robinet, qui entre aussi par son autre côté dans l'ouverture d'en bas du récipient, comme nous avons dit; en sorte qu'il y a par ce moyen communication du récipient dans la pompe, quand le robinet est ouvert: l'autre à côté, par laquelle on peut faire sortir l'air qui est dans cette pompe ou cylindre creux, et à laquelle il y a une soupape qui laisse sortir l'air de dedans, et empêche de rentrer celui de dehors.

Cette pompe est tout ouverte par en bas, et l'on bouche cette ouverture avec un gros piston, qui est juste, en sorte que l'air ne puisse passer entre deux.

Ce piston a pour manche une lame de fer étroite, mais assez épaisse, un peu plus longue que le cylindre, ayant un côté tout dentelé et plein de crans, dans lesquels entrent les crans d'une roue attachée à des pièces de bois qui servent de soutien à ce cylindre et à toute la machine: et ainsi en faisant tourner cette roue, l'on fait monter ou descendre le piston comme l'on veut, et l'on chasse de cette sorte l'air qui est contenu dans le cylindre, qui sort par le trou qui est en haut, et que l'on rebouche aussitôt avec un morceau de cuivre fait exprès, qui est juste à l'ouverture.

Cette description suffit pour pouvoir entendre les expériences que nous devons rapporter ci-après: ceux qui désireront en voir une plus ample et plus particularisée, pourront la trouver dans le livre de M. Boyle, où l'on voit aussi la figure de cette machine gravée dans une planche.

Pour vider maintenant le récipient par le moyen de cette machine, il faut, premièrement, que le piston soit au bas du cylindre, que le robinet qui fait la communication du récipient dans la pompe soit fermé, et que le trou du haut du cylindre soit débouché.

Les choses étant ainsi disposées, il faut faire monter le piston par le moyen de la roue, jusqu'au haut du cylindre, et en faire ainsi sortir tout l'air qui y est par le trou d'en haut qui est ouvert, et que l'on bouche aussitôt avec le bouchon de cuivre; puis il faut faire redescendre le piston jusqu'au bas de la pompe, en sorte qu'elle est par ce moyen toute vide d'air : après cela il faut ouvrir le robinet qui fait la communication du récipient dans la pompe; et ainsi l'air du récipient sortant par ce robinet, remplit la pompe, qu'il faut encore vider de la même manière qu'auparavant en fermant le robinet, et puis la remplir et la revider toujours, jusqu'à ce qu'on n'entende plus l'air sortir par le trou d'en haut de la pompe, et qu'en approchant une bougie allumée, elle ne s'éteigne plus; par où l'on connoît que l'on ne tire plus rien du récipient, et qu'ainsi il est autant vide qu'on peut le vider par cette machine.

Mais il est facile de comprendre qu'il est impossible de le vider entièrement par ce moyen-là, comme M. Boyle l'avoue lui-même; parce que lorsque, après avoir vidé la pompe, on ouvre le robinet, tout l'air du récipient n'entre pas dans la pompe : mais il se partage dans ces deux vases suivant la proportion de leurs capacités; et ainsi le récipient étant beaucoup plus grand que la pompe, il demeure une plus grande partie d'air dans le récipient que dans la pompe; en sorte que l'on ne sauroit empêcher qu'il n'y en reste toujours une quantité un peu considérable, à moins que la capacité de la pompe ne fût incomparablement plus grande que celle du récipient; ce qui n'a point été fait.

Et ainsi il ne faut pas s'étonner si quelques effets ne s'y font pas comme ils devroient se faire, s'il étoit entièrement vide; comme, par exemple, que le vif-argent n'y tombe pas entièrement dans l'expérience ordinaire, et que même quand on la fait avec de l'eau, elle y demeure suspendue en une hauteur assez considérable.

Mais il y a cela à remarquer, que si ces effets ne s'y font pas entièrement, du moins ils s'y font dans la plus grande partie, et suivant la proportion de l'air que l'on a tiré du récipient; car, par exemple, comme le rapporte M. Boyle dans l'expérience qu'il en a faite, le vif-argent n'y demeure pas suspendu à la hauteur de vingt-sept pouces comme il feroit dans l'air, mais seulement à celle d'un doigt, c'est-à-dire à neuf ou dix lignes; et l'eau n'y demeure pas suspendue à la hauteur de trente-deux pieds, mais seulement à celle d'un pied, suivant la même proportion que le vif-argent; ce qui est une grande diminution, et qui montre aussi bien que ces effets viennent de la pesanteur de l'air, dont il ne reste qu'une petite partie dans le récipient, que si cette eau et ce vif-argent tomboient entièrement dans un lieu qui fût entièrement vide.

Car il est certain que rien ne fait mieux voir que c'est la pesanteur de la masse de l'air qui produit tous ces effets que l'on remarque dans les liqueurs qui demeurent suspendues les unes plus haut, et les autres plus bas, dans l'expérience ordinaire du vide, que de voir que, comme ces effets cessent entièrement lorsque l'on ôte entièrement la pression et le ressort de l'air, ce que l'on fait par l'expérience du vide dans le vide, ils diminuent aussi très-sensiblement, et sont presque réduits à rien,

lorsque l'air qui presse le vase où la liqueur se répand, est extrêmement diminué, comme en cette machine de M. Boyle.

Et c'est pourquoi, encore que l'on puisse faire quelques expériences dans ce récipient, qui paroissent toutes semblables à celles qui se feroient en plein air; comme, par exemple, que deux corps polis y demeurent attachés l'un contre l'autre sans se désunir, quand on en a attiré l'air avec la pompe. il ne s'ensuit pas pour cela que cet effet puisse se faire aussi bien dans le vide que dans l'air, et qu'ainsi il n'est point causé par la pesanteur de l'air, ce qui seroit contraire à ce qui a été dit dans le traité de la pesanteur de la masse de l'air; mais il s'ensuit seulement que cet effet vient de l'air qui est resté dans le récipient, lequel se dilatant et se raréfiant, à cause qu'il n'est plus comprimé par l'air extérieur, presse, par son ressort, ces deux corps l'un contre l'autre, et a encore assez de force pour les empêcher de se désunir : mais comme ils ne sont pas si pressés que dans l'air, si l'on pouvoit mettre les mains dans ce récipient, l'on ne sentiroit pas sans doute une si grande résistance à les séparer; ou bien si l'on vouloit en faire l'expérience d'une manière plus facile, il n'y auroit qu'à pendre au corps de dessous un poids un peu considérable, qui fît le même effet qu'une main qui le tireroit, et l'on verroit qu'en vidant le récipient, ces deux corps se sépareroient beaucoup plus facilement que dans l'air. Ainsi cette expérience est toute semblable à celles que nous avons rapportées de l'eau et du vif-argent que l'on fait dans cette machine. Car comme si, au lieu d'un tuyau de trois ou quatre pieds dont on se sert pour faire l'expérience avec de l'eau, dans lequel l'eau se vide jusqu'à la hauteur d'un pied, on se servoit d'un tuyau qui ne fût long que d'un demi-pied, il arriveroit qu'en vidant l'air du récipient l'eau ne tomberoit point, mais demeureroit toujours suspendue jusqu'au haut du tuyau, parce que l'air qui y reste suffiroit encore pour la soutenir dans cette hauteur; et, comme l'on ne pourroit pas conclure de là que l'eau demeureroit de même suspendue dans des tuyaux plus hauts, comme de trois ou quatre pieds, ou de quelque hauteur qu'ils fussent, et qu'ainsi cet effet de la suspension de l'eau ne vient point de la pression de l'air : l'on ne peut pas conclure aussi, de ce que deux corps pesant peut-être chacun quatre ou cinq onces, ou même un peu plus, demeurent attachés l'un contre l'autre dans ce récipient, que deux corps beaucoup plus pesans y demeureront de même unis l'un à l'autre, et qu'ainsi cet effet de l'adhésion de deux corps polis, appliqués l'un contre l'autre, n'est point causé par la pesanteur de l'air.

Ainsi l'on voit dans toutes les expériences qui peuvent se faire dans cette machine, que celles où il arrive des effets pareils à ceux que nous venons de rapporter, ne font rien contre ce principe de la pesanteur de l'air, puisque l'on peut dire, avec raison, qu'ils sont causés par l'air qui reste dans le récipient; et que les autres au contraire servent autant à le prouver et à l'établir, que si le récipient étoit tout à fait vidé.

Nous allons donc en rapporter quelques-unes, tirées, comme nous avons dit, du livre de M. Boyle, en faisant voir qu'elles dépendent manifestement du principe de la pesanteur de l'air.

I. Il remarque premièrement, qu'ayant vidé le récipient en la manière qui a été dite, l'on a beaucoup de peine à lever la clef du robinet qui est au haut du récipient, comme nous avons marqué, et qu'on la sent pesante, comme si un grand poids pendoit au bout d'en bas.

Ce qui est bien naturel et bien aisé à expliquer par le principe de la pesanteur de l'air; car dans cette expérience, l'air ne touchant point cette clef par-dessous, mais seulement par-dessus, il faut, pour la lever, lever la colonne d'air qui pèse dessus, laquelle étant pesante, il ne faut pas s'étonner si on trouve la clef pesante, et si on a de la peine à la lever.

II. Il remarque aussi qu'après avoir fait monter le piston jusqu'au haut du cylindre, et qu'on en a ainsi chassé tout l'air, l'on a beaucoup de peine à le faire redescendre, et qu'il semble qu'il soit collé et attaché au haut du cylindre; en sorte qu'il faut employer une grande force pour l'en séparer.

Cet effet n'est pas plus malaisé à expliquer que le précédent. Car puisque l'air qui environne le piston le presse par-dessous et non par-dessus, il faut, pour le baisser, repousser et soulever la colonne d'air qui fait effort contre le bas; ce qui ne peut se faire qu'avec peine, et en y employant une force considérable.

III. Il rapporte après cela plusieurs expériences qu'il a faites dans le récipient; et premièrement celle d'une vessie d'agneau assez ample, sèche, fort molle et seulement à demi pleine d'air, dont ayant bien bouché l'orifice, en sorte qu'il ne pouvoit point du tout y entrer d'air, il la mit en cet état dans le récipient, et en ayant ensuite bien bouché l'ouverture, il le fit vider par le moyen de la pompe; et à mesure qu'il se vidoit, l'on voyoit la vessie s'enfler, en sorte qu'avant même que le récipient fût autant désempli d'air que l'on pouvoit le désemplir, elle paroissoit entièrement tendue, et aussi bandée que si l'on y eût soufflé de l'air. Pour être encore plus assuré que l'enflure de cette vessie venoit de ce qu'on ôtoit l'air qui l'environnoit et qui la pressoit, il fit lever un peu la clef du robinet qui étoit au haut du récipient, pour y faire rentrer de l'air petit à petit; et à mesure qu'il y entroit, on voyoit la vessie se ramollir peu à peu, et enfin, quand on y laissoit entrer tout à fait l'air, elle devenoit aussi flasque qu'auparavant.

Il rapporte sur ce sujet une expérience toute pareille que l'on faisoit avec une vessie de carpe, dont il attribue l'invention à M. de Roberval.

Il a refait plusieurs fois cette même expérience avec la vessie d'agneau, et il remarque que, lorsqu'il y laissoit trop d'air, elle se crevoit, et en crevant faisoit un bruit semblable à celui d'un pétard.

Pour rendre raison de cet effet par notre principe, il n'y a qu'à dire en un mot qu'il est tout pareil à celui qui a été rapporté dans le *Traité de la pesanteur de l'air*, page 272, d'un ballon qui s'enfle ou se désenfle, à mesure qu'on le monte au haut d'une montagne, ou qu'on l'en fait descendre, puisqu'on voit de même cette vessie d'agneau s'enfler à mesure qu'on diminue l'air qui la comprimoit, et qui la faisoit paroître molle et flasque.

IV. Il remarque encore, par plusieurs expériences qu'il a faites, qu'en

vidant un vase de verre qui ne soit pas rond, mais seulement d'une figure ovalique, il se casse toujours, quoiqu'on le fasse fort épais; au lieu que quand il est tout à fait rond comme une boule, quoiqu'il soit beaucoup plus mince, il ne se casse point, parce que cette figure fait que ses parties s'entre-soutiennent et se fortifient les unes les autres.

Cet effet ne vient pas de l'horreur que la nature a pour le vide, puisque si cela étoit, le vase rond devroit aussi bien se casser que l'autre : mais il vient de la pesanteur de l'air, lequel pressant beaucoup ces deux vases par dehors, et très-peu par dedans, puisqu'ils sont presque vides d'air, casse celui qui est en forme ovalique, parce qu'il a moins de résistance; mais ne casse point celui qui est rond, parce que cette figure le rend plus fort et plus capable de résister à l'effort que l'air fait pour le casser.

V. C'est aussi par ce même principe de la pesanteur de l'air, qu'il faut expliquer une autre expérience qu'il rapporte d'un siphon plein d'eau, long d'un pied et demi, qu'il mit dans son récipient, et qui cessa de couler dès lors qu'on eut vidé ce récipient par le moyen de la pompe; car il est clair que l'air qui reste dans le récipient ne pouvant élever l'eau par sa pression que jusqu'à un pied, comme on a remarqué ci-dessus, un siphon long d'un pied et demi devoit cesser de couler.

VI. Il a encore éprouvé que des poids d'inégale grosseur, pesant également dans l'air, perdoient leur équilibre dans le vide; et il en a fait l'expérience en cette manière.

Il prit une vessie sèche, à demi pleine d'air, dont il boucha bien l'ouverture, et l'attacha en cette sorte à l'un des bras d'une balance si juste et si délicate, que la trente-deuxième partie d'un grain étoit capable de la faire incliner d'un côté ou d'autre, et à l'autre bras de la balance il mit un poids de plomb de la même pesanteur que la vessie; en sorte que ces deux poids étoient ainsi en équilibre dans l'air; et même il remarque que le poids de plomb pesoit un peu plus que la vessie.

Ayant mis le tout dans le récipient, et en ayant tiré l'air avec la pompe, l'on voyoit au contraire le côté où étoit pendue la vessie, l'emporter par-dessus l'autre, et baisser de plus en plus à mesure que l'on tiroit plus d'air du récipient; et en laissant rentrer l'air petit à petit, l'on voyoit aussi la vessie remonter peu à peu, et enfin redevenir à son équilibre quand on y laissoit entrer tout à fait l'air.

Cet effet est tout pareil à ce qui a été dit dans le *Traité de l'Équilibre des liqueurs* (pag. 264 et 265), qu'il peut se faire que des poids soient en équilibre dans l'air, qui ne le seroient pas dans l'eau, ni même dans un air plus humide; et la raison qui en est donnée en cet endroit doit aussi servir à expliquer l'expérience que nous venons de rapporter.

Car il est clair que lorsque la vessie est dans l'air en équilibre avec le plomb, elle est contre-pesée en cet état non-seulement par le plomb, mais par un volume d'air égal à soi, beaucoup plus grand que n'est celui qui contre-pèse le plomb : or étant mise dans le récipient presque vide, encore que sa pesanteur naturelle n'augmente pas, néanmoins elle est moins contre-pesée et moins soutenue, parce que le volume d'air qui la contre-pesoit a perdu beaucoup de sa force par la diminution de l'air, et bien plus à proportion que celui qui contre-pesoit le plomb, parce qu'il

est bien plus grand; et par conséquent la vessie qui étoit en équilibre dans l'air, doit s'abaisser dans ce vide, et cesser d'être en équilibre.

Outre ces expériences, M. Boyle en a fait quelques autres, lesquelles ne dépendent point, à la vérité, du principe de la pesanteur de l'air, et qui arriveroient tout de même quand il ne pèseroit pas, mais qui n'y sont point aussi contraires.

Il a éprouvé, par exemple, qu'un pendule ne va pas si vite dans l'air que dans le vide; et pour le connoître, il en a pris deux parfaitement égaux dans l'air, dont il en a mis l'un dans le récipient, et laissé l'autre dans l'air; et ayant ensuite fait vider le récipient, le pendule qui y étoit enfermé alloit plus vite que celui qui étoit en plein air, en sorte que l'on comptoit vingt-deux battemens de l'un contre vingt seulement de l'autre.

Il a encore remarqué que les sons diminuoient beaucoup de leur force dans le récipient lorsqu'on le vidoit; ce qu'il a éprouvé par le moyen d'une montre sonnante qu'il a mise dans ce récipient, et que l'on n'entendoit presque point sonner après l'avoir vidé, quoiqu'on l'entendît fort bien auparavant.

Ce qui n'est point contraire, comme il semble, à ce qui a été dit dans l'expérience que nous avons rapportée de la vessie, laquelle en se crevant faisoit autant de bruit qu'un pétard; car tout ce qu'on peut justement en conclure, est qu'il faudroit que le bruit eût été beaucoup plus grand.

Il a voulu éprouver, outre cela, si le feu pourroit se conserver dans ce récipient vidé, et combien de temps il y dureroit; et pour cela il y mit premièrement une chandelle de suif allumée, qu'il dit s'être éteinte en moins d'une minute, après avoir vidé le récipient; et ayant fait la même expérience avec un petit cierge de cire blanche, il n'y demeura pas non plus allumé plus d'une minute.

Il mit ensuite des charbons ardens, et l'ayant fait aussitôt vider, il remarqua que, depuis que l'on avoit commencé à le vider jusqu'à ce que les charbons fussent entièrement éteints, il s'étoit seulement passé trois minutes; et y ayant mis de la même manière un fer rouge au lieu de charbons, cette rougeur dura visible pendant l'espace de quatre minutes.

Il a fait encore la même épreuve avec un bout de la mèche dont se servent les soldats pour leurs mousquets, qu'il suspendit tout allumée dans son récipient, et qui s'éteignoit tout de même à mesure qu'on le vidoit.

Il a voulu encore après cela éprouver ce que deviendroient les animaux que l'on mettroit dans ce récipient; si ceux qui ont des ailes y voleroient; si les autres y marcheroient; et enfin si les uns et les autres pourroient y vivre longtemps.

On y mit premièrement de ceux qui ont des ailes, comme de grosses mouches, des abeilles et des papillons; mais après qu'on eut vidé le récipient, ils tombèrent du haut en bas sans pouvoir du tout se servir de leurs ailes.

Il y mit encore une alouette, qui non-seulement y perdit l'usage de ses ailes, mais devint tout d'un coup languissante; et ayant ensuite souffert plusieurs convulsions très-violentes, on la vit enfin expirer, et tout cela se passa pendant l'espace de neuf ou dix minutes.

On y mit ensuite un moineau, qui y mourut de même, après cinq ou

six minutes; et après, une souris qui y vécut un peu plus longtemps, et qui n'y souffrit pas tant de convulsions que les animaux à ailes.

Voulant aussi éprouver si les poissons pourroient y vivre, et ne pouvant en avoir d'autres vivans, il y mit une anguille, laquelle, après que l'on eut vidé le récipient, y demeura couchée et immobile durant longtemps, comme si elle eût été morte. Néanmoins, quand on ouvrit après cela le récipient et qu'on l'en retira, on trouva qu'elle ne l'étoit pas, et qu'elle étoit aussi vive qu'avant qu'on l'y mît.

Voilà ce que l'on a jugé à propos d'extraire du livre de M. Boyle, et les expériences que l'on a trouvées les plus considérables, et qui ont le plus de rapport au sujet des traités précédens, dont les unes ont cela de particulier, qu'elles prouvent clairement que l'air a de la pesanteur, et toutes ont cela de commun, qu'elles ne prouvent rien qui soit contraire à ce principe.

FRAGMENT D'UN TRAITÉ DU VIDE.

Le respect que l'on porte à l'antiquité est aujourd'hui à tel point, dans les matières où il doit avoir moins de force, que l'on se fait des oracles de toutes ses pensées, et des mystères mêmes de ses obscurités; que l'on ne peut plus avancer de nouveau sans péril, et que le texte d'un auteur suffit pour détruire les plus fortes raisons.

Ce n'est pas que mon intention soit de corriger un vice par un autre, et de ne faire nulle estime des anciens, parce que l'on en fait trop. Je ne prétends pas bannir leur autorité pour relever le raisonnement tout seul, quoique l'on veuille établir leur autorité seule au préjudice du raisonnement.

Pour faire cette importante distinction[1] avec attention, il faut considérer que les unes dépendent seulement de la mémoire et sont purement historiques, n'ayant pour objet que de savoir ce que les auteurs ont écrit; les autres dépendent seulement du raisonnement, et sont entièrement dogmatiques, ayant pour objet de chercher et découvrir les vérités cachées. Celles de la première sorte sont bornées, d'autant que les livres dans lesquels elles sont contenues....

C'est suivant cette distinction qu'il faut régler différemment l'étendue de ce respect. Le respect que l'on doit avoir pour....

Dans les matières où l'on recherche seulement de savoir ce que les auteurs ont écrit, comme dans l'histoire, dans la géographie, dans la jurisprudence, dans les langues,... et surtout dans la théologie; et enfin dans toutes celles qui ont pour principe, ou le fait simple, ou l'institution, divine ou humaine, il faut nécessairement recourir à leurs livres, puisque tout ce que l'on en peut savoir y est contenu : d'où il est évident que l'on peut en avoir la connoissance entière, et qu'il n'est pas possible d'y rien ajouter.

S'il s'agit de savoir qui fut le premier roi des François; en quel lieu les géographes placent le premier méridien; quels mots sont usités dans

1. Entre les deux sortes de sciences.

une langue morte, et toutes les choses de cette nature; quels autres moyens que les livres pourroient nous y conduire? Et qui pourra rien ajouter de nouveau à ce qu'ils nous en apprennent, puisqu'on ne veut savoir que ce qu'ils contiennent? C'est l'autorité seule qui nous en peut éclaircir. Mais où cette autorité a la principale force, c'est dans la théologie, parce qu'elle y est inséparable de la vérité, et que nous ne la connoissons que par elle : de sorte que pour donner la certitude entière des matières les plus incompréhensibles à la raison, il suffit de les faire voir dans les livres sacrés (comme, pour montrer l'incertitude des choses les plus vraisemblables, il faut seulement faire voir qu'elles n'y sont pas comprises); parce que ses principes sont au-dessus de la nature et de la raison, et que, l'esprit de l'homme étant trop foible pour y arriver par ses propres efforts, il ne peut parvenir à ces hautes intelligences s'il n'y est porté par une force toute-puissante et surnaturelle.

Il n'en est pas de même des sujets qui tombent sous le sens ou sous le raisonnement : l'autorité y est inutile; la raison seule a lieu d'en connoître. Elles ont leurs droits séparés : l'une avoit tantôt tout l'avantage; ici l'autre règne à son tour. Mais comme les sujets de cette sorte sont proportionnés à la portée de l'esprit, il trouve une liberté tout entière de s'y étendre : sa fécondité inépuisable produit continuellement, et ses inventions peuvent être tout ensemble sans fin et sans interruption.......

C'est ainsi que la géométrie, l'arithmétique, la musique, la physique, la médecine, l'architecture, et toutes les sciences qui sont soumises à l'expérience et au raisonnement, doivent être augmentées pour devenir parfaites. Les anciens les ont trouvées seulement ébauchées par ceux qui les ont précédés; et nous les laisserons à ceux qui viendront après nous en un état plus accompli que nous ne les avons reçues. Comme leur perfection dépend du temps et de la peine, il est évident qu'encore que notre peine et notre temps nous eussent moins acquis que leurs travaux, séparés des nôtres, tous deux néanmoins joints ensemble doivent avoir plus d'effet que chacun en particulier.

L'éclaircissement de cette différence doit nous faire plaindre l'aveuglement de ceux qui apportent la seule autorité pour preuve dans les matières physiques, au lieu du raisonnement ou des expériences; et nous donner de l'horreur pour la malice des autres, qui emploient le raisonnement seul dans la théologie au lieu de l'autorité de l'Écriture et des Pères. Il faut relever le courage de ces gens timides qui n'osent rien inventer en physique, et confondre l'insolence de ces téméraires qui produisent des nouveautés en théologie. Cependant le malheur du siècle est tel, qu'on voit beaucoup d'opinions nouvelles en théologie, inconnues à toute l'antiquité, soutenues avec obstination et reçues avec applaudissement : au lieu que celles qu'on produit dans la physique, quoiqu'en petit nombre, semblent devoir être convaincues de fausseté dès qu'elles choquent tant soit peu les opinions reçues : comme si le respect qu'on a pour les anciens philosophes étoit de devoir, et que celui que l'on porte aux plus anciens des Pères étoit seulement de bienséance! Je laisse aux personnes judicieuses à remarquer l'importance de cet abus qui pervertit l'ordre des sciences avec tant d'injustice; et je crois qu'il y en aura peu

qui ne souhaitent que cette.... s'applique à d'autres matières, puisque les inventions nouvelles sont infailliblement des erreurs dans les matières que l'on profane impunément; et qu'elles sont absolument nécessaires pour la perfection de tant d'autres sujets incomparablement plus bas, que toutefois on n'oseroit toucher.

Partageons avec plus de justice notre crédulité et notre défiance, et bornons ce respect que nous avons pour les anciens. Comme la raison le fait naître, elle doit aussi le mesurer; et considérons que, s'ils fussent demeurés dans cette retenue de n'oser rien ajouter aux connoissances qu'ils avoient reçues, ou que ceux de leur temps eussent fait la même difficulté de recevoir les nouveautés qu'ils leur offroient, ils se seroient privés eux-mêmes et leur postérité du fruit de leurs inventions. Comme ils ne se sont servis de celles qui leur avoient été laissées que comme de moyens pour en avoir de nouvelles, et que cette heureuse hardiesse leur avoit ouvert le chemin aux grandes choses, nous devons prendre celles qu'ils nous ont acquises de la même sorte, et à leur exemple en faire les moyens et non pas la fin de notre étude, et ainsi tâcher de les surpasser en les imitant. Car qu'y a-t-il de plus injuste que de traiter nos anciens avec plus de retenue qu'ils n'ont fait ceux qui les ont précédés, et d'avoir pour eux ce respect inviolable qu'ils n'ont mérité de nous que parce qu'ils n'en ont pas eu un pareil pour ceux qui ont eu sur eux le même avantage? . . . .

Les secrets de la nature sont cachés; quoiqu'elle agisse toujours, on ne découvre pas toujours ses effets : le temps les révèle d'âge en âge, et, quoique toujours égale en elle-même, elle n'est pas toujours également connue. Les expériences qui nous en donnent l'intelligence multiplient continuellement; et, comme elles sont les seuls principes de la physique, les conséquences multiplient à proportion. C'est de cette façon que l'on peut aujourd'hui prendre d'autres sentimens et de nouvelles opinions sans mépriser...., sans ingratitude, puisque les premières connoissances qu'ils nous ont données ont servi de degrés aux nôtres, et que dans ces avantages nous leur sommes redevables de l'ascendant que nous avons sur eux; parce que, s'étant élevés jusqu'à un certain degré où ils nous ont portés, le moindre effort nous fait monter plus haut, et avec moins de peine et moins de gloire nous nous trouvons au-dessus d'eux. C'est de là que nous pouvons découvrir des choses qu'il leur étoit impossible d'apercevoir. Notre vue a plus d'étendue, et, quoiqu'ils connussent aussi bien que nous tout ce qu'ils pouvoient remarquer de la nature, ils n'en connoissoient pas tant néanmoins, et nous voyons plus qu'eux.

Cependant il est étrange de quelle sorte on révère leurs sentimens. On fait un crime de les contredire et un attentat d'y ajouter, comme s'ils n'avoient plus laissé de vérités à connoître. N'est-ce pas là traiter indignement la raison de l'homme, et la mettre en parallèle avec l'instinct des animaux, puisqu'on en ôte la principale différence, qui consiste en ce que les effets du raisonnement augmentent sans cesse, au lieu que l'instinct demeure toujours dans un état égal? Les ruches des abeilles étoient aussi bien mesurées il y a mille ans qu'aujourd'hui, et chacune d'elles forme cet hexagone aussi exactement la première fois

que la dernière. Il en est de même de tout ce que les animaux produisent par ce mouvement occulte. La nature les instruit à mesure que la nécessité les presse; mais cette science fragile se perd avec les besoins qu'ils en ont : comme ils la reçoivent sans étude, ils n'ont pas le bonheur de la conserver; et toutes les fois qu'elle leur est donnée, elle leur est nouvelle, puisque, la nature n'ayant pour objet que de maintenir les animaux dans un ordre de perfection bornée, elle leur inspire cette science nécessaire toujours égale, de peur qu'ils ne tombent dans le dépérissement, et ne permet pas qu'ils y ajoutent, de peur qu'ils ne passent les limites qu'elle leur a prescrites. Il n'en est pas de même de l'homme, qui n'est produit que pour l'infinité. Il est dans l'ignorance au premier âge de sa vie; mais il s'instruit sans cesse dans son progrès : car il tire avantage non-seulement de sa propre expérience, mais encore de celle de ses prédécesseurs; parce qu'il garde toujours dans sa mémoire les connoissances qu'il s'est une fois acquises, et que celles des anciens lui sont toujours présentes dans les livres qu'ils en ont laissés. Et comme il conserve ces connoissances, il peut aussi les augmenter facilement; de sorte que les hommes sont aujourd'hui en quelque sorte dans le même état où se trouveroient ces anciens philosophes, s'ils pouvoient avoir vieilli jusques à présent, en ajoutant aux connoissances qu'ils avoient celles que leurs études auroient pu leur acquérir à la faveur de tant de siècles. De là vient que, par une prérogative particulière, non-seulement chacun des hommes s'avance de jour en jour dans les sciences, mais que tous les hommes ensemble y font un continuel progrès à mesure que l'univers vieillit, parce que la même chose arrive dans la succession des hommes que dans les âges différens d'un particulier. De sorte que toute la suite des hommes, pendant le cours de tant de siècles, doit être considérée comme un même homme qui subsiste toujours et qui apprend continuellement : d'où l'on voit avec combien d'injustice nous respectons l'antiquité dans ses philosophes; car, comme la vieillesse est l'âge le plus distant de l'enfance, qui ne voit que la vieillesse dans cet homme universel ne doit pas être cherchée dans les temps proches de sa naissance, mais dans ceux qui en sont les plus éloignés? Ceux que nous appelons anciens étoient véritablement nouveaux en toutes choses, et formoient l'enfance des hommes proprement; et comme nous avons joint à leurs connoissances l'expérience des siècles qui les ont suivis, c'est en nous que l'on peut trouver cette antiquité que nous révérons dans les autres.

Ils doivent être admirés dans les conséquences qu'ils ont bien tirées du peu de principes qu'ils avoient, et ils doivent être excusés dans celles où ils ont plutôt manqué du bonheur de l'expérience que de la force du raisonnement.

Car n'étoient-ils pas excusables dans la pensée qu'ils ont eue pour la voie de lait, quand, la foiblesse de leurs yeux n'ayant pas encore reçu le secours de l'artifice, ils ont attribué cette couleur à une plus grande solidité en cette partie du ciel, qui renvoie la lumière avec plus de force? Mais ne serions-nous pas inexcusables de demeurer dans la même pensée, maintenant qu'aidés des avantages que nous donne la lunette

d'approche, nous y avons découvert une infinité de petites étoiles, dont la splendeur plus abondante nous a fait reconnoître quelle est la véritable cause de cette blancheur?

N'avoient-ils pas aussi sujet de dire que tous les corps corruptibles étoient renfermés dans la sphère du ciel de la lune, lorsque durant le cours de tant de siècles ils n'avoient point encore remarqué de corruptions ni de générations hors de cet espace? Mais ne devons-nous pas assurer le contraire, lorsque toute la terre a vu sensiblement des comètes s'enflammer et disparoître bien loin au delà de cette sphère?

C'est ainsi que, sur le sujet du vide, ils avoient droit de dire que la nature n'en souffroit point, parce que toutes leurs expériences leur avoient toujours fait remarquer qu'elle l'abhorroit et ne le pouvoit souffrir. Mais si les nouvelles expériences leur avoient été connues, peut-être auroient-ils trouvé sujet d'affirmer ce qu'ils ont eu sujet de nier par là que le vide n'avoit point encore paru. Aussi dans le jugement qu'ils ont fait que la nature ne souffroit point de vide, ils n'ont entendu parler de la nature qu'en l'état où ils la connoissoient; puisque, pour le dire généralement, ce ne seroit assez de l'avoir vu constamment en cent rencontres, ni en mille, ni en tout autre nombre, quelque grand qu'il soit; puisque, s'il restoit un seul cas à examiner, ce seul suffiroit pour empêcher la définition générale, et si un seul étoit contraire, ce seul.... Car dans toutes les matières dont la preuve consiste en expériences et non en démonstrations, on ne peut faire aucune assertion universelle que par la générale énumération de toutes les parties et de tous les cas différens. C'est ainsi que quand nous disons que le diamant est le plus dur de tous les corps, nous entendons de tous les corps que nous connoissons, et nous ne pouvons ni ne devons y comprendre ceux que nous ne connoissons point; et quand nous disons que l'or est le plus pesant de tous les corps, nous serions téméraires de comprendre dans cette proposition générale ceux qui ne sont point encore en notre connoissance, quoiqu'il ne soit pas impossible qu'ils soient en nature. De même quand les anciens ont assuré que la nature ne souffroit point de vide, ils ont entendu qu'elle n'en souffroit point dans toutes les expériences qu'ils avoient vues, et ils n'auroient pu sans témérité y comprendre celles qui n'étoient pas en leur connoissance. Que si elles y eussent été, sans doute ils auroient tiré les mêmes conséquences que nous, et les auroient par leur aveu autorisées de cette antiquité dont on veut faire aujourd'hui l'unique principe des sciences.

C'est ainsi que, sans les contredire, nous pouvons assurer le contraire de ce qu'ils disoient: et, quelque force enfin qu'ait cette antiquité, la vérité doit toujours avoir l'avantage, quoique nouvellement découverte, puisqu'elle est toujours plus ancienne que toutes les opinions qu'on en a eues, et que ce seroit ignorer sa nature de s'imaginer qu'elle ait commencé d'être au temps qu'elle a commencé d'être connue

---

MATHÉMATIQUES.

DE L'ESPRIT GÉOMÉTRIQUE[1]

I.

On peut avoir trois principaux objets dans l'étude de la vérité : l'un, de la découvrir quand on la cherche; l'autre, de la démontrer quand on la possède; le dernier, de la discerner d'avec le faux quand on l'examine.

Je ne parle point du premier; je traite particulièrement du second, et il enferme le troisième. Car, si l'on sait la méthode de prouver la vérité, on aura en même temps celle de la discerner, puisqu'en examinant si la preuve qu'on en donne est conforme aux règles qu'on connoît, on saura si elle est exactement démontrée.

La géométrie, qui excelle en ces trois genres, a expliqué l'art de découvrir les vérités inconnues; et c'est ce qu'elle appelle analyse, et dont il seroit inutile de discourir après tant d'excellens ouvrages qui ont été faits.

Celui de démontrer les vérités déjà trouvées, et de les éclaircir de telle sorte que la preuve en soit invincible, est le seul que je veux donner; et je n'ai pour cela qu'à expliquer la méthode que la géométrie y observe; car elle l'enseigne parfaitement par ses exemples, quoiqu'elle n'en produise aucun discours. Et parce que cet art consiste en deux choses principales, l'une de prouver chaque proposition en particulier, l'autre de disposer toutes les propositions dans le meilleur ordre, j'en ferai deux sections, dont l'une contiendra les règles de la conduite des démonstrations géométriques, c'est-à-dire méthodiques et parfaites, et la seconde comprendra celles de l'ordre géométrique, c'est-à-dire méthodique et acccompli : de sorte que les deux ensemble enfermeront tout ce qui sera nécessaire pour la conduite du raisonnement à prouver et discerner les vérités; lesquelles j'ai dessein de donner entières.

SECT. I. — *De la méthode des démonstrations géométriques, c'est-à-dire méthodiques et parfaites.*

Je ne puis faire mieux entendre la conduite qu'on doit garder pour rendre les démonstrations convaincantes, qu'en expliquant celle que la géométrie observe.

Mon objet est bien plus de réussir à l'une qu'à l'autre, et je n'ai choisi cette science pour y arriver que parce qu'elle seule sait les véri-

1. Les deux fragmens qui suivent sont intitulés dans l'édition de Bossut : *Réflexions sur la géométrie en général*, et *De l'art de persuader*.

tables règles du raisonnement, et, sans s'arrêter aux règles des syllogismes qui sont tellement naturelles qu'on ne peut les ignorer, s'arrête et se fonde sur la véritable méthode de conduire le raisonnement en toutes choses, que presque tout le monde ignore, et qu'il est si avantageux de savoir, que nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle.

Je veux donc faire entendre ce que c'est que démonstration par l'exemple de celles de géométrie, qui est presque la seule des sciences humaines qui en produise d'infaillibles, parce qu'elle seule observe la véritable méthode, au lieu que toutes les autres sont par une nécessité naturelle dans quelque sorte de confusion que les seuls géomètres savent extrêmement connoître.

Mais il faut auparavant que je donne l'idée d'une méthode encore plus éminente et plus accomplie, mais où les hommes ne sauroient jamais arriver : car ce qui passe la géométrie nous surpasse; et néanmoins il est nécessaire d'en dire quelque chose, quoiqu'il soit impossible de le pratiquer.

Cette véritable méthode, qui formeroit les démonstrations dans la plus haute excellence, s'il étoit possible d'y arriver, consisteroit en deux choses principales : l'une, de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliqué nettement le sens; l'autre, de n'avancer jamais aucune proposition qu'on ne démontrât par des vérités déjà connues; c'est-à-dire, en un mot, à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions. Mais, pour suivre l'ordre même que j'explique, il faut que je déclare ce que j'entends par définition.

On ne reconnoît en géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom, c'est-à-dire que les seules impositions de nom aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus; et je ne parle que de celles-là seulement. Leur utilité et leur usage est d'éclaircir et d'abréger le discours, en exprimant par le seul nom qu'on impose ce qui ne pourroit se dire qu'en plusieurs termes; en sorte néanmoins que le nom imposé demeure dénué de tout autre sens, s'il en a, pour n'avoir plus que celui auquel on le destine uniquement. En voici un exemple. Si l'on a besoin de distinguer dans les nombres ceux qui sont divisibles en deux également d'avec ceux qui ne le sont pas, pour éviter de répéter souvent cette condition, on lui donne un nom en cette sorte : j'appelle tout nombre divisible en deux également nombre pair. Voilà une définition géométrique : parce qu'après avoir clairement désigné une chose, savoir tout nombre divisible en deux également, on lui donne un nom que l'on destitue de tout autre sens, s'il en a, pour lui donner celui de la chose désignée. D'où il paroît que les définitions sont très-libres, et qu'elles ne sont jamais sujettes à être contredites; car il n'y a rien de plus permis que de donner à une chose qu'on a clairement désignée un nom tel qu'on voudra. Il faut seulement prendre garde qu'on n'abuse de la liberté qu'on a d'imposer des noms, en donnant le même à deux choses différentes.

Ce n'est pas que cela ne soit permis, pourvu qu'on n'en confonde pas les conséquences, et qu'on ne les étende pas de l'une à l'autre.

Mais si l'on tombe dans ce vice, on peut lui opposer un remède très-sûr et très-infaillible : c'est de substituer mentalement la définition à la place du défini, et d'avoir toujours la définition si présente que toutes les fois qu'on parle, par exemple, de nombre pair, on entende précisément que c'est celui qui est divisible en deux parties égales, et que ces deux choses soient tellement jointes et inséparables dans la pensée, qu'aussitôt que le discours en exprime l'une, l'esprit y attache immédiatement l'autre. Car les géomètres et tous ceux qui agissent méthodiquement, n'imposent des noms aux choses que pour abréger le discours, et non pour diminuer ou changer l'idée des choses dont ils discourent. Et ils prétendent que l'esprit supplée toujours la définition entière aux termes courts, qu'ils n'emploient que pour éviter la confusion que la multitude des paroles apporte. Rien n'éloigne plus promptement et plus puissamment les surprises captieuses des sophistes que cette méthode, qu'il faut avoir toujours présente, et qui suffit seule pour bannir toutes sortes de difficultés et d'équivoques.

Ces choses étant bien entendues, je reviens à l'explication du véritable ordre, qui consiste, comme je disois, à tout définir et à tout prouver. Certainement cette méthode seroit belle, mais elle est absolument impossible : car il est évident que les premiers termes qu'on voudroit définir en supposeroient de précédens pour servir à leur explication, et que de même les premières propositions qu'on voudroit prouver en supposeroient d'autres qui les précédassent; et ainsi il est clair qu'on n'arriveroit jamais aux premières. Aussi, en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve. D'où il paroît que les hommes sont dans une impuissance naturelle et immuable de traiter quelque science que ce soit dans un ordre absolument accompli.

Mais il ne s'ensuit pas de là qu'on doive abandonner toute sorte d'ordre. Car il y en a un, et c'est celui de la géométrie, qui est à la vérité inférieur en ce qu'il est moins convaincant, mais non pas en ce qu'il est moins certain. Il ne définit pas tout et ne prouve pas tout, et c'est en cela qu'il lui cède; mais il ne suppose que des choses claires et constantes par la lumière naturelle, et c'est pourquoi il est parfaitement véritable, la nature le soutenant au défaut du discours. Cet ordre, le plus parfait entre les hommes, consiste non pas à tout définir ou à tout démontrer, ni aussi à ne rien définir ou à ne rien démontrer, mais à se tenir dans ce milieu de ne point définir les choses claires et entendues de tous les hommes, et de définir toutes les autres; et de ne point prouver toutes les choses connues des hommes, et de prouver toutes les autres. Contre cet ordre pèchent également ceux qui entreprennent de tout définir et de tout prouver, et ceux qui négligent de le faire dans les choses qui ne sont pas évidentes d'elles-mêmes.

C'est ce que la géométrie enseigne parfaitement. Elle ne définit aucune

de ces choses, espace, temps, mouvement, nombre, égalité, ni les semblables qui sont en grand nombre, parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudroit faire apporteroit plus d'obscurité que d'instruction. Car il n'y a rien de plus faible que le discours de ceux qui veulent définir ces mots primitifs. Quelle nécessité y a-t-il, par exemple, d'expliquer ce qu'on entend par le mot homme? Ne sait-on pas assez quelle est la chose qu'on veut désigner par ce terme? Et quel avantage pensoit nous procurer Platon, en disant que c'étoit un animal à deux jambes sans plumes? Comme si l'idée que j'en ai naturellement, et que je ne puis exprimer, n'étoit pas plus nette et plus sûre que celle qu'il me donne par son explication inutile et même ridicule; puisqu'un homme ne perd pas l'humanité en perdant les deux jambes, et qu'un chapon ne l'acquiert pas en perdant ses plumes.

Il y en a qui vont jusqu'à cette absurdité d'expliquer un mot par le mot même. J'en sais qui ont défini la lumière en cette sorte : La lumière est un mouvement luminaire des corps lumineux; comme si on pouvoit entendre les mots de luminaire et de lumineux sans celui de lumière.

On ne peut entreprendre de définir l'être sans tomber dans cette absurdité : car on ne peut définir un mot sans commencer par celui-ci, *c'est*, soit qu'on l'exprime ou qu'on le sous-entende. Donc pour définir l'être, il faudroit dire *c'est*, et ainsi employer le mot défini dans sa définition.

On voit assez de là qu'il y a des mots incapables d'être définis; et si la nature n'avoit suppléé à ce défaut par une idée pareille qu'elle a donnée à tous les hommes, toutes nos expressions seroient confuses; au lieu qu'on en use avec la même assurance et la même certitude que s'ils étoient expliqués d'une manière parfaitement exempte d'équivoques; parce que la nature nous en a elle-même donné, sans paroles, une intelligence plus nette que celle que l'art nous acquiert par nos explications.

Ce n'est pas que tous les hommes aient la même idée de l'essence des choses que je dis qu'il est impossible et inutile de définir. Car, par exemple, le temps est de cette sorte. Qui le pourra définir? Et pourquoi l'entreprendre, puisque tous les hommes conçoivent ce qu'on veut dire en parlant de temps, sans qu'on le désigne davantage? Cependant il y a bien de différentes opinions touchant l'essence du temps. Les uns disent que c'est le mouvement d'une chose créée; les autres, la mesure du mouvement, etc. Aussi ce n'est pas la nature de ces choses que je dis qui est connue de tous : ce n'est simplement que le rapport entre le nom et la chose; en sorte qu'à cette expression, temps, tous portent la pensée vers le même objet : ce qui suffit pour faire que ce terme n'ait pas besoin d'être défini, quoique ensuite, en examinant ce que c'est que le temps, on vienne à différer de sentiment après s'être mis à y penser; car les définitions ne sont faites que pour désigner les choses que l'on nomme, et non pas pour en montrer la nature. Ce n'est pas qu'il ne soit permis d'appeler du nom de temps le mouvement d'une chose créée; car, comme j'ai dit tantôt, rien n'est plus libre que

les définitions. Mais ensuite de cette définition il y aura deux choses qu'on appellera du nom de temps : l'une est celle que tout le monde entend naturellement par ce mot, et que tous ceux qui parlent notre langue nomment par ce terme; l'autre sera le mouvement d'une chose créée, car on l'appellera aussi de ce nom suivant cette nouvelle définition. Il faudra donc éviter les équivoques, et ne pas confondre les conséquences. Car il ne s'ensuivra pas de là que la chose qu'on entend naturellement par le mot de temps soit en effet le mouvement d'une chose créée. Il a été libre de nommer ces deux choses de même; nais il ne le sera pas de les faire convenir de nature aussi bien que de nom. Ainsi, si l'on avance ce discours : Le temps est le mouvement d'une chose créée; il faut demander ce qu'on entend par ce mot de temps, c'est-à-dire si on lui laisse le sens ordinaire et reçu de tous, ou si on l'en dépouille pour lui donner en cette occasion celui de mouvement d'une chose créée. Que si on le destitue de tout autre sens, on ne peut contredire, et ce sera une définition libre, ensuite de laquelle, comme j'ai dit, il y aura deux choses qui auront ce même nom. Mais si on lui laisse son sens ordinaire, et qu'on prétende néanmoins que ce qu'on entend par ce mot soit le mouvement d'une chose créée, on peut contredire. Ce n'est plus une définition libre, c'est une proposition qu'il faut prouver, si ce n'est qu'elle soit très-évidente d'elle-même; et alors ce sera un principe et un axiome, mais jamais une définition, parce que dans cette énonciation on n'entend pas que le mot de temps signifie la même chose que ceux-ci, le mouvement d'une chose créée; mais on entend que ce que l'on conçoit par le terme de temps soit ce mouvement supposé.

Si je ne savois combien il est nécessaire d'entendre ceci parfaitement, et combien il arrive à toute heure, dans les discours familiers et dans les discours de science, des occasions pareilles à celle-ci que j'ai donnée en exemple, je ne m'y serois pas arrêté. Mais il me semble, par l'expérience que j'ai de la confusion des disputes, qu'on ne peut trop entrer dans cet esprit de netteté, pour lequel je fais tout ce traité, plus que pour le sujet que j'y traite.

Car combien y a-t-il de personnes qui croient avoir défini le temps quand ils ont dit que c'est la mesure du mouvement, en lui laissant cependant son sens ordinaire! Et néanmoins ils ont fait une proposition, et non pas une définition. Combien y en a-t-il de même qui croient avoir défini le mouvement quand ils ont dit : *Motus nec simpliciter actus, nec mera potentia est, sed actus entis in potentia!* Et cependant, s'ils laissent au mot de mouvement son sens ordinaire comme ils font, ce n'est pas une définition, mais une proposition; et confondant ainsi les définitions qu'ils appellent définitions de nom, qui sont les véritables définitions libres, permises et géométriques, avec celles qu'ils appellent définitions de chose, qui sont proprement des propositions nullement libres, mais sujettes à contradiction, ils s'y donnent la liberté d'en former aussi bien que des autres : et chacun définissant les mêmes choses à sa manière, par une liberté qui est aussi défendue dans ces sortes de définitions que permise dans les premières, ils em-

brouillent toutes choses et, perdant tout ordre et toute lumière, ils se perdent eux-mêmes et s'égarent dans des embarras inexplicables.

On n'y tombera jamais en suivant l'ordre de la géométrie. Cette judicieuse science est bien éloignée de définir ces mots primitifs, espace, temps, mouvement, égalité, majorité, diminution, tout, et les autres que le monde entend de soi-même. Mais hors ceux-là, le reste des termes qu'elle emploie y sont tellement éclaircis et définis, qu'on n'a pas besoin de dictionnaire pour en entendre aucun; de sorte qu'en un mot tous ces termes sont parfaitement intelligibles, ou par la lumière naturelle ou par les définitions qu'elle en donne.

Voilà de quelle sorte elle évite tous les vices qui se peuvent rencontrer dans le premier point, lequel consiste à définir les seules choses qui en ont besoin. Elle en use de même à l'égard de l'autre point, qui consiste à prouver les propositions qui ne sont pas évidentes. Car, quand elle est arrivée aux premières vérités connues, elle s'arrête là et demande qu'on les accorde, n'ayant rien de plus clair pour les prouver : de sorte que tout ce que la géométrie propose est parfaitement démontré, ou par la lumière naturelle, ou par les preuves. De là vient que si cette science ne définit pas et ne démontre pas toutes choses, c'est par cette seule raison que cela nous est impossible. Mais comme la nature fournit ce que cette science ne donne pas, son ordre à la vérité ne donne pas une perfection plus qu'humaine, mais il a toute celle où les hommes peuvent arriver. Il m'a semblé à propos de donner dès l'entrée de ce discours cette....

On trouvera peut-être étrange que la géométrie ne puisse définir aucune des choses qu'elle a pour principaux objets : car elle ne peut définir ni le mouvement, ni les nombres, ni l'espace; et cependant ces trois choses sont celles qu'elle considère particulièrement et selon la recherche desquelles elle prend ces trois différens noms de mécanique, d'arithmétique, de géométrie, ce dernier mot appartenant au genre et à l'espèce. Mais on n'en sera pas surpris, si l'on remarque que cette admirable science ne s'attachant qu'aux choses les plus simples, cette même qualité qui les rend dignes d'être ses objets les rend incapables d'être définies; de sorte que le manque de définition est plutôt une perfection qu'un défaut, parce qu'il ne vient pas de leur obscurité, mais au contraire de leur extrême évidence, qui est telle qu'encore qu'elle n'ait pas la conviction des démonstrations, elle en a toute la certitude. Elle suppose donc que l'on sait quelle est la chose qu'on entend par ces mots, mouvement, nombre, espace; et, sans s'arrêter à les définir inutilement, elle en pénètre la nature, et en découvre les merveilleuses propriétés.

Ces trois choses, qui comprennent tout l'univers, selon ces paroles, *Deus fecit omnia in pondere, in numero, et mensura*, ont une liaison réciproque et nécessaire. Car on ne peut imaginer de mouvement sans quelque chose qui se meuve; et cette chose étant une, cette unité est l'origine de tous les nombres; et enfin le mouvement ne pouvant être sans espace, on voit ces trois choses enfermées dans la première. Le temps même y est aussi compris : car le mouvement et le temps sont

relatifs l'un à l'autre; la promptitude et la lenteur, qui sont les différences des mouvemens, ayant un rapport nécessaire avec le temps. Ainsi il y a des propriétés communes à toutes choses, dont la connoissance ouvre l'esprit aux plus grandes merveilles de la nature.

La principale comprend les deux infinités qui se rencontrent dans toutes : l'une de grandeur, l'autre de petitesse.

Car quelque prompt que soit un mouvement, on peut en concevoir un qui le soit davantage, et hâter encore ce dernier; et ainsi toujours à l'infini, sans jamais arriver à un qui le soit de telle sorte qu'on ne puisse plus y ajouter. Et au contraire, quelque lent que soit un mouvement, on peut le retarder davantage, et encore ce dernier; et ainsi à l'infini, sans jamais arriver à un tel degré de lenteur qu'on ne puisse encore en descendre à une infinité d'autres, sans tomber dans le repos. De même, quelque grand que soit un nombre, on peut en concevoir un plus grand, et encore un qui surpasse le dernier, et ainsi à l'infini, sans jamais arriver à un qui ne puisse plus être augmenté. Et au contraire, quelque petit que soit un nombre, comme la centième ou la dix-millième partie, on peut encore en concevoir un moindre, et toujours à l'infini, sans arriver au zéro ou néant. Quelque grand que soit un espace, on peut en concevoir un plus grand, et encore un qui le soit davantage; et ainsi à l'infini, sans jamais arriver à un qui ne puisse plus être augmenté. Et au contraire, quelque petit que soit un espace, on peut encore en considérer un moindre, et toujours à l'infini, sans jamais arriver à un indivisible qui n'ait plus aucune étendue. Il en est de même du temps. On peut toujours en concevoir un plus grand sans dernier, et un moindre, sans arriver à un instant, et à un pur néant de durée. C'est-à-dire, en un mot, que quelque mouvement, quelque nombre, quelque espace, quelque temps que ce soit, il y en a toujours un plus grand et un moindre : de sorte qu'ils se soutiennent tous entre le néant et l'infini, étant toujours infiniment éloignés de ces extrêmes.

Toutes ces vérités ne se peuvent démontrer, et cependant ce sont les fondemens et les principes de la géométrie. Mais comme la cause qui les rend incapables de démonstration n'est pas leur obscurité, mais au contraire leur extrême évidence, ce manque de preuve n'est pas un défaut, mais plutôt une perfection. D'où l'on voit que la géométrie ne peut définir les objets ni prouver les principes; mais par cette seule et avantageuse raison, que les uns et les autres sont dans une extrême clarté naturelle, qui convainc la raison plus puissamment que le discours. Car qu'y a-t-il de plus évident que cette vérité, qu'un nombre, tel qu'il soit, peut être augmenté : ne peut-on pas le doubler? Que la promptitude d'un mouvement peut être doublée, et qu'un espace peut être doublé de même? Et qui peut aussi douter qu'un nombre, tel qu'il soit, ne puisse être divisé par la moitié, et sa moitié encore par la moitié? Car cette moitié seroit-elle un néant? Et comment ces deux moitiés, qui seroient deux zéros, feroient-elles un nombre? De même un mouvement, quelque lent qu'il soit, ne peut-il pas être ralenti de moitié, en sorte qu'il parcoure le même espace dans le double du temps, et ce dernier mouvement encore? Car seroit-ce un pur repos? Et comment se pour-

roit-il que ces deux moitiés de vitesse, qui seroient deux repos, fissent la première vitesse? Enfin un espace, quelque petit qu'il soit, ne peut-il pas être divisé en deux, et ces moitiés encore? Et comment pourroit-il se faire que ces moitiés fussent indivisibles sans aucune étendue, elles qui jointes ensemble ont fait la première étendue?

Il n'y a point de connoissance naturelle dans l'homme qui précède celles-là, et qui les surpasse en clarté. Néanmoins, afin qu'il y ait exemple de tout, on trouve des esprits excellens en toutes autres choses, que ces infinités choquent, et qui n'y peuvent en aucune sorte consentir.

Je n'ai jamais connu personne qui ait pensé qu'un espace ne puisse être augmenté. Mais j'en ai vu quelques-uns, très-habiles d'ailleurs, qui ont assuré qu'un espace pouvoit être divisé en deux parties indivisibles, quelque absurdité qu'il s'y rencontre. Je me suis attaché à rechercher en eux quelle pouvoit être la cause de cette obscurité, et j'ai trouvé qu'il n'y en avoit qu'une principale, qui est qu'ils ne sauroient concevoir un continu divisible à l'infini : d'où ils concluent qu'il n'y est pas divisible. C'est une maladie naturelle à l'homme de croire qu'il possède la vérité directement; et de là vient qu'il est toujours disposé à nier tout ce qui lui est incompréhensible; au lieu qu'en effet il ne connoît naturellement que le mensonge, et qu'il ne doit prendre pour véritables que les choses dont le contraire lui paroît faux. Et c'est pourquoi, toutes les fois qu'une proposition est inconcevable, il faut en suspendre le jugement et ne pas la nier à cette marque, mais en examiner le contraire; et si on le trouve manifestement faux, on peut hardiment affirmer la première, tout incompréhensible qu'elle est. Appliquons cette règle à notre sujet.

Il n'y a point de géomètre qui ne croie l'espace divisible à l'infini. On ne peut non plus l'être sans ce principe qu'être homme sans âme. Et néanmoins il n'y en a point qui comprenne une division infinie; et l'on ne s'assure de cette vérité que par cette seule raison, mais qui est certainement suffisante, qu'on comprend parfaitement qu'il est faux qu'en divisant un espace on puisse arriver à une partie indivisible, c'est-à-dire qui n'ait aucune étendue. Car qu'y a-t-il de plus absurde que de prétendre qu'en divisant toujours un espace, on arrive enfin à une division telle qu'en la divisant en deux, chacune des moitiés reste indivisible et sans aucune étendue, et qu'ainsi ces deux néans d'étendue fissent ensemble une étendue? Car je voudrois demander à ceux qui ont cette idée, s'ils conçoivent nettement que deux indivisibles se touchent : si c'est partout, ils ne sont qu'une même chose, et partant les deux ensemble sont indivisibles; et si ce n'est pas partout, ce n'est donc qu'en une partie : donc ils ont des parties, donc ils ne sont pas indivisibles. Que s'ils confessent, comme en effet ils l'avouent quand on les presse, que leur proposition est aussi inconcevable que l'autre, qu'ils reconnoissent que ce n'est pas par notre capacité à concevoir ces choses que nous devons juger de leur vérité, puisque ces deux contraires étant tous deux inconcevables, il est néanmoins nécessairement certain que l'un des deux est véritable.

Mais qu'à ces difficultés chimériques, et qui n'ont de proportion qu'à notre foiblesse, ils opposent ces clartés naturelles et ces vérités solides : s'il étoit véritable que l'espace fût composé d'un certain nombre fini d'indivisibles, il s'ensuivroit que deux espaces, dont chacun seroit carré, c'est-à-dire égal et pareil de tous côtés, étant doubles l'un de l'autre, l'un contiendroit un nombre de ces indivisibles double du nombre des indivisibles de l'autre. Qu'ils retiennent bien cette conséquence, et qu'ils s'exercent ensuite à ranger des points en carrés jusqu'à ce qu'ils en aient rencontré deux dont l'un ait le double des points de l'autre, et alors je leur ferai céder tout ce qu'il y a de géomètres au monde. Mais si la chose est naturellement impossible, c'est-à-dire s'il y a impossibilité invincible à ranger des carrés de points, dont l'un en ait le double de l'autre, comme je le démontrerois en ce lieu-là même si la chose méritoit qu'on s'y arrêtât, qu'ils en tirent la conséquence.

Et pour les soulager dans les peines qu'ils auroient en de certaines rencontres, comme à concevoir qu'un espace ait une infinité de divisibles, vu qu'on les parcourt en si peu de temps, pendant lequel on auroit parcouru cette infinité de divisibles, il faut les avertir qu'ils ne doivent pas comparer des choses aussi disproportionnées qu'est l'infinité des divisibles avec le peu de temps où ils sont parcourus : mais qu'ils comparent l'espace entier avec le temps entier, et les infinis divisibles de l'espace avec les infinis instans de ce temps; et ainsi ils trouveront que l'on parcourt une infinité de divisibles en une infinité d'instans, et un petit espace en un petit temps; en quoi il n'y a plus la disproportion qui les avoit étonnés.

Enfin, s'ils trouvent étrange qu'un petit espace ait autant de parties qu'un grand, qu'ils entendent aussi qu'elles sont plus petites à mesure, et qu'ils regardent le firmament au travers d'un petit verre, pour se familiariser avec cette connoissance, en voyant chaque partie du ciel en chaque partie du verre. Mais s'ils ne peuvent comprendre que des parties si petites, qu'elles nous sont imperceptibles, puissent être autant divisées que le firmament, il n'y a pas de meilleur remède que de les leur faire regarder avec des lunettes qui grossissent cette pointe délicate jusqu'à une prodigieuse masse : d'où ils concevront aisément que, par le secours d'un autre verre encore plus artistement taillé, on pourroit les grossir jusqu'à égaler ce firmament dont ils admirent l'étendue. Et ainsi ces objets leur paroissant maintenant très-facilement divisibles, qu'ils se souviennent que la nature peut infiniment plus que l'art. Car enfin qui les a assurés que ces verres auront changé la grandeur naturelle de ces objets, ou s'ils auront au contraire rétabli la véritable, que la figure de notre œil avoit changée et raccourcie, comme font les lunettes qui amoindrissent?

Il est fâcheux de s'arrêter à ces bagatelles; mais il y a des temps de niaiser.

Il suffit de dire à des esprits clairs en cette matière que deux néans d'étendue ne peuvent pas faire une étendue. Mais parce qu'il y en a qui prétendent s'échapper à cette lumière par cette merveilleuse réponse, que deux néans d'étendue peuvent aussi bien faire une étendue que

deux unités dont aucune n'est nombre font un nombre par leur assemblage; il faut leur repartir qu'ils pourroient opposer, de la même sorte, que vingt mille hommes font une armée, quoique aucun d'eux ne soit armée; que mille maisons font une ville, quoique aucune ne soit ville; ou que les parties font le tout, quoique aucune ne soit le tout, ou, pour demeurer dans la comparaison des nombres, que deux binaires font le quaternaire, et dix dizaines une centaine, quoique aucun ne le soit. Mais ce n'est pas avoir l'esprit juste que de confondre par des comparaisons si inégales la nature immuable des choses avec leurs noms libres et volontaires, et dépendant du caprice des hommes qui les ont composés. Car il est clair que pour faciliter les discours on a donné le nom d'armée à vingt mille hommes, celui de ville à plusieurs maisons, celui de dizaine à dix unités; et que de cette liberté naissent les noms d'unité, binaire, quaternaire, dizaine, centaine, différens par nos fantaisies, quoique ces choses soient en effet de même genre par leur nature invariable, et qu'elles soient toutes proportionnées entre elles et ne diffèrent que du plus ou du moins, et quoique, ensuite de ces noms, le binaire ne soit pas quaternaire, ni une maison une ville, non plus qu'une ville n'est pas une maison. Mais encore, quoique une maison ne soit pas une ville, elle n'est pas néanmoins un néant de ville; il y a bien de la différence entre n'être pas une chose et en être un néant.

Car, afin qu'on entende la chose à fond, il faut savoir que la seule raison pour laquelle l'unité n'est pas au rang des nombres est qu'Euclide et les premiers auteurs qui ont traité d'arithmétique, ayant plusieurs propriétés à donner qui convenoient à tous les nombres hormis à l'unité, pour éviter de dire souvent qu'en tout nombre, hors l'unité, telle condition se rencontre, ils ont exclu l'unité de la signification du mot nombre, par la liberté que nous avons déjà dit qu'on a de faire à son gré des définitions. Aussi, s'ils eussent voulu, ils en eussent de même exclu le binaire et le ternaire, et tout ce qu'il leur eût plu; car on en est maître, pourvu qu'on en avertisse : comme au contraire l'unité se met quand on veut au rang des nombres, et les fractions de même. Et, en effet, l'on est obligé de le faire dans les propositions générales, pour éviter de dire à chaque fois : En tout nombre, et à l'unité et aux fractions, une telle propriété se trouve; et c'est en ce sens indéfini que je l'ai pris dans tout ce que j'en ai écrit. Mais le même Euclide qui a ôté à l'unité le nom de nombre, ce qui lui a été permis, pour faire entendre néanmoins qu'elle n'est pas un néant, mais qu'elle est au contraire du même genre, il définit ainsi les grandeurs homogènes : Les grandeurs, dit-il, sont dites être de même genre, lorsque l'une étant plusieurs fois multipliée peut arriver à surpasser l'autre. Et par conséquent, puisque l'unité peut, étant multipliée plusieurs fois, surpasser quelque nombre que ce soit, elle est de même genre que les nombres précisément par son essence et par sa nature immuable, dans le sens du même Euclide qui a voulu qu'elle ne fût pas appelée nombre.

Il n'en est pas de même d'un indivisible à l'égard d'une étendue; car non-seulement il diffère de nom, ce qui est volontaire, mais il diffère de genre, par la même définition; puisqu'un indivisible multiplié au-

tant de fois qu'on voudra, est si éloigné de pouvoir surpasser une étendue, qu'il ne peut jamais former qu'un seul et unique indivisible; ce qui est naturel et nécessaire, comme il est déjà montré. Et comme cette dernière preuve est fondée sur la définition de ces deux choses, indivisible et étendue, on va achever et consommer la démonstration.

Un indivisible est ce qui n'a aucune partie, et l'étendue est ce qui a diverses parties séparées.

Sur ces définitions, je dis que deux indivisibles étant unis ne font pas une étendue. Car, quand ils sont unis, ils se touchent chacun en une partie; et ainsi les parties par où ils se touchent ne sont pas séparées, puisque autrement elles ne se toucheroient pas. Or, par leur définition, ils n'ont point d'autres parties : donc ils n'ont pas de parties séparées; donc ils ne sont pas une étendue, par la définition de l'étendue qui porte la séparation des parties. On montrera la même chose de tous les autres indivisibles qu'on y joindra, par la même raison. Et partant un indivisible, multiplié autant qu'on voudra, ne fera jamais une étendue. Donc il n'est pas de même genre que l'étendue, par la définition des choses du même genre.

Voilà comment on démontre que les indivisibles ne sont pas de même genre que les nombres. De là vient que deux unités peuvent bien faire un nombre, parce qu'elles sont de même genre; et que deux indivisibles ne font pas une étendue, parce qu'ils ne sont pas du même genre. D'où l'on voit combien il y a peu de raison de comparer le rapport qui est entre l'unité et les nombres à celui qui est entre les indivisibles et l'étendue.

Mais si l'on veut prendre dans les nombres une comparaison qui représente avec justesse ce que nous considérons dans l'étendue, il faut que ce soit le rapport du zéro aux nombres; car le zéro n'est pas du même genre que les nombres, parce qu'étant multiplié, il ne peut les surpasser : de sorte que c'est un véritable indivisible de nombre, comme l'indivisible est un véritable zéro d'étendue. Et on en trouvera un pareil entre le repos et le mouvement, et entre un instant et le temps; car toutes ces choses sont hétérogènes à leurs grandeurs, parce qu'étant infiniment multipliées, elles ne peuvent jamais faire que des indivisibles, non plus que les indivisibles d'étendue, et par la même raison. Et alors on trouvera une correspondance parfaite entre ces choses; car toutes ces grandeurs sont divisibles à l'infini, sans tomber dans leurs indivisibles, de sorte qu'elles tiennent toutes le milieu entre l'infini et le néant.

Voilà l'admirable rapport que la nature a mis entre ces choses, et les deux merveilleuses infinités qu'elle a proposées aux hommes, non pas à concevoir, mais à admirer; et pour en finir la considération par une dernière remarque, j'ajouterai que ces deux infinis, quoique infiniment différens, sont néanmoins relatifs l'un à l'autre, de telle sorte que la connoissance de l'un mène nécessairement à la connoissance de l'autre. Car dans les nombres, de ce qu'ils peuvent toujours être augmentés, il s'ensuit absolument qu'ils peuvent toujours être diminués, et cela clairement : car si l'on peut multiplier un nombre jusqu'à 100 000, par exemple,

on peut aussi en prendre une cent millième partie, en le divisant par le même nombre qu'on le multiplie, et ainsi tout terme d'augmentation deviendra terme de division, en changeant l'entier en fraction. De sorte que l'augmentation infinie enferme nécessairement aussi la division infinie. Et dans l'espace le même rapport se voit entre ces deux infinis contraires; c'est-à-dire que, de ce qu'un espace peut être infiniment prolongé, il s'ensuit qu'il peut être infiniment diminué, comme il paroît en cet exemple : Si on regarde au travers d'un verre un vaisseau qui s'éloigne toujours directement, il est clair que le lieu du diaphane où l'on remarque un point tel qu'on voudra du navire haussera toujours par un flux continuel, à mesure que le vaisseau fuit. Donc, si la course du vaisseau est toujours allongée et jusqu'à l'infini, ce point haussera continuellement; et cependant il n'arrivera jamais à celui où tombera le rayon horizontal mené de l'œil au verre, de sorte qu'il en approchera toujours sans y arriver jamais, divisant sans cesse l'espace qui restera sous ce point horizontal, sans y arriver. D'où l'on voit la conséquence nécessaire qui se tire de l'infinité de l'étendue du cours du vaisseau, à la division infinie et infiniment petite de ce petit espace restant au-dessous de ce point horizontal.

Ceux qui ne seront pas satisfaits de ces raisons, et qui demeureront dans la créance que l'espace n'est pas divisible à l'infini, ne peuvent rien prétendre aux démonstrations géométriques; et, quoiqu'ils puissent être éclairés en d'autres choses, ils le seront fort peu en celles-ci : car on peut aisément être très-habile homme et mauvais géomètre. Mais ceux qui verront clairement ces vérités pourront admirer la grandeur et la puissance de la nature dans cette double infinité qui nous environne de toutes parts, et apprendre par cette considération merveilleuse à se connoître eux-mêmes, en se regardant placés entre une infinité et un néant d'étendue, entre une infinité et un néant de nombre, entre une infinité et un néant de mouvement, entre une infinité et un néant de temps. Sur quoi on peut apprendre à s'estimer à son juste prix, et former des réflexions qui valent mieux que tout le reste de la géométrie même.

J'ai cru être obligé de faire cette longue considération en faveur de ceux qui, ne comprenant pas d'abord cette double infinité, sont capables d'en être persuadés. Et, quoiqu'il y en ait plusieurs qui aient assez de lumières pour s'en passer, il peut néanmoins arriver que ce discours, qui sera nécessaire aux uns, ne sera pas entièrement inutile aux autres. . . . .

II.

L'art de persuader a un rapport nécessaire à la manière dont les hommes consentent à ce qu'on leur propose, et aux conditions des choses qu'on veut faire croire.

Personne n'ignore qu'il y a deux entrées par où les opinions sont reçues dans l'âme, qui sont ses deux principales puissances, l'entendement et la volonté. La plus naturelle est celle de l'entendement, car on ne devroit jamais consentir qu'aux vérités démontrées; mais la plus

ordinaire, quoique contre la nature, est celle de la volonté, car tout ce qu'il y a d'hommes sont presque toujours emportés à croire non pas par la preuve, mais par l'agrément. Cette voie est basse, indigne, et étrangère : aussi tout le monde la désavoue. Chacun fait profession de ne croire et même de n'aimer que ce qu'il sait le mériter.

Je ne parle pas ici des vérités divines, que je n'aurois garde de faire tomber sous l'art de persuader, car elles sont infiniment au-dessus de la nature : Dieu seul peut les mettre dans l'âme, et par la manière qu'il lui plaît. Je sais qu'il a voulu qu'elles entrent du cœur dans l'esprit, et non pas de l'esprit dans le cœur, pour humilier cette superbe puissance du raisonnement, qui prétend devoir être juge des choses que la volonté choisit; et pour guérir cette volonté infirme, qui s'est toute corrompue par ses sales attachemens. Et de là vient qu'au lieu qu'en parlant des choses humaines on dit qu'il faut les connoître avant que de les aimer, ce qui a passé en proverbe, les saints au contraire disent en parlant des choses divines qu'il faut les aimer pour les connoître, et qu'on n'entre dans la vérité que par la charité, dont ils ont fait une de leurs plus utiles sentences. En quoi il paroît que Dieu a établi cet ordre surnaturel, et tout contraire à l'ordre qui devoit être naturel aux hommes dans les choses naturelles. Ils ont néanmoins corrompu cet ordre en faisant des choses profanes ce qu'ils devoient faire des choses saintes, parce qu'en effet nous ne croyons presque que ce qui nous plaît. Et de là vient l'éloignement où nous sommes de consentir aux vérités de la religion chrétienne, tout opposée à nos plaisirs. «Dites-nous des choses agréables et nous vous écouterons,» disoient les Juifs à Moïse; comme si l'agrément devoit régler la créance! Et c'est pour punir ce désordre par un ordre qui lui est conforme, que Dieu ne verse ses lumières dans les esprits qu'après avoir dompté la rébellion de la volonté par une douceur toute céleste qui la charme et qui l'entraîne.

Je ne parle donc que des vérités de notre portée; et c'est d'elles que je dis que l'esprit et le cœur sont comme les portes par où elles sont reçues dans l'âme, mais que bien peu entrent par l'esprit, au lieu qu'elles y sont introduites en foule par les caprices téméraires de la volonté, sans le conseil du raisonnement.

Ces puissances ont chacune leurs principes et les premiers moteurs de leurs actions. Ceux de l'esprit sont des vérités naturelles et connues à tout le monde, comme que le tout est plus grand que sa partie, outre plusieurs axiomes particuliers que les uns reçoivent et non pas d'autres, mais qui, dès qu'ils sont admis, sont aussi puissans, quoique faux, pour emporter la créance, que les plus véritables. Ceux de la volonté sont de certains désirs naturels et communs à tous les hommes, comme le désir d'être heureux, que personne ne peut pas ne pas avoir, outre plusieurs objets particuliers que chacun suit pour y arriver, et qui, ayant la force de nous plaire, sont aussi forts, quoique pernicieux en effet, pour faire agir la volonté, que s'ils faisoient son véritable bonheur.

Voilà pour ce qui regarde les puissances qui nous portent à consentir. Mais pour les qualités des choses que nous devons persuader, elles sont bien diverses.

Les unes se tirent, par une conséquence nécessaire, des principes communs et des vérités avouées. Celles-là peuvent être infailliblement persuadées; car, en montrant le rapport qu'elles ont avec les principes accordés, il y a une nécessité inévitable de convaincre, et il est impossible qu'elles ne soient pas reçues dans l'âme dès qu'on a pu les enrôler à ces vérités qu'elle a déjà admises.

Il y en a qui ont une union étroite avec les objets de notre satisfaction; et celles-là sont encore reçues avec certitude, car aussitôt qu'on fait apercevoir à l'âme qu'une chose peut la conduire à ce qu'elle aime souverainement, il est inévitable qu'elle ne s'y porte avec joie.

Mais celles qui ont cette liaison tout ensemble, et avec les vérités avouées, et avec les désirs du cœur, sont si sûres de leur effet, qu'il n'y a rien qui le soit davantage dans la nature. Comme au contraire ce qui n'a de rapport ni à nos créances ni à nos plaisirs nous est importun, faux et absolument étranger.

En toutes ces rencontres il n'y a point à douter. Mais il y en a où les choses qu'on veut faire croire sont bien établies sur des vérités connues, mais qui sont en même temps contraires aux plaisirs qui nous touchent le plus. Et celles-là sont en grand péril de faire voir, par une expérience qui n'est que trop ordinaire, ce que je disois au commencement : que cette âme impérieuse, qui se vantoit de n'agir que par raison, suit par un choix honteux et téméraire ce qu'une volonté corrompue désire, quelque résistance que l'esprit trop éclairé puisse y opposer. C'est alors qu'il se fait un balancement douteux entre la vérité et la volupté, et que la connoissance de l'une et le sentiment de l'autre font un combat dont le succès est bien incertain, puisqu'il faudroit pour en juger connoître tout ce qui se passe dans le plus intérieur de l'homme, que l'homme même ne connoît presque jamais.

Il paroît de là que, quoi que ce soit qu'on veuille persuader, il faut avoir égard à la personne à qui on en veut, dont il faut connoître l'esprit et le cœur, quels principes il accorde, quelles choses il aime; et ensuite remarquer, dans la chose dont il s'agit, quels rapports elle a avec les principes avoués, ou avec les objets délicieux par les charmes qu'on lui donne. De sorte que l'art de persuader consiste autant en celui d'agréer qu'en celui de convaincre, tant les hommes se gouvernent plus par caprice que par raison!

Or, de ces deux méthodes, l'une de convaincre, l'autre d'agréer, je ne donnerai ici les règles que de la première; et encore au cas qu'on ait accordé les principes et qu'on demeure ferme à les avouer : autrement je ne sais s'il y auroit un art pour accommoder les preuves à l'inconstance de nos caprices. Mais la manière d'agréer est bien sans comparaison plus difficile, plus subtile, plus utile et plus admirable; aussi, si je n'en traite pas, c'est parce que je n'en suis pas capable; et je m'y sens tellement disproportionné, que je crois la chose absolument impossible. Ce n'est pas que je ne croie qu'il y ait des règles aussi sûres pour plaire que pour démontrer, et que qui les sauroit parfaitement connoître et pratiquer ne réussît aussi sûrement à se faire aimer des rois et de toutes sortes de personnes, qu'à démontrer les élémens de la géométrie

à ceux qui ont assez d'imagination pour en comprendre les hypothèses. Mais j'estime, et c'est peut-être ma foiblesse qui me le fait croire, qu'il est impossible d'y arriver. Au moins je sais que si quelqu'un en est capable, ce sont des personnes que je connois, et qu'aucun autre n'a sur cela de si claires et de si abondantes lumières..

La raison de cette extrême difficulté vient de ce que les principes du plaisir ne sont pas fermes et stables. Ils sont divers en tous les hommes, et variables dans chaque particulier avec une telle diversité, qu'il n'y a point d'homme plus différent d'un autre que de soi-même dans les divers temps. Un homme a d'autres plaisirs qu'une femme; un riche et un pauvre en ont de différens; un prince, un homme de guerre, un marchand, un bourgeois, un paysan, les vieux, les jeunes, les sains, les malades, tous varient; les moindres accidens les changent. Or, il y a un art, et c'est celui que je donne, pour faire voir la liaison des vérités avec leurs principes soit de vrai, soit de plaisir, pourvu que les principes qu'on a une fois avoués demeurent fermes et sans être jamais démentis. Mais comme il y a peu de principes de cette sorte, et que hors de la géométrie, qui ne considère que des figures très-simples, il n'y a presque point de vérités dont nous demeurions toujours d'accord, et encore moins d'objets de plaisir dont nous ne changions à toute heure, je ne sais s'il y a moyen de donner des règles fermes pour accorder les discours à l'inconstance de nos caprices.

Cet art que j'appelle l'art de persuader, et qui n'est proprement que la conduite des preuves méthodiques parfaites, consiste en trois parties essentielles : à définir les termes dont on doit se servir par des définitions claires; à proposer des principes ou axiomes évidens pour prouver la chose dont il s'agit; et à substituer toujours mentalement dans la démonstration les définitions à la place des définis.

La raison de cette méthode est évidente, puisqu'il seroit inutile de proposer ce qu'on veut prouver et d'en entreprendre la démonstration, si on n'avoit auparavant défini clairement tous les termes qui ne sont pas intelligibles; et qu'il faut de même que la démonstration soit précédée de la demande des principes évidens qui y sont nécessaires, car si l'on n'assure le fondement on ne peut assurer l'édifice; et qu'il faut enfin en démontrant substituer mentalement les définitions à la place des définis, puisque autrement on pourroit abuser des divers sens qui se rencontrent dans les termes. Il est facile de voir qu'en observant cette méthode on est sûr de convaincre, puisque, les termes étant tous entendus et parfaitement exempts d'équivoques par les définitions, et les principes étant accordés, si dans la démonstration on substitue toujours mentalement les définitions à la place des définis, la force invincible des conséquences ne peut manquer d'avoir tout son effet. Aussi jamais une démonstration dans laquelle ces circonstances sont gardées n'a pu recevoir le moindre doute; et jamais celles où elles manquent ne peuvent avoir de force. Il importe donc bien de les comprendre et de les posséder, et c'est pourquoi, pour rendre la chose plus facile et plus présente, je les donnerai toutes en ce peu de règles qui enferment tout ce qui est nécessaire pour la perfection des définitions,

des axiomes et des démonstrations, et par conséquent de la méthode entière des preuves géométriques de l'art de persuader.

Règle pour les définitions. — 1. N'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes, qu'on n'ait point de termes plus clairs pour les expliquer. 2. N'omettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques, sans définition. 3. N'employer dans la définition des termes que des mots parfaitement connus, ou déjà expliqués.

Règles pour les axiomes. — N'omettre aucun des principes nécessaires sans avoir demandé si on l'accorde, quelque clair et évident qu'il puisse être. 2. Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes d'elles-mêmes.

Règles pour les démonstrations. — 1. N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver. 2. Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très-évidens, ou des propositions déjà accordées ou démontrées. 3. Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas se tromper par l'équivoque des termes que les définitions ont restreints.

Voilà les huit règles qui contiennent tous les préceptes des preuves solides et immuables. Desquelles il y en a trois qui ne sont pas absolument nécessaires, et qu'on peut négliger sans erreur; qu'il est même difficile et comme impossible d'observer toujours exactement, quoiqu'il soit plus parfait de le faire autant qu'on peut; ce sont les trois premières de chacune des parties :

Pour les définitions : Ne définir aucun des termes qui sont parfaitement connus.

Pour les axiomes : N'omettre à demander aucun des axiomes parfaitement évidens et simples.

Pour les démonstrations : Ne démontrer aucune des choses très-connues d'elles-mêmes.

Car il est sans doute que ce n'est pas une grande faute de définir et d'expliquer bien clairement des choses, quoique très-claires d'elles-mêmes, ni d'omettre à demander par avance des axiomes qui ne peuvent être refusés au lieu où ils sont nécessaires, ni enfin de prouver des propositions qu'on accorderoit sans preuve. Mais les cinq autres règles sont d'une nécessité absolue, et on ne peut s'en dispenser sans un défaut essentiel et souvent sans erreur; et c'est pourquoi je les reprendrai ici en particulier.

Règles nécessaires pour les définitions. — N'omettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques, sans définition. N'employer dans les définitions que des termes parfaitement connus ou déjà expliqués.

Règles nécessaires pour les axiomes. — Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes.

Règles nécessaires pour les démonstrations. — Prouver toutes les propositions, en n'employant à leur preuve que des axiomes très-évidens d'eux-mêmes, ou des propositions déjà démontrées ou accordées. N'abuser jamais de l'équivoque des termes, en manquant de substituer mentalement les définitions qui les restreignent et les expliquent.

Voilà les cinq règles qui forment tout ce qu'il y a de nécessaire pour rendre les preuves convaincantes, immuables et, pour tout dire, géométriques; et les huit règles ensemble les rendent encore plus parfaites.

Je passe maintenant à celle de l'ordre dans lequel on doit disposer les propositions, pour être dans une suite excellente et géométrique.

Après avoir établi . . . .

Voilà en quoi consiste cet art de persuader, qui se renferme dans ces deux principes : Définir tous les noms qu'on impose; prouver tout, en substituant mentalement les définitions à la place des définis.

Sur quoi il me semble à propos de prévenir trois objections principales qu'on pourra faire. L'une, que cette méthode n'a rien de nouveau; l'autre, qu'elle est bien facile à apprendre, sans qu'il soit nécessaire pour cela d'étudier les élémens de géométrie, puisqu'elle consiste en ces deux mots qu'on sait à la première lecture; et enfin qu'elle est assez inutile, puisque son usage est presque renfermé dans les seules matières géométriques. Il faut donc faire voir qu'il n'y a rien de si inconnu, rien de plus difficile à pratiquer, et rien de plus utile et de plus universel.

Pour la première objection, qui est que ces règles sont communes dans le monde, qu'il faut tout définir et tout prouver; et que les logiciens mêmes les ont mises entre les préceptes de leur art, je voudrois que la chose fût véritable, et qu'elle fût si connue, que je n'eusse pas eu la peine de rechercher avec tant de soin la source de tous les défauts des raisonnemens, qui sont véritablement communs. Mais cela l'est si peu, que, si l'on en excepte les seuls géomètres, qui sont en si petit nombre qu'ils sont uniques en tout un peuple et dans un long temps, on n'en voit aucun qui le sache aussi. Il sera aisé de le faire entendre à ceux qui auront parfaitement compris le peu que j'en ai dit; mais s'ils ne l'ont pas conçu parfaitement, j'avoue qu'ils n'y auront rien à y apprendre. Mais s'ils sont entrés dans l'esprit de ces règles, et qu'elles aient assez fait d'impression pour s'y enraciner et s'y affermir, ils sentiront combien il y a de différence entre ce qui est dit ici et ce que quelques logiciens en ont peut-être écrit d'approchant au hasard, en quelques lieux de leurs ouvrages.

Ceux qui ont l'esprit de discernement savent combien il y a de différence entre deux mots semblables, selon les lieux et les circonstances qui les accompagnent. Croira-t-on, en vérité, que deux personnes qui ont lu et appris par cœur le même livre le sachent également, si l'un le comprend en sorte qu'il en sache tous les principes, la force des conséquences, les réponses aux objections qu'on y peut faire, et toute l'économie de l'ouvrage; au lieu qu'en l'autre ce soient des paroles mortes, et des semences qui, quoique pareilles à celles qui ont produit des arbres si fertiles, sont demeurées sèches et infructueuses dans l'esprit stérile qui les a reçues en vain? Tous ceux qui disent les mêmes choses ne les possèdent pas de la même sorte; et c'est pourquoi l'incomparable auteur de l'*Art de conférer*[1] s'arrête avec tant de soin à faire entendre

1 Montaigne, qui a donné ce titre au chap. VIII du livre III de ses *Essais*

qu'il ne faut pas juger de la capacité d'un homme par l'excellence d'un bon mot qu'on lui entend dire : mais, au lieu d'étendre l'admiration d'un bon discours à la personne, qu'on pénètre, dit-il, l'esprit d'où il sort; qu'on tente s'il le tient de sa mémoire ou d'un heureux hasard; qu'on le reçoive avec froideur et avec mépris, afin de voir s'il ressentira qu'on ne donne pas à ce qu'il dit l'estime que son prix mérite : on verra le plus souvent qu'on le lui fera désavouer sur l'heure, et qu'on le tirera bien loin de cette pensée meilleure qu'il ne croit, pour le jeter dans une autre toute basse et ridicule. Il faut donc sonder comme cette pensée est logée en son auteur; comment, par où, jusqu'où il la possède : autrement, le jugement précipité sera jugé téméraire.

Je voudrois demander à des personnes équitables si ce principe : La matière est dans une incapacité naturelle invincible de penser, et celui-ci : Je pense, donc je suis, sont en effet les mêmes dans l'esprit de Descartes et dans l'esprit de saint Augustin, qui a dit la même chose douze cents ans auparavant.

En vérité, je suis bien éloigné de dire que Descartes n'en soit pas le véritable auteur, quand même il ne l'auroit appris que dans la lecture de ce grand saint; car je sais combien il y a de différence entre écrire un mot à l'aventure, sans y faire une réflexion plus longue et plus étendue, et apercevoir dans ce mot une suite admirable de conséquences, qui prouve la distinction des natures matérielle et spirituelle, et en faire un principe ferme et soutenu d'une physique entière, comme Descartes a prétendu faire. Car, sans examiner s'il a réussi efficacement dans sa prétention, je suppose qu'il l'ait fait, et c'est dans cette supposition que je dis que ce mot est aussi différent dans ses écrits d'avec le même mot dans les autres qui l'ont dit en passant, qu'un homme plein de vie et de force d'avec un homme mort.

Tel dira une chose de soi-même sans en comprendre l'excellence, où un autre comprendra une suite merveilleuse de conséquences qui nous font dire hardiment que ce n'est plus le même mot, et qu'il ne le doit non plus à celui d'où il l'a appris, qu'un arbre admirable n'appartiendra pas à celui qui en auroit jeté la semence, sans y penser et sans la connoître, dans une terre abondante qui en auroit profité de la sorte par sa propre fertilité.

Les mêmes pensées poussent quelquefois tout autrement dans un autre que dans leur auteur : infertiles dans leur champ naturel, abondantes étant transplantées. Mais il arrive bien plus souvent qu'un bon esprit fait produire lui-même à ses propres pensées tout le fruit dont elles sont capables, et qu'ensuite quelques autres, les ayant ouï estimer, les empruntent et s'en parent, mais sans en connoître l'excellence; et c'est alors que la différence d'un même mot en diverses bouches paroît le plus.

C'est de cette sorte que la logique a peut-être emprunté les règles de la géométrie sans en comprendre la force : et ainsi, en les mettant à l'aventure parmi celles qui lui sont propres, il ne s'ensuit pas de là qu'ils aient entré dans l'esprit de la géométrie; et je serai bien éloigné, s'ils n'en donnent pas d'autres marques que de l'avoir dit en passant, de

les mettre en parallèle avec cette science, qui apprend la véritable méthode de conduire la raison. Mais je serai au contraire bien disposé à les en exclure, et presque sans retour. Car de l'avoir dit en passant, sans avoir pris garde que tout est renfermé là dedans, et au lieu de suivre ces lumières, s'égarer à perte de vue après des recherches inutiles, pour courir à ce que celles-là offrent et qu'elles ne peuvent donner, c'est véritablement montrer qu'on n'est guère clairvoyant, et bien plus que si l'on avoit manqué de les suivre parce qu'on ne les avoit pas aperçues.

La méthode de ne point errer est recherchée de tout le monde. Les logiciens font profession d'y conduire, les géomètres seuls y arrivent, et, hors de leur science et de ce qui l'imite, il n'y a point de véritables démonstrations. Tout l'art en est renfermé dans les seuls préceptes que nous avons dits : ils suffisent seuls, ils prouvent seuls; toutes les autres règles sont inutiles ou nuisibles. Voilà ce que je sais par une longue expérience de toutes sortes de livres et de personnes.

Et sur cela je fais le même jugement de ceux qui disent que les géomètres ne leur donnent rien de nouveau par ces règles, parce qu'ils les avoient en effet, mais confondues parmi une multitude d'autres inutiles ou fausses dont ils ne pouvoient pas les discerner, que de ceux qui cherchent un diamant de grand prix parmi un grand nombre de faux, mais qu'ils n'en sauroient pas distinguer, se vanteroient, en les tenant tous ensemble, de posséder le véritable aussi bien que celui qui, sans s'arrêter à ce vil amas, porte la main sur la pierre choisie que l'on recherche, et pour laquelle on ne jetoit pas tout le reste.

Le défaut d'un raisonnement faux est une maladie qui se guérit par ces deux remèdes. On en a composé un autre d'une infinité d'herbes inutiles où les bonnes se trouvent enveloppées, et où elles demeurent sans effet, par les mauvaises qualités de ce mélange. Pour découvrir tous les sophismes et toutes les équivoques des raisonnemens captieux, ils ont inventé des noms barbares, qui étonnent ceux qui les entendent; et au lieu qu'on ne peut débrouiller tous les replis de ce nœud si embarrassé qu'en tirant l'un des bouts que les géomètres assignent, ils en ont marqué un nombre étrange d'autres où ceux-là se trouvent compris, sans qu'ils sachent lequel est le bon. Et ainsi, en nous montrant un nombre de chemins différens, qu'ils disent nous conduire où nous tendons, quoiqu'il n'y en ait que deux qui y mènent (il faut savoir les marquer en particulier); on prétendra que la géométrie, qui les assigne certainement, ne donne que ce qu'on avoit déjà des autres, parce qu'ils donnoient en effet la même chose et davantage, sans prendre garde que ce présent perdoit son prix par son abondance, et qu'il ôtoit en ajoutant.

Rien n'est plus commun que les bonnes choses : il n'est question que de les discerner; et il est certain qu'elles sont toutes naturelles et à notre portée, et même connues de tout le monde. Mais on ne sait pas les distinguer. Ceci est universel. Ce n'est pas dans les choses extraordinaires et bizarres que se trouve l'excellence de quelque genre que ce soit. On s'élève pour y arriver, et on s'en éloigne : il faut le plus souvent

s'abaisser. Les meilleurs livres sont ceux que ceux qui les lisent croient qu'ils auroient pu faire. La nature, qui seule est bonne, est toute familière et commune.

Je ne fais donc pas de doute que ces règles, étant les véritables, ne doivent être simples, naïves, naturelles, comme elles le sont. Ce n'est pas *barbara* et *baralipton* qui forment le raisonnement. Il ne faut pas guinder l'esprit; les manières tendues et pénibles le remplissent d'une sotte présomption par une élévation étrangère et par une enflure vaine et ridicule au lieu d'une nourriture solide et vigoureuse. Et l'une des raisons principales qui éloignent autant ceux qui entrent dans ces connoissances du véritable chemin qu'ils doivent suivre, est l'imagination qu'on prend d'abord que les bonnes choses sont inaccessibles, en leur donnant le nom de grandes, hautes, élevées, sublimes. Cela perd tout. Je voudrois les nommer basses, communes, familières : ces noms-là leur conviennent mieux; je hais ces mots d'enflure....

ESSAIS POUR LES CONIQUES.

Définition I. — Quand plusieurs lignes droites concourent au même point, ou sont toutes parallèles entre elles, toutes ces lignes sont dites de *même ordre* ou de *même ordonnance;* et la multitude de ces lignes est dite *ordre de lignes*, ou *ordonnance de lignes*.

Définition II. — Par le mot *section* de cône, nous entendons la circonférence du cercle, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole et l'angle rectiligne : d'autant qu'un cône coupé parallèlement à sa base, ou par son sommet, ou des trois autres sens qui engendrent l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, donne dans sa superficie, ou la circonférence d'un cercle, ou un angle, ou l'ellipse, ou l'hyperbole, ou la parabole.

Définition III. — Par le mot de *droite* mis seul, nous entendons la ligne droite.

Lemme I. — *Si dans le plan* MSQ (fig. 21) *du point* M *partent les deux droites* MK, MV, *et du point* S *partent les deux droites* SK, SV;

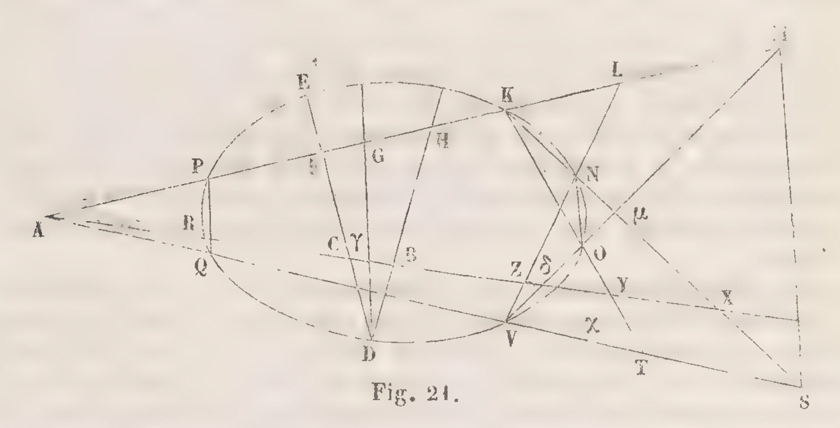


Fig. 21.

que K *soit le concours des droites* MK, SK; V *le concours des droites*

MV, SV; A *le concours des droites* MA, SA; μ *le concours des droites* MV, SK; *et que par deux des quatre points* A, K, μ, V *qui ne soient point en même droite avec les points* M, S, *comme par les points* K, V, *passe la circonférence d'un cercle coupant les droites* MV, MP, SV, SK, *aux points* O, P, Q, N : *je dis que les droites* MS, NO, PQ, *sont de même ordre.*

Lemme II. — *Si par la même droite passent plusieurs plans, qui soient coupés par un autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de même ordre avec la droite par laquelle passent lesdits plans.*

Ces deux lemmes posés et quelques faciles conséquences d'iceux, nous démontrerons que les mêmes choses étant posées qu'au premier lemme, si par les points K, V (fig. 21) passe une section quelconque du cône qui coupe les droites MK, MV, SK, SV aux points P, O, N, Q : les droites MS, NO, PQ seront de même ordre. Cela sera un troisième lemme.

Ensuite de ces trois lemmes et de quelques conséquences d'iceux, nous donnerons des élémens coniques complets : savoir, toutes les propriétés des diamètres et côtés droits, des tangentes, etc., la restitution du cône presque sur toutes les données, la description des sections du cône par points, etc.

Quoi faisant, nous énonçons les propriétés que nous en touchons d'une manière plus universelle qu'à l'ordinaire. Par exemple, celle-ci : si dans le plan MSQ (fig. 21), dans la section de cône PKV, sont menées les droites AK, AV, atteignantes la section aux points P, K, Q, V; et que de deux de ces quatre points qui ne sont point en même droite avec le point A, comme par les points K, V, et par deux points N, O pris dans le bord de la section, soient menées quatre droites KN, KO, VN, VO, coupantes les droites AV, AP aux points L, M, T, S : je dis que la raison composée des raisons de la droite PM à la droite MA, et de la droite AS à la droite SQ, est la même que la raison composée des raisons de la droite PL à la droite LA, et de la droite AT à la droite TQ.

Nous démontrerons aussi que, s'il y a trois droites DE, DG, DH que les droites AP, AR coupent aux points F, G, H, C, γ, B, et que dans la droite DC soit déterminé le point E, la raison composée des raisons du rectangle de EF en FG au rectangle de EC en Cγ, et de la droite Aγ à la droite AG, est la même que la composée des raisons du rectangle de EF en EH au rectangle de EC en CB, et de la droite AB à la droite AH; et elle est aussi la même que la raison du rectangle des droites FE, FD, au rectangle des droites CE, CD. Partant, si par les points E, D passe une section de cône qui coupe les droites AH, AB aux points P, K, R, χ, la raison composée des raisons du rectangle des droites EF, FC, au rectangle des droites EC, Cγ, et de la droite γA à la droite AG, sera la même que la composée des raisons du rectangle des droites FK, FP, au rectangle des droites CR, Cχ, et du rectangle des droites AR, Aχ, au rectangle des droites AK, AP.

Nous démontrerons aussi que si quatre droites AC, AF, EH, EL (fig. 22) s'entre-coupent aux points N, P, M, O, et qu'une section de

cône coupe lesdites droites aux points C, B; F, D, H, G, L, K : la raison composée des raisons du rectangle de MC en MB, au rectangle des droites PF, PD, et du rectangle des droites AD, AF, au rectangle des droites AB, AC, est la même que la raison composée des raisons du rectangle des droites ML, MK, au rectangle des droites PH, PG, et du rectangle des droites EH, EG, au rectangle des droites EK, EL.

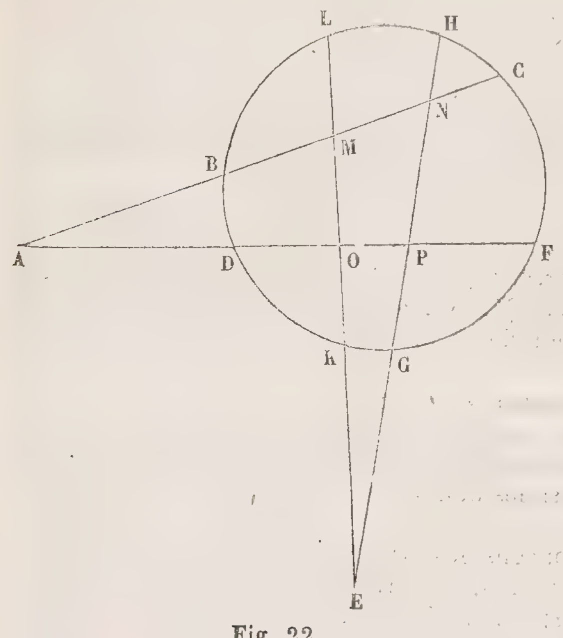


Fig. 22.

Nous démontrerons aussi la propriété suivante, dont le premier inventeur est M. Desargues, Lyonnois, un des grands esprits de ce temps, et des plus versés aux mathématiques, et entre autres aux coniques, dont les écrits sur cette matière, quoiqu'en petit nombre, en ont donné un ample témoignage à ceux qui auront voulu en recevoir l'intelligence. Je veux bien avouer que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matière à ses écrits, et que j'ai tâché d'imiter, autant qu'il m'a été possible, sa méthode sur ce sujet qu'il a traité sans se servir du triangle par l'axe, en traitant généralement de toutes les sections du cône. La propriété merveilleuse dont est question est telle : Si dans le plan MSQ (fig. 21) il y a une section de cône PQV, dans le bord de laquelle ayant pris les quatre points K, N, O, V, soient menées les droites KN, KO, VN, VO, de sorte que par un même des quatre points ne passent que deux droites, et qu'une autre droite coupe, tant le bord de la section aux points R, X, que les droites KN, KO, VN, VO aux points X, Y, Z, δ; je dis que comme le rectangle des droites ZR, ZX est au rectangle des droites YR, γX, ainsi le rectangle des droites δR, δX est au rectangle des droites XR, XX.

Nous démontrerons aussi que, si dans le plan de l'hyperbole ou de l'ellipse, ou du cercle AGTE (fig. 23), dont le centre est C, on mène la droite AB touchante au point A la section, et qu'ayant mené le diamètre AT, on prenne la droite AB, dont le carré soit égal au quart du rectangle de la figure, et qu'on mène CB; alors quelque droite qu'on mène, comme DE, parallèle à la droite AB, coupante la section en E et les droites AC, CB aux points D, F : si la section AGE est une ellipse ou un cercle, la somme des carrés des droites DE, DF sera égale au carré de la droite AB; et dans l'hyperbole, la différence

des mêmes carrés des droites DE, DF, sera égale au carré de la droite AB.

Nous déduirons aussi quelques problèmes; par exemple, *d'un point donné mener une droite touchante une section de cône donnée.*

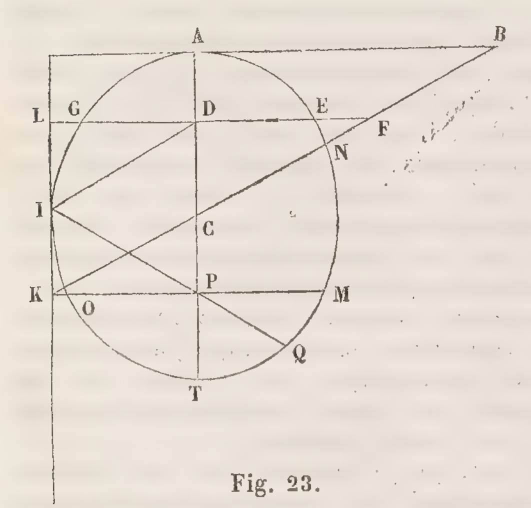


Fig. 23.

Trouver deux diamètres conjugués en angle donné.

Trouver deux diamètres en angle donné et en raison donnée.

Nous avons plusieurs autres problèmes et théorèmes, et plusieurs conséquences des précédens; mais la défiance que j'ai de mon peu d'expérience et de capacité ne me permet pas d'en avancer davantage avant qu'il ait passé à l'examen des habiles gens qui voudront nous obliger d'en prendre la peine : après quoi si l'on juge que la chose mérite d'être continuée, nous essayerons de la pousser jusqu'où Dieu nous donnera la force de la conduire.

MACHINE ARITHMÉTIQUE.

A MONSEIGNEUR LE CHANCELIER [1].

Monseigneur,

Si le public reçoit quelque utilité de l'invention que j'ai trouvée pour faire toutes sortes de règles d'arithmétique, par une manière aussi nouvelle que commode, il en aura plus d'obligation à Votre Grandeur qu'à mes petits efforts, puisque je ne saurois me vanter que de l'avoir conçue, et qu'elle doit absolument sa naissance à l'honneur de vos commandemens. Les longueurs et les difficultés des moyens ordinaires dont on se sert m'ayant fait penser à quelque secours plus prompt et plus facile pour me soulager dans les grands calculs où j'ai été occupé depuis quelques années en plusieurs affaires qui dépendent des emplois dont il vous a plu honorer mon père pour le service de Sa Majesté en la haute Normandie; j'employai à cette recherche toute la connoissance que mon inclination et le travail de mes premières études m'ont fait acquérir dans les mathématiques; et après une profonde méditation, je reconnus que ce secours n'étoit pas impossible à trouver. Les lumières de la géométrie, de la physique et de la mécanique m'en fournirent

1. Pierre Seguier.

le dessein, et m'assurèrent que l'usage en seroit infaillible, si quelque ouvrier pouvoit former l'instrument dont j'avois imaginé le modèle. Mais ce fut en ce point que je rencontrai des obstacles aussi grands que ceux que je voulois éviter, et auxquels je cherchois un remède. N'ayant pas l'industrie de manier le métal et le marteau comme la plume et le compas; et les artisans ayant plus de connoissance de la pratique de leur art que des sciences sur lesquelles il est fondé, je me vis réduit à quitter toute mon entreprise, dont il ne me revenoit que beaucoup de fatigues, sans aucun bon succès. Mais, monseigneur, Votre Grandeur ayant soutenu mon courage, qui se laissoit aller, et m'ayant fait la grâce de parler du simple crayon que mes amis vous avoient présenté, en des termes qui me le firent voir tout autre qu'il ne m'avoit paru auparavant : avec les nouvelles forces que vos louanges me donnèrent, je fis de nouveaux efforts; et suspendant tout autre exercice, je ne songeai plus qu'à la construction de cette petite machine, que j'ai osé, monseigneur, vous présenter, après l'avoir mise en état de faire, avec elle seule et sans aucun travail d'esprit, les opérations de toutes les parties de l'arithmétique, selon que je me l'étois proposé.

C'est donc à vous, monseigneur, que je devois ce petit essai, puisque c'est vous qui me l'avez fait faire; et c'est de vous aussi que j'en attends une glorieuse protection. Les inventions qui ne sont pas connues ont toujours plus de censeurs que d'approbateurs : on blâme ceux qui les ont trouvées, parce qu'on n'en a pas une parfaite intelligence; et par un injuste préjugé, la difficulté que l'on s'imagine aux choses extraordinaires, fait qu'au lieu de les considérer pour les estimer, on les accuse d'impossibilité, afin de les rejeter ensuite comme impertinentes. D'ailleurs, monseigneur, je m'attends bien que parmi tant de doctes qui ont pénétré jusque dans les derniers secrets des mathématiques, il pourra s'en trouver qui d'abord estiment mon action téméraire, vu qu'en la jeunesse où je suis, et avec si peu de forces, j'ai osé tenter une route nouvelle dans un champ tout hérissé d'épines, et sans avoir de guide pour m'y frayer le chemin. Mais je veux bien qu'ils m'accusent, et même qu'ils me condamnent, s'ils peuvent justifier que je n'ai pas tenu exactement ce que j'avois promis; et je ne leur demande que la faveur d'examiner ce que j'ai fait, et non pas celle de l'approuver sans le connoître. Aussi, monseigneur, je puis dire à Votre Grandeur que j'ai déjà la satisfaction de voir mon petit ouvrage, non-seulement autorisé de l'approbation de quelques-uns des principaux en cette véritable science, qui, par une préférence toute particulière, a l'avantage de ne rien enseigner qu'elle ne démontre, mais encore honoré de leur estime et de leur recommandation; et que même celui d'entre eux, de qui la plupart des autres admirent tous les jours et recueillent les productions, ne l'a pas jugé indigne de se donner la peine, au milieu de ses grandes occupations, d'en enseigner et la disposition et l'usage à ceux qui auront quelque désir de s'en servir. Ce sont là véritablement, monseigneur, de grandes récompenses du temps que j'ai employé, et de la dépense que j'ai faite pour mettre la chose en l'état où je vous l'ai présentée. Mais permettez-moi de flatter ma vanité jusqu'au point de dire,

qu'elles ne me satisferoient pas entièrement, si je n'en avois reçu une beaucoup plus importante et plus délicieuse de Votre Grandeur. En effet, monseigneur, quand je me représente que cette même bouche, qui prononce tous les jours des oracles sur le trône de la justice, a daigné donner des éloges au coup d'essai d'un homme de vingt ans; que vous l'avez jugé digne d'être plus d'une fois le sujet de votre entretien, et de le voir placé dans votre cabinet parmi tant d'autres choses rares et précieuses dont il est rempli, je suis comblé de gloire, et je ne trouve point de paroles pour faire paroître ma reconnoissance à Votre Grandeur, et ma joie à tout le monde.

Dans cette impuissance, où l'excès de votre bonté m'a mis, je me contenterai de la révérer par mon silence : et toute la famille dont je porte le nom étant intéressée aussi bien que moi par ce bienfait et par plusieurs autres à faire tous les jours des vœux pour votre prospérité, nous les ferons d'un cœur si ardent, et si continuels, que personne ne pourra se vanter d'être plus attaché que nous à votre service, ni de porter plus véritablement que moi la qualité, monseigneur, de votre, etc., PASCAL.

AVIS

Nécessaire à tous ceux qui auront curiosité de voir la machine arithmétique, et de s'en servir.

Ami lecteur, cet avertissement servira pour te faire savoir que j'expose au public une petite machine de mon invention, par le moyen de laquelle seule tu pourras, sans peine quelconque, faire toutes les opérations de l'arithmétique, et te soulager du travail qui t'a souventes fois fatigué l'esprit, lorsque tu as opéré par le jeton ou par la plume : je puis, sans présomption, espérer qu'elle ne te déplaira pas, après que M. le chancelier l'a honorée de son estime, et que dans Paris, ceux qui sont le mieux versés aux mathématiques ne l'ont pas jugée indigne de leur approbation. Néanmoins, pour ne pas paroître négligent à lui faire acquérir aussi la tienne, j'ai cru être obligé de t'éclaircir sur toutes les difficultés que j'ai estimées capables de choquer ton sens, lorsque tu prendras la peine de la considérer.

Je ne doute pas qu'après l'avoir vue, il ne tombe d'abord dans ta pensée que je devois avoir expliqué par écrit, et sa construction, et son usage; et que, pour rendre ce discours intelligible, j'étois même obligé, suivant la méthode des géomètres, de représenter par figures les dimensions, la disposition et le rapport de toutes les pièces, et comment chacune doit être placée pour composer l'instrument, et mettre son mouvement en sa perfection. Mais tu ne dois pas croire qu'après n'avoir épargné ni le temps, ni la peine, ni la dépense pour la mettre en état de t'être utile, j'eusse négligé d'employer ce qui étoit nécessaire pour te contenter sur ce point, qui sembloit manquer à son accomplissement, si je n'avois été empêché de le faire par une considération si puissante, que j'espère même qu'elle te forcera de m'excuser. Oui, j'espère que tu approuveras que je me sois abstenu de ce discours, si tu prends la peine

de faire réflexion d'une part sur la facilité qu'il y a d'expliquer de bouche, et d'entendre par une briève conférence, la construction et l'usage de cette machine; et d'autre part, sur l'embarras et la difficulté qu'il y eût eu d'exprimer par écrit les mesures, les formes, les proportions, les situations et le surplus des propriétés de tant de pièces différentes. Alors tu jugeras que cette doctrine est du nombre de celles qui ne peuvent être enseignées que de vive voix; et qu'un discours par écrit en cette matière seroit autant et plus inutile et embarrassant, que celui qu'on emploieroit à la description de toutes les parties d'une montre, dont toutefois l'explication est si facile, quand elle est faite bouche à bouche; et qu'apparemment un tel discours ne pourroit produire d'autre effet qu'un infaillible dégoût en l'esprit de plusieurs, leur faisant concevoir mille difficultés où il n'y en a point du tout.

Maintenant, cher lecteur, j'estime qu'il est nécessaire de t'avertir que je prévois deux choses capables de former quelques nuages en ton esprit. Je sais qu'il y a nombre de personnes qui font profession de trouver à redire partout, et qu'entre ceux-là il pourra s'en trouver qui te diront que cette machine pouvoit être moins composée; c'est là la première vapeur que j'estime nécessaire de dissiper. Cette proposition ne peut t'être faite que par certains esprits qui ont véritablement quelque connoissance de la mécanique ou de la géométrie, mais qui, pour ne les savoir joindre l'une à l'autre, et toutes deux ensemble à la physique, se flattent ou se trompent dans leurs conceptions imaginaires, et se persuadent possibles beaucoup de choses qui ne le sont pas, pour ne posséder qu'une théorie imparfaite des choses en général, laquelle n'est pas suffisante de leur faire prévoir en particulier les inconvéniens qui arrivent, ou de la part de la matière, ou des places que doivent occuper les pièces d'une machine dont les mouvemens sont différens, afin qu'ils soient libres et qu'ils ne puissent s'empêcher les uns les autres. Lors donc que ces savans imparfaits te soutiendront que cette machine pouvoit être moins composée, je te conjure de leur faire la réponse que je leur ferois moi-même, s'ils me faisoient une telle proposition, et de les assurer de ma part que je leur ferai voir, quand il leur plaira, plusieurs autres modèles, et même un instrument entier et parfait, beaucoup moins composé, dont je me suis publiquement servi pendant six mois entiers; et ainsi que je n'ignore pas que la machine ne peut être moins composée, et particulièrement si j'eusse voulu instituer le mouvement de l'opération par la face antérieure, ce qui ne pouvoit être qu'avec une incommodité ennuyeuse et insupportable; au lieu que maintenant il se fait par la face supérieure avec toute la commodité qu'on sauroit souhaiter, et même avec plaisir : tu leur diras aussi que mon dessein n'ayant jamais visé qu'à réduire en mouvement réglé toutes les opérations de l'arithmétique, je me suis en même temps persuadé que mon dessein ne réussiroit qu'à ma propre confusion, si ce mouvement n'étoit simple, facile, commode et prompt à l'exécution, et que la machine ne fût durable, solide, et même capable de souffrir sans altération la fatigue du transport; et enfin que, s'ils avoient autant médité que moi sur cette matière, et passé par tous les chemins que j'ai suivis pour venir à mon

but, l'expérience leur auroit fait voir qu'un instrument moins composé ne pouvoit avoir toutes ces conditions que j'ai heureusement données à cette petite machine.

Car pour la simplicité du mouvement des opérations, j'ai fait en sorte qu'encore que les opérations de l'arithmétique soient en quelque façon opposées l'une à l'autre, comme l'addition à la soustraction, et la multiplication à la division, néanmoins elles se pratiquent toutes sur cette machine par un seul et unique mouvement.

Pour la facilité de ce même mouvement des opérations, elle est toute apparente, en ce qu'il est aussi facile de faire mouvoir mille et dix mille roues toutes à la fois, si elles y étoient, quoique toutes achèvent leur mouvement très-parfait, que d'en faire mouvoir une seule (je ne sais si, après le principe sur lequel j'ai fondé cette facilité, il en reste un autre dans la nature). Que si tu veux, outre la facilité du mouvement de l'opération, savoir quelle est la facilité de l'opération même, c'est-à-dire la facilité qu'il y a en l'opération par cette machine, tu le peux, si tu prends la peine de la comparer avec les méthodes d'opérer par le jeton et par la plume. Tu sais comme en opérant par le jeton, le calculateur (surtout lorsqu'il manque d'habitude) est souvent obligé, de peur de tomber en erreur, de faire une longue suite et extension de jetons, et comme la nécessité le contraint après d'abréger et de relever ceux qui se trouvent inutilement étendus; en quoi tu vois deux peines inutiles, avec la perte de deux temps. Cette machine facilite et retranche en ses opérations tout ce superflu; le plus ignorant y trouve autant d'avantage que le plus expérimenté; l'instrument supplée au défaut de l'ignorance ou du peu d'habitude; et par des mouvemens nécessaires, il fait lui seul, sans même l'intention de celui qui s'en sert, tous les abrégés possibles à la nature, toutes les fois que les nombres s'y trouvent disposés. Tu sais de même, comme en opérant par la plume, on est à tout moment obligé de retenir ou d'emprunter les nombres nécessaires, et combien d'erreurs se glissent dans ces rétentions et emprunts, à moins d'une très-longue habitude, et en outre d'une attention profonde et qui fatigue l'esprit en peu de temps. Cette machine délivre celui qui opère par elle, de cette vexation; il suffit qu'il ait le jugement, elle le relève du défaut de la mémoire; et sans rien retenir ni emprunter, elle fait d'elle-même ce qu'il désire, sans même qu'il y pense. Il y a cent autres facilités que l'usage fait voir, dont le discours pourroit être ennuyeux.

Quant à la commodité de ce mouvement, il suffit de dire qu'il est insensible, allant de gauche à droite, et imitant notre méthode vulgaire d'écrire, fors qu'il procède circulairement.

Et enfin quant à sa promptitude, elle paroît de même, en la comparant avec celle des autres deux méthodes du jeton et de la plume: et si tu veux encore une plus parfaite explication de sa vitesse, je te dirai qu'elle est pareille à l'égalité de la main de celui qui opère : cette promptitude est fondée, non-seulement sur la facilité des mouvemens qui ne font aucune résistance, mais encore sur la petitesse des roues que l'on meut à la main, qui fait que le chemin étant plus court, le moteur peut le parcourir en moins de temps; d'où il arrive encore cette commo-

dité, que par ce moyen la machine se trouvant réduite en plus petit volume, elle en est plus maniable et portative.

Et quant à la durée et solidité de l'instrument, la seule dureté du métal dont il est composé pourroit en donner à quelque autre la certitude : mais d'y prendre une assurance entière, et la donner aux autres, je n'ai pu le faire qu'après en avoir fait l'expérience, par le transport de l'instrument durant plus de deux cent cinquante lieues de chemin, sans aucune altération.

Ainsi, cher lecteur, je te conjure encore une fois de ne point prendre pour imperfection que cette machine soit composée de tant de pièces, puisque sans cette composition, je ne pouvois lui donner toutes les conditions ci-devant déduites, qui toutefois lui étoient toutes nécessaires; en quoi tu pourras remarquer une espèce de paradoxe, que pour rendre le mouvement de l'opération plus simple, il a fallu que la machine ait été construite d'un mouvement plus composé.

La seconde cause que je prévois capable de te donner de l'ombrage, ce sont, cher lecteur, les mauvaises copies de cette machine qui pourroient être produites par la présomption des artisans : en ces occasions, je te conjure d'y porter soigneusement l'esprit de distinction, te garder de la surprise, distinguer entre la copie et la copie, et ne pas juger des véritables originaux, par les productions imparfaites de l'ignorance et de la témérité des ouvriers : plus ils sont excellens en leur art, plus il est à craindre que la vanité ne les enlève par la persuasion qu'ils se donnent trop légèrement d'être capables d'entreprendre et d'exécuter d'eux-mêmes des ouvrages nouveaux, desquels ils ignorent et les principes, et les règles, puis, enivrés de cette fausse persuasion, ils travaillent en tâtonnant, c'est-à-dire sans mesures certaines et sans proportions réglées par art : d'où il arrive qu'après beaucoup de temps et de travail, ou ils ne produisent rien qui revienne à ce qu'ils ont entrepris; ou, au plus, ils font paroître un petit monstre auquel manquent les principaux membres, les autres étant informes et sans aucune proportion : ces imperfections, le rendant ridicule, ne manquent jamais d'attirer le mépris de tous ceux qui le voient, desquels la plupart rejettent, sans raison, la faute sur celui qui, le premier, a eu la pensée d'une telle invention; au lieu de s'en éclaircir avec lui, et puis blâmer la présomption de ces artisans, qui, par une fausse hardiesse d'oser entreprendre plus que leurs semblables, produisent ces inutiles avortons. Il importe au public de leur faire connoître leur foiblesse, et leur apprendre que pour les nouvelles inventions, il faut nécessairement que l'art soit aidé par la théorie, jusqu'à ce que l'usage ait rendu les règles de la théorie si communes, qu'il les ait enfin réduites en art, et que le continuel exercice ait donné aux artisans l'habitude de suivre et pratiquer ces règles avec assurance. Et tout ainsi qu'il n'étoit pas en mon pouvoir, avec toute la théorie imaginable, d'exécuter moi seul mon propre dessein, sans l'aide d'un ouvrier qui possédât parfaitement la pratique du tour, de la lime et du marteau, pour réduire les pièces de la machine dans les mesures et proportions que par les règles de la théorie je lui prescrivois : il est de même absolument impossible à tous

les simples artisans, si habiles qu'ils soient en leur art, de mettre en perfection une pièce nouvelle qui consiste, comme celle-ci, en mouvemens compliqués, sans l'aide d'une personne qui, par les règles de la théorie, lui donne les mesures et les proportions de toutes les pièces dont elle doit être composée.

Cher lecteur, j'ai sujet particulier de te donner ce dernier avis, après avoir vu de mes yeux une fausse exécution de ma pensée, faite par un ouvrier de la ville de Rouen, horloger de profession, lequel, sur le simple récit qui lui fut fait de mon premier modèle que j'avois fait quelques mois auparavant, eut assez de hardiesse pour en entreprendre un autre, et qui plus est, par une autre espèce de mouvement; mais comme le bonhomme n'a autre talent que celui de manier adroitement ses outils, et qu'il ne sait pas seulement si la géométrie et la mécanique sont au monde : aussi (quoiqu'il soit très-habile en son art, et même très-industrieux en plusieurs choses qui n'en sont point) ne fit-il qu'une pièce inutile, propre véritablement, polie et très-bien limée par le dehors, mais tellement imparfaite au dedans, qu'elle n'est d'aucun usage. Toutefois à cause seulement de sa nouveauté, elle ne fut pas sans estime parmi ceux qui n'y connoissent rien, et, nonobstant tous les défauts essentiels que l'épreuve y fit reconnoître, ne laissa pas de trouver place dans le cabinet d'un curieux de la même ville, rempli de plusieurs autres pièces rares et ingénieuses. L'aspect de ce petit avorton me déplut au dernier point, et refroidit tellement l'ardeur avec laquelle je faisois alors travailler à l'accomplissement de mon modèle, qu'à l'instant même je donnai congé à tous mes ouvriers, résolu de quitter entièrement mon entreprise, par la juste appréhension que je conçus qu'une pareille hardiesse ne prît à plusieurs autres, et que les fausses copies qu'ils pouvoient produire de cette nouvelle pensée, n'en ruinassent l'estime dès sa naissance, avec l'utilité que le public pouvoit en recevoir. Mais quelque temps après, M. le chancelier, ayant daigné honorer de sa vue mon premier modèle, et donner le témoignage de l'estime qu'il faisoit de cette invention, me fit commandement de la mettre en sa perfection; et, pour dissiper la crainte qui m'avoit retenu quelque temps, il lui plut de retrancher le mal dès sa racine, et d'empêcher le cours qu'il pouvoit prendre au préjudice de ma réputation et au désavantage du public, par la grâce qu'il me fit de m'accorder un privilége, qui n'est pas ordinaire, et qui étouffe avant leur naissance tous ces avortons illégitimes qui pourroient être engendrés d'ailleurs que de la légitime et nécessaire alliance de la théorie avec l'art.

Au reste, si quelquefois tu as exercé ton esprit à l'invention des machines, je n'aurai pas grand'peine à te persuader que la forme de l'instrument, en l'état où il est à présent, n'est pas le premier effet de l'imagination que j'ai eue sur ce sujet : j'avois commencé l'exécution de mon projet par une marche très-différente de celle-ci, et en sa matière, et en sa forme, laquelle (bien qu'en état de satisfaire à plusieurs) ne me donna pas pourtant la satisfaction entière; ce qui fit qu'en la corrigeant peu à peu j'en fis insensiblement une seconde, en laquelle, rencontrant encore des inconvéniens que je ne pus souffrir, pour y apporter le re-

mède, j'en composai une troisième, qui va par ressorts, et qui est très simple en sa construction. C'est celle de laquelle, comme j'ai déjà dit, je me suis servi plusieurs fois, au vu et su d'une infinité de personnes, et qui est encore en état de servir autant que jamais. Cependant, en la perfectionnant toujours, je trouvai des raisons de la changer; et enfin reconnoissant dans toutes, ou de la difficulté d'agir, ou de la rudesse aux mouvemens, ou de la disposition à se corrompre trop facilement par le temps ou par le transport, j'ai pris la patience de faire jusqu'à plus de cinquante modèles, tous différens, les uns de bois, les autres d'ivoire et d'ébène, et les autres de cuivre, avant que d'être venu à l'accomplissement de la machine que maintenant je fais paroître, laquelle, bien que composée de tant de petites pièces différentes, comme tu pourras voir, est toutefois tellement solide, qu'après l'expérience dont j'ai parlé ci-devant, j'ose te donner assurance que tous les efforts qu'elle pourroit recevoir en la transportant si loin que tu voudras, ne sauroient la corrompre, ni lui faire souffrir la moindre altération.

Enfin, cher lecteur, maintenant que j'estime l'avoir mise en état d'être vue, et que même tu peux, si tu en as la curiosité, la voir et t'en servir, je te prie d'agréer la liberté que je prends d'espérer que la seule pensée à trouver une troisième méthode pour faire toutes les opérations arithmétiques, totalement nouvelle, et qui n'a rien de commun avec les deux méthodes vulgaires de la plume et du jeton, recevra de toi quelque estime; et qu'en approuvant le dessein que j'ai eu de te plaire, en te soulageant, tu me sauras gré du soin que j'ai pris pour faire que toutes les opérations qui, par les précédentes méthodes, sont pénibles, composées, longues et peu certaines, deviennent faciles simples, promptes et assurées.

LETTRE DE PASCAL A LA REINE CHRISTINE,

EN LUI ENVOYANT LA MACHINE ARITHMÉTIQUE.

Madame,

Si j'avois autant de santé que de zèle, j'irois moi-même présenter à Votre Majesté un ouvrage de plusieurs années, que j'ose lui offrir de si loin, et je ne souffrirois pas que d'autres mains que les miennes eussent l'honneur de le porter aux pieds de la plus grande princesse du monde. Cet ouvrage, Madame, est une machine pour faire les règles d'arithmétique sans plumes et sans jetons. Votre Majesté n'ignore pas la peine et le temps que coûtent les productions nouvelles, surtout lorsque les inventeurs veulent les porter eux-mêmes à la dernière perfection : c'est pourquoi il seroit inutile de dire combien il y a que je travaille à celle-ci; et je ne pourrois mieux l'exprimer qu'en disant que je m'y suis attaché avec autant d'ardeur que si j'eusse prévu qu'elle devoit paroître un jour devant une personne si auguste. Mais, Madame, si cet honneur n'a pas été le véritable motif de mon travail, il en sera du moins la récompense, et je m'estimerai trop heureux si, à la suite de tant de veilles, il peut donner à Votre Majesté une satisfaction de quelques momens. Je n'importunerai pas non plus Votre Majesté du particulier de

ce qui compose cette machine : si elle en a quelque curiosité, elle pourra se contenter dans un discours que j'ai adressé à M. de Bourdelot; j'y ai touché en peu de mots toute l'histoire de cet ouvrage, l'objet de son invention, l'occasion de sa recherche, l'utilité de ses ressorts, les difficultés de son exécution, les degrés de son progrès, le succès de son accomplissement et les règles de son usage. Je dirai donc seulement ici le sujet qui me porte à l'offrir à Votre Majesté, ce que je considère comme le couronnement et le dernier bonheur de son aventure. Je sais, Madame, que je pourrai être suspect d'avoir recherché de la gloire, en le présentant à Votre Majesté, puisqu'il ne sauroit passer que pour extraordinaire, quand on verra qu'il s'adresse à elle, et qu'au lieu qu'il ne devroit lui être offert que par la considération de son excellence, on jugera qu'il est excellent, par cette seule raison qu'il lui est offert. Ce n'est pas néanmoins cette espérance qui m'a inspiré un tel dessein. Il est trop grand, Madame, pour avoir d'autre objet que Votre Majesté même. Ce qui m'y a véritablement porté, est l'union qui se trouve en sa personne sacrée, de deux choses qui me comblent également d'admiration et de respect, qui sont l'autorité souveraine et la science solide; car j'ai une vénération toute particulière pour ceux qui sont élevés au suprême degré, ou de puissance, ou de connoissances. Les derniers peuvent, si je ne me trompe, aussi bien que les premiers, passer pour des souverains. Les mêmes degrés se rencontrent entre les génies qu'entre les conditions; et le pouvoir des rois sur les sujets n'est, ce me semble, qu'une image du pouvoir des esprits sur les esprits qui leur sont inférieurs, sur lesquels ils exercent le droit de persuader, ce qui est parmi eux ce que le droit de commander est dans le gouvernement politique. Ce second empire me paroît même d'un ordre d'autant plus élevé, que les esprits sont d'un ordre plus élevé que les corps, et d'autant plus équitable, qu'il ne peut être départi et conservé que par le mérite, au lieu que l'autre peut l'être par la naissance ou par la fortune. Il faut donc avouer que chacun de ces empires est grand en soi; mais, Madame, que Votre Majesté me permette de le dire, elle n'y est pas blessée, l'un sans l'autre me paroît défectueux. Quelque puissant que soit un monarque, il manque quelque chose à sa gloire, s'il n'a la prééminence de l'esprit; et quelque éclairé que soit un sujet, sa condition est toujours rabaissée par sa dépendance. Les hommes qui désirent naturellement ce qui est le plus parfait avoient jusqu'ici continuellement aspiré à rencontrer ce souverain par excellence. Tous les rois et tous les savans en étoient autant d'ébauches, qui ne remplissoient qu'à demi leur attente; ce chef-d'œuvre étoit réservé à notre siècle. Et afin que cette grande merveille parût accompagnée de tous les sujets possibles d'étonnement, le degré où les hommes n'avoient pu atteindre est rempli par une jeune reine, dans laquelle se rencontrent ensemble l'avantage de l'expérience avec la tendresse de l'âge; le loisir de l'étude avec l'occupation d'une royale naissance; et l'éminence de la science avec la foiblesse du sexe. C'est Votre Majesté, Madame, qui fournit à l'univers cet unique exemple qui lui manquoit; c'est elle en qui la puissance est dispensée par les lumières de la science et la science relevée

par l'éclat de l'autorité. C'est cette union si merveilleuse qui fait que comme Votre Majesté ne voit rien qui soit au-dessus de sa puissance, elle ne voit rien aussi qui soit au-dessus de son esprit, et qu'elle sera l'admiration de tous les siècles. Régnez donc, incomparable princesse, d'une manière toute nouvelle; que votre génie vous assujettisse tout ce qui n'est pas soumis à vos armes : régnez par le droit de la naissance, par une longue suite d'années, sur tant de triomphantes provinces; mais régnez toujours par la force de votre mérite sur toute l'étendue de la terre. Pour moi, n'étant pas né sous le premier de vos empires, je veux que tout le monde sache que je fais gloire de vivre sous le second; et c'est pour le témoigner, que j'ose lever les yeux jusqu'à ma reine, en lui donnant cette première preuve de ma dépendance. Voilà, Madame, ce qui me porte à faire à Votre Majesté ce présent, quoique indigne d'elle. Ma foiblesse n'a pas arrêté mon ambition. Je me suis figuré, qu'encore que le seul nom de Votre Majesté semble éloigner d'elle tout ce qui lui est disproportionné, elle ne rejette pas néanmoins tout ce qui lui est inférieur; autrement sa grandeur seroit sans hommages et sa gloire sans éloges. Elle se contente de recevoir un grand effort d'esprit, sans exiger qu'il soit l'effort d'un esprit grand comme le sien. C'est par cette condescendance qu'elle daigne entrer en communication avec le reste des hommes : et toutes ces considérations jointes me font lui protester avec toute la soumission dont l'un des plus grands admirateurs de ses héroïques qualités est capable, que je ne souhaite rien avec tant d'ardeur que de pouvoir être adopté, Madame, de Votre Majesté, pour son très-humble, très-obéissant et très-fidèle serviteur, BLAISE PASCAL.

PRIVILÉGE DU ROI

POUR LA MACHINE ARITHMÉTIQUE.

LOUIS, par la grâce de Dieu, roi de France et de Navarre, etc.; salut. Notre très-cher et bien-amé le sieur Pascal nous a fait remontrer qu'à l'imitation du sieur Pascal, son père, notre conseiller en nos conseils, et président en notre cour des aides d'Auvergne, il auroit eu, dès ses plus jeunes années, une inclination particulière aux sciences mathématiques, dans lesquelles, par ses études et ses observations, il a inventé plusieurs choses, et particulièrement une machine, par le moyen de laquelle on peut faire toutes sortes de supputations, additions, soustractions, multiplications, divisions, et toutes les autres règles arithmétiques, tant en nombres entiers que rompus, sans se servir de plume ni jetons, par une méthode beaucoup plus simple, plus facile à apprendre, plus prompte à l'exécution, et moins pénible à l'esprit que les autres façons de calculer qui ont été en usage jusqu'à présent; et qui, outre ces avantages, a celui d'être hors de tout danger d'erreur, qui est la condition la plus importante de toutes dans les calculs. De laquelle machine il auroit fait plus de cinquante modèles, tous différens, les uns composés de verges ou lamines droites, d'autres de courbes, d'autres avec des chaînes; les uns avec des rouages concen-

triques, d'autres avec des excentriques, les uns mouvans en ligne droite, d'autres circulairement, les uns en cônes, d'autres en cylindres, et d'autres tout différens de ceux-là, soit pour la matière, soit pour la figure, soit pour le mouvement : de toutes lesquelles manières différentes, l'invention principale et le mouvement essentiel consistent en ce que chaque roue ou verge d'un ordre faisant un mouvement de dix figures arithmétiques, fait mouvoir la prochaine d'une figure seulement. Après tous lesquels essais, auxquels il a employé beaucoup de temps et de frais, il seroit enfin arrivé à la construction d'un modèle achevé qui a été reconnu infaillible par les plus doctes mathématiciens de ce temps, qui l'ont universellement honoré de leur approbation et estimé très-utile au public. Mais, d'autant que ledit instrument peut être aisément contrefait par des ouvriers, et qu'il est néanmoins impossible qu'ils parviennent à l'exécuter dans la justesse et perfection nécessaires pour s'en servir utilement, s'ils n'y sont conduits expressément par ledit Pascal, ou par une personne qui ait une entière intelligence de l'artifice de son mouvement, il seroit à craindre que, s'il étoit permis à toutes sortes de personnes de tenter d'en construire de semblables, les défauts qui s'y rencontreroient infailliblement par la faute des ouvriers, ne rendissent cette invention aussi inutile qu'elle doit être profitable étant bien exécutée. C'est pourquoi il désireroit qu'il nous plût faire défenses à tous artisans et autres personnes, de faire ou faire faire ledit instrument sans son consentement, nous suppliant, à cette fin, de lui accorder nos lettres sur ce nécessaires; et parce que ledit instrument est à présent à un prix excessif qui le rend, par sa cherté, comme inutile au public, et qu'il espère le réduire à moindre prix et tel qu'il puisse avoir cours, ce qu'il prétend faire par l'invention d'un mouvement plus simple et qui opère néanmoins le même effet, à la recherche duquel il travaille continuellement, et en y stylant peu à peu les ouvriers encore peu habitués, lesquelles choses dépendent d'un temps qui ne peut être limité.

A ces causes, désirant gratifier et favorablement traiter ledit Pascal fils, en considération de sa capacité en plusieurs sciences, et surtout en mathématiques, et pour l'exciter d'en communiquer de plus en plus les fruits à nos sujets, et ayant égard au notable soulagement que cette machine doit apporter à ceux qui ont de grands calculs à faire, et à raison de l'excellence de cette invention, nous avons permis et permettons par ces présentes signées de notre main, audit sieur Pascal fils, et à ceux qui auront droit de lui, dès à présent et à toujours, de faire construire ou fabriquer par tels ouvriers, de telle matière et en telle forme qu'il avisera bon être, en tous les lieux de notre obéissance, ledit instrument par lui inventé, pour compter, calculer, faire toutes additions, soustractions, multiplications, divisions et autres règles d'arithmétique, sans plume ni jetons; et faisons très-expresses défenses à toutes personnes, artisans et autres, de quelque qualité et condition qu'ils soient, d'en faire, ni faire faire, vendre, ni débiter dans aucun lieu de notre obéissance, sans le consentement dudit sieur Pascal fils, ou de ceux qui auront droit de lui, sous prétexte d'augmentation, chan-

gement de matière, forme ou figure, ou diverses manières de s'en servir, soit qu'ils fussent composes de roues excentriques, ou concentriques, ou parallèles, de verges ou bâtons et autres choses, ou que les roues se meuvent seulement d'une part ou de toutes deux, ni pour quelque déguisement que ce puisse être, même à tous étrangers, tant marchands que d'autres professions, d'en exposer ni vendre en ce royaume, quoiqu'ils eussent été faits hors d'icelui : le tout à peine de trois mille livres d'amende, payables sans déport par chacun des contrevenans, et applicables un tiers à nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, et l'autre tiers audit sieur Pascal, ou à ceux qui auront son droit; de confiscation des instrumens contrefaits, et de tous dépens, dommages et intérêts. Enjoignons à cet effet à tous ouvriers qui construiront ou fabriqueront lesdits instrumens en vertu des présentes, d'y faire apposer par ledit sieur Pascal, ou par ceux qui auront son droit, telle contremarque qu'ils auront choisie, pour témoigner qu'ils auront visité lesdits instrumens, et qu'ils les auront reconnus sans défaut. Voulons que tous ceux où ces formalités ne seront pas gardées, soient confisqués, et que ceux qui les auront faits ou qui en seront trouvés saisis soient sujets aux peines et amendes susdites; à quoi ils seront contraints en vertu des présentes, ou de copies d'icelles dûment collationnées par l'un de nos amés et féaux conseillers-secrétaires, auxquelles foi sera ajoutée comme à l'original : du contenu duquel nous vous mandons que vous le fassiez jouir et user pleinement et paisiblement, et ceux auxquels il pourra transporter son droit, sans souffrir qu'il leur soit donné aucun empêchement. Mandons au premier nôtre huissier ou sergent sur ce requis, de faire, pour l'exécution des présentes, tous les exploits nécessaires, sans demander autre permission. Car tel est notre plaisir : nonobstant tous édits, ordonnances, déclarations, arrêts, règlemens, priviléges, statuts et confirmation d'iceux, clameur de haro, charte normande, et autres lettres à ce contraires, auxquelles et aux dérogatives y contenues, nous dérogeons par ces présentes. Donné à Compiègne, le vingt-deuxième jour de mai, l'an de grâce mil six cent quarante-neuf, et de notre règne le septième. *Signé* LOUIS. *Et plus bas*, la REINE RÉGENTE, sa mère, présente. Par le roi, PHÉLYPEAUX, *gratis*. L'original en parchemin scellé du grand sceau de cire jaune.

DESCRIPTION

DE LA MACHINE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL,

PAR DIDEROT[1].

Dans la figure 24, NOPR est une plaque de cuivre qui forme la surface supérieure de la machine. On voit à la partie inférieure de cette plaque

1. Tirée du premier volume de l'*Encyclopédie*.

une rangée NO de cercles Q, Q, Q, etc., tous mobiles, autour de leurs centres Q : le premier à la droite a douze dents; le second, en allant de droite à gauche, en a vingt; et tous les autres en ont dix. Les pièces qu'on aperçoit en S, S, S, etc., et qui s'avancent sur les disques des cercles mobiles Q, Q, Q, etc., sont des étochios ou arrêts, qu'on appelle *potences.* Ces étochios sont fixes et immobiles; ils ne posent point sur les cercles qui peuvent se mouvoir librement sous leurs pointes; ils ne servent qu'à arrêter un stylet qu'on appelle *directeur*, qu'on tient à la main, et dont on place la pointe entre les dents des cercles mobiles Q, Q, Q, etc., pour les faire tourner dans la direction 6, 5, 4, 3, etc., quand on se sert de la machine.

Fig. 24.

Il est évident, par le nombre des dents des cercles mobiles Q, Q, Q, etc., que le premier à droite marque les deniers; le second, en allant de droite à gauche, les sous; le troisième, les unités de livres; le quatrième, les dizaines; le cinquième, les centaines; le sixième, les mille; le septième, les dizaines de mille; le huitième, les centaines de mille; et quoiqu'il n'y en ait que huit, on auroit pu, en agrandissant la machine, pousser plus loin le nombre de ses cercles.

La ligne YZ est une rangée de trous, à travers lesquels on aperçoit des chiffres. Les chiffres aperçus ici sont 436809 livres 15 sous 10 deniers; mais on verra par la suite qu'on peut en faire paroître d'autres à discrétion par les mêmes ouvertures.

La bande P, R est mobile de bas en haut : on peut, en la prenant par ses extrémités PR, la faire descendre sur la rangée des ouvertures 436809 livres 15 sous 10 deniers qu'elle

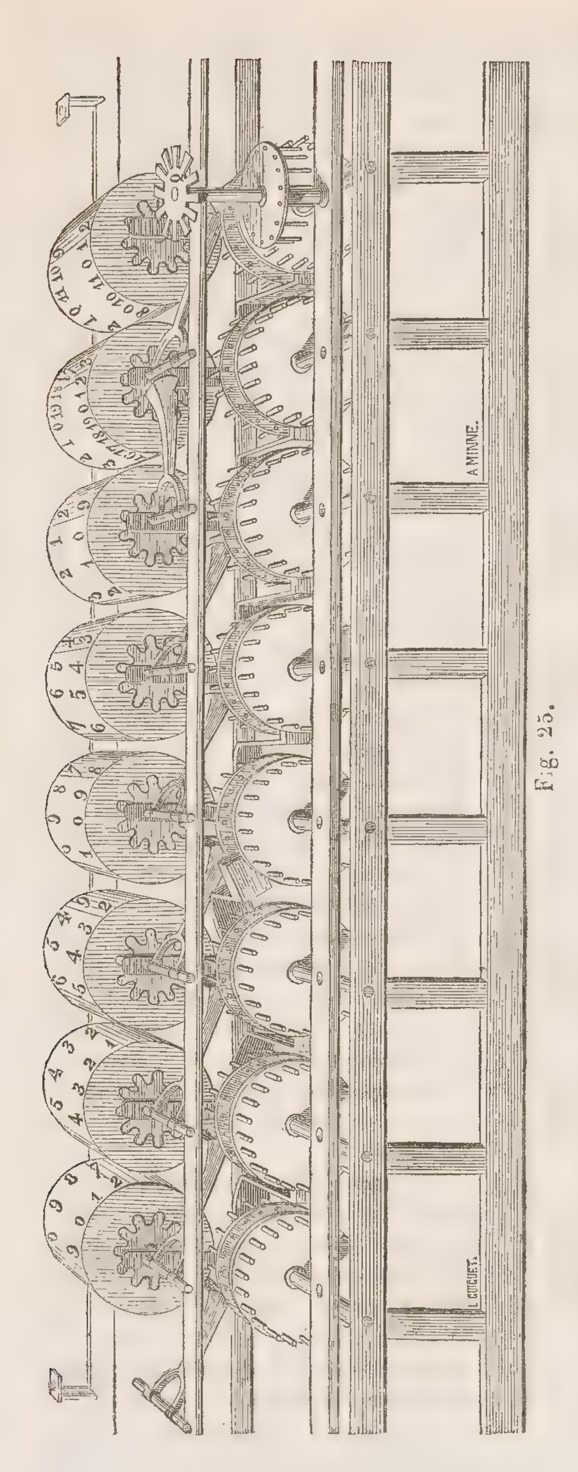


Fig. 25.

couvriroit; mais alors on apercevroit une autre rangée parallèle de chiffres à travers des trous placés directement au-dessus des premiers.

La même bande PR porte de petites roues gravées de plusieurs chiffres, toutes avec une aiguille au centre, à laquelle la petite roue sert de cadran : chacune de ces roues porte autant de chiffres que les cercles mobiles Q, Q, Q, etc., auxquels elles correspondent perpendiculairement. Ainsi V1 porte douze chiffres ou plutôt a douze divisions; V2 en a vingt; V3 en a dix; V4 dix, et ainsi de suite.

On voit (fig. 25) la machine entière. On a découvert la roue des deniers, pour faire voir l'effet de cette roue sur les autres. Il en est de même pour l'effet de toute autre roue.

ABCD (fig. 26) est une coupe verticale de la machine. 1 Q 2 représente un des cercles mobiles Q de la figure 24; ce cercle entraîne par son axe Q 3 la roue à chevilles 4, 5. Les chevilles de la roue 4, 5 font mouvoir la roue 6, 7, la roue 8, 9, et la roue 10, 11, qui sont toutes fixées sur un même axe. Les chevilles de la roue 10, 11 engrènent dans la roue 12, 13, et la font mouvoir, et avec elle le barillet 14, 15.

Sur le barillet 14, 15 sont tracées l'une au-dessus de l'autre deux rangées de

chiffres, de la manière qu'on va dire. Si l'on suppose que ce barillet soit celui de la tranche des deniers, soient tracées les deux rangées :

0, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
11, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

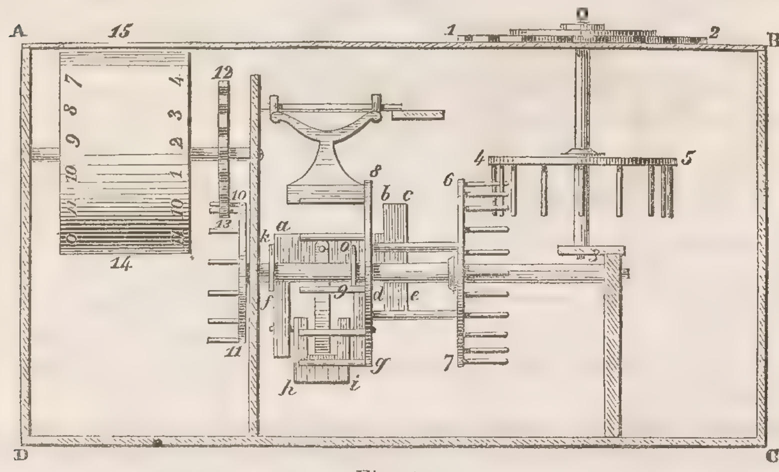


Fig. 26.

Si le barillet 14, 15 est celui de la tranche des sous, soient tracées les deux rangées :

0, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10,
19, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

Si le barillet 14, 15 est celui de la tranche des unités de livres, soient tracées les deux rangées :

0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Il est évident, 1° que c'est de la rangée inférieure des chiffres tracés sur les barillets, que quelques-uns paroissent à travers les ouvertures de la ligne YZ (fig. 24), et que ceux qui paroîtroient à travers les ouvertures couvertes de la bande mobile PR, sont de la rangée supérieure.

2° Qu'en tournant (fig. 24) le cercle mobile Q, on arrêtera, sous une des ouvertures de la ligne YZ, tel chiffre que l'on voudra; et que le chiffre retranché de 11 sur le barillet des deniers, donnera celui qui lui correspond dans la rangée supérieure des deniers; retranché de 19 sur le barillet des sous, il donnera celui qui lui correspond dans la rangée supérieure des sous; retranché de 9 sur le barillet des unités de livres, il donnera celui qui lui correspond dans la rangée supérieure des unités de livres, et ainsi de suite.

3° Que pareillement celui de la bande supérieure du barillet des deniers, retranché de 11, donnera celui qui lui correspond dans la rangée inférieure, etc.

La pièce *abcdefghikl* qu'on entrevoit (même fig. 26) est celle qu'on appelle *sautoir*. Il est important de bien en considérer la figure, la position et le jeu; car, sans une connoissance très-exacte de ces trois choses, il ne faut pas espérer d'avoir une idée précise de la machine. Aussi avons-nous répété cette pièce en quatre figures différentes. *a b c d e f g h i k l* (fig. 26) est le sautoir, comme nous venons d'en avertir : 1 2 3 4 5 6 7 8 *x y* T *z u* l'est aussi (fig. 27); et 1 2 3 4 5 6 7 8 9 l'est encore (fig. 29). Voyez également la figure 28.

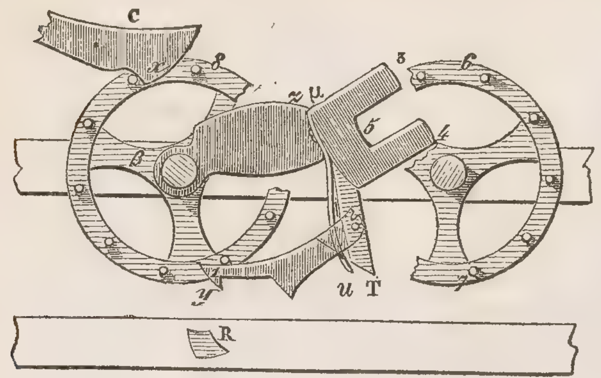


Fig. 27.

Le sautoir (fig. 26) a deux anneaux ou portions de douilles, dans lesquelles passe la portion *fk* et *gl* de l'axe de la roue à chevilles 8, 9; il est mobile sur cette partie d'axe. Le sautoir (fig. 27) a une concavité ou partie échancrée 3, 4, 5; un coude μ, pratiqué pour laisser passer les chevilles attachées à la roue 8, 9; deux anneaux dont on voit un en 6, l'autre est couvert par une portion de la roue 6, 7; en 2, une espèce de coulisse dans laquelle le cliquet 1, 2 est suspendu par le tenon 2, et pressé par un ressort entre les chevilles de la roue 8, 9. Ce ressort est représenté par *zu;* en appuyant sur le talon du cliquet, il pousse son extrémité 1 entre les chevilles de la roue 8, 9.

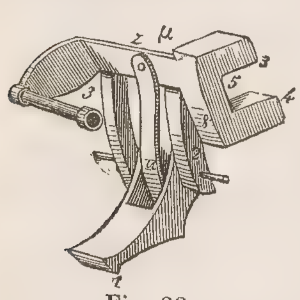


Fig. 28.

On a représenté (fig. 28) le sautoir avec tous ses développemens, pour en faire mieux sentir la figure et le jeu. Comparez cette figure, lettre à lettre, avec la figure 27.

Ce qui précède bien entendu, nous pouvons passer au jeu de la machin. Soit (fig. 26) le cercle mobile 1 Q 2, mû dans la direction 1 Q 2 : la roue à chevilles 4, 5 sera mue, et la roue à chevilles 6, 7; et (fig 29) la roue VIII, IX, car c'est la même que la roue 8, 9 de la figure 26. Cette roue VIII, IX sera mue dans la direction VIII, VIII, IX, IX. La première de ses deux chevilles *r*, *s*, entrera dans l'échancrure du sautoir; le sautoir continuera d'être élevé, à l'aide de la seconde cheville *s*. Dans ce mouvement, l'extrémité 1 du cliquet sera entraînée; et, se trouvant à la hauteur de l'entre-deux de deux chevilles immédiatement supérieur à celui où elle étoit, elle y sera poussée par le ressort. Mais la machine est construite de manière que ce premier échappement n'est pas plus tôt fait, qu'il s'en fait un autre, celui de la seconde cheville *s*, de dessous la partie 3, 4 du sautoir : ce second échappement laisse le sautoir abandonné à lui-même : le poids de sa partie 4 5 6 7 fait agir l'extrémité 1

du cliquet contre la cheville de la roue 6, 7, sur laquelle elle vient de s'appuyer par le premier échappement; fait tourner la roue 8, 9 dans le

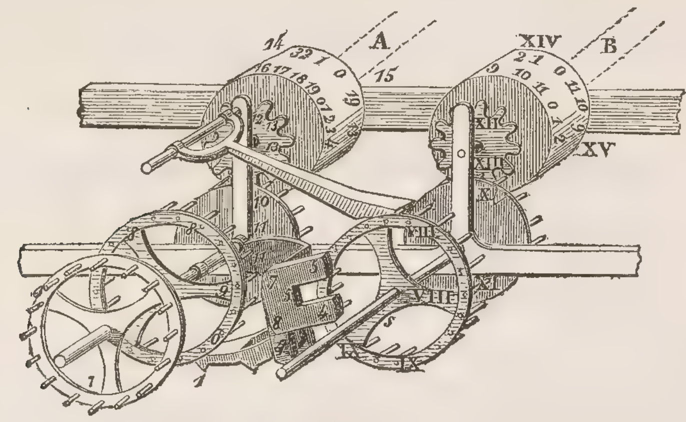


Fig. 29.

sens 8, 8, 9, 9 et par conséquent aussi dans même sens la roue 10, 11, 11, et la roue 12, 13, 13, en sens contraire, ou dans la direction 13, 13, 12; et dans le même sens que la roue 12, 13, 13, le barillet 14, 15. Mais telle est encore la construction de la machine, que, quand par le second échappement, celui de la cheville *s* de dessous la partie 3, 4 du sautoir, ce sautoir se trouve abandonné à lui-même, il ne peut descendre et entraîner la roue 8, 9 que d'une certaine quantité déterminée. Quand il est descendu de cette quantité, la partie T (fig. 27) de la coulisse rencontre l'étochio R, qui l'arrête.

Maintenant (I) si l'on suppose, 1° que la roue VIII, IX a douze chevilles, la roue X, XI autant, et la roue XII, XIII autant encore; 2° que la roue 8, 9 a vingt chevilles, la roue 10, 11 vingt, et la roue 12, 13 autant; 3° que l'extrémité T du sautoir (fig. 27) rencontre l'étochio R précisément quand la roue 8, 9 (fig. 29) a tourné d'une vingtième partie, il s'ensuivra évidemment que le barillet XIV, XV fera un tour sur lui même, tandis que le barillet 14, 15 ne tournera sur lui-même que de sa vingtième partie.

(II) Si l'on suppose, 1° que la roue VIII, IX a vingt chevilles, la roue X, XI autant, et la roue XII, XIII autant; 2° que la roue 8, 9 ait dix chevillles, la roue 10, 11 autant, et la roue 12, 13 autant; 3° que l'extrémité T du sautoir ne soit arrêtée (fig. 26) par l'étochio R que quand la roue 8, 9 (fig. 29) a tourné d'une dixième partie, il s'ensuivra évidemment que le barillet XIV, XV fera un tour entier sur lui-même, tandis que le barillet 14, 15 ne tournera sur lui-même que de sa dixième partie.

(III) Si l'on suppose, 1° que la roue VIII, IX ait dix chevilles la roue X, XI autant, et la roue XII, XIII autant; 2° que la roue 8, 9 ait pareillement dix chevilles, la roue 10, 11 autant, et la roue XII, XIII autant aussi; 3° que l'extrémité T du sautoir (fig. 27) ne soit arrêtée par l'étochio R que quand la roue 8, 9 (fig. 29) aura tourné d'un dixième, il s'ensuivra évidemment que le barillet XIV, XV fera un tour entier sur lui-même, tandis que le barillet 14, 15 ne tournera sur lui-même que d'un dixième.

On peut donc, en général, établir tel rapport qu'on voudra entre un tour entier du barillet XIV, XV, et la partie dont le barillet 14, 15 tournera dans le même temps.

Donc, si l'on écrit sur le barillet XIV, XV les deux rangées de nombre suivantes, l'une au-dessous de l'autre, comme on le voit :

0, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
11, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

et sur le barillet 14, 15, les deux rangées suivantes, comme on les voit :

0, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10,
19, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18;

et que les zéros des deux rangées inférieures des barillets correspondent exactement aux intervalles A, B, il est clair qu'au bout d'une révolution du barillet XIV, XV, le zéro correspondra encore à l'intervalle B; mais que ce sera le chiffre 1 du barillet 14, 15, qui correspondra dans le même temps à l'intervalle A.

Donc, si l'on écrit sur le barillet XIV, XV les deux rangées suivantes, comme on les voit :

0, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10,
19, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18;

et sur le barillet 14, 15, les deux rangées suivantes, comme on les voit :

0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,
9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;

et que les zéros des deux rangées inférieures des barillets correspondent en même temps aux intervalles A, B, il est clair que dans ce cas, de même que dans le premier, lorsque le zéro du barillet XIV, XV correspondra, après avoir fait un tour, à l'intervalle B, le barillet 14, 15 présentera à l'ouverture ou espace A le chiffre 1.

Il en sera toujours ainsi, quelles que soient les rangées de chiffres que l'on trace sur le barillet XIV, XV, et sur le barillet 14, 15. Dans le premier cas, le barillet XIV, XV tournera sur lui-même, et présentera les douze caractères à l'intervalle B, quand le barillet 14, 15 n'ayant tourné que d'un vingtième, présentera à l'intervalle A le chiffre 1. Dans le second cas, le barillet 14, 15, tournera sur lui-même, et présentera ses vingt caractères à l'ouverture ou intervalle B, pendant que le barillet 14, 15 n'ayant tourné que d'un dixième, présentera à l'ouverture ou intervalle A le chiffre 1. Dans le troisième cas, le barillet XIV, XV tournera sur lui-même, et aura présenté ces dix caractères à l'ouverture B, quand le barillet 14, 15 n'ayant tourné que d'un dixième, présentera à l'ouverture ou intervalle A le chiffre 1.

Mais au lieu de faire toutes ces suppositions sur deux barillets, je peux les faire sur un grand nombre de barillets, tous assemblés les uns avec

les autres, comme on voit ceux de la figure 29. Rien n'empêche de supposer à côté du barillet 14, 15 un autre barillet placé par rapport à lui, comme il est placé par rapport au barillet XIV, XV, avec les mêmes roues, un sautoir et tout le reste de l'assemblage : rien n'empêche que je ne puisse supposer douze chevilles à la roue VIII, IX, et deux rangées

0, 11, 10, 9, etc.,
11, 0, 1, 2, etc.,

tracées sur le barillet XIV, XV; vingt chevilles à la roue 8, 9, et les deux rangées

0, 19, 18, 17, 16, etc.,
19, 0, 1, 2, 3, etc.,

tracées sur le barillet 14, 15; dix chevilles à la première, pareille à la roue 8, 9, et les deux rangées

0, 9, 8, 7, 6, etc.,
9, 0, 1, 2, 3, etc.,

sur le troisième barillet; dix chevilles à la seconde, pareille de 8, 9, et les deux rangées

0, 9, 8, 7, 6, etc.,
9, 0, 1, 2, 3, etc.,

sur le quatrième barillet; dix chevilles à la troisième, pareille de 8, 9, et les deux rangées

0, 9, 8, 7, 6, etc.,
9, 0, 1, 2, 3, etc.,

sur le cinquième barillet; et ainsi de suite.

Rien n'empêche non plus de supposer que, tandis que le premier barillet présentera ses douze chiffres à son ouverture, le second ne présentera plus que le chiffre 1 à la sienne; que, tandis que le second barillet présentera ses vingt chiffres à son ouverture ou intervalle, le troisième ne présentera que le chiffre 1; que, tandis que le troisième barillet présentera ses dix caractères à son ouverture, le quatrième n'y présentera que le chiffre 1; que, tandis que le quatrième barillet présentera ses dix caractères à son ouverture, le cinquième ne présentera à la sienne que le chiffre 1, et ainsi de suite.

D'où il s'ensuivra, 1° qu'il n'y aura aucun nombre qu'on ne puisse écrire avec ces barillets; car, après les deux échappemens, chaque équipage de barillet demeure isolé, est indépendant de celui qui le précède du côté de la droite, peut tourner sur lui-même tant qu'on voudra dans la direction VIII, VIII, IX, IX, et par conséquent offrir à son ouverture celui des chiffres de sa rangée inférieure qu'on jugera à propos; mais les intervalles A, B sont aux cylindres nus XIV, XV, 14, 15, ce que leur sont les ouvertures de la ligne YZ (fig. 24), quand ils sont couverts de la plaque NORP;

2° Que le premier barillet marquera des deniers, le second des sous, le troisième des unités de livres, le quatrième des dizaines, le cinquième des centaines, etc.;

3° Qu'il faut un tour du premier barillet pour un vingtième du second; un tour du second pour un dixième du troisième; un tour du troisième

pour un dixième du quatrième; et que par conséquent les barillets suivent entre leurs mouvemens la proportion qui règne entre les chiffres de l'arithmétique, quand ils expriment des nombres; que la proportion des chiffres est toujours gardée dans les mouvemens des barillets, quelle que soit la quantité de tours qu'on fasse faire au premier, ou au second, ou au troisième, et que par conséquent, de même qu'on fait les opérations de l'arithmétique avec des chiffres, on peut les faire avec les barillets et les rangées de chiffres qu'ils ont;

4° Que, pour cet effet, il faut commencer par mettre tous les barillets de manière que les zéros de leur rangée inférieure correspondent en même temps aux ouvertures de la bande YZ et de la plaque NORP; car si, tandis que le premier barillet, par exemple, présente 0 à son ouverture, le second présente 4 à la sienne, il est à présumer que le premier barillet a fait déjà quatre tours; ce qui n'est pas vrai;

5° Qu'il est assez indifférent de faire tourner le barillet dans la direction VIII, VIII, IX; que ce mouvement ne dérange rien à l'effet de la machine; mais qu'il ne faut pas qu'ils aient la liberté de rétrograder; et c'est aussi la fonction du cliquet supérieur C de la leur ôter.

Il permet, comme on voit, aux roues de tourner dans le sens VIII, VIII, IX; mais il les empêche de tourner dans le sens contraire;

6° Que les roues ne pouvant tourner que dans la direction VIII, VIII, IX, c'est de la ligne ou rangée de chiffres inférieure des barillets, qu'il faut se servir pour écrire un nombre; par conséquent pour faire l'addition, par conséquent encore pour faire la multiplication; et que, comme les chiffres des rangées sont dans un ordre renversé, la soustraction doit se faire sous la rangée supérieure, et par conséquent aussi la division.

Tous ces corollaires s'éclairciront davantage par l'usage de la machine et la manière de faire les opérations

Mais, avant que de passer aux opérations, nous ferons observer encore une fois que chaque roue 6, 7 (fig. 29) a sa correspondante 4, 5 (fig. 25), et chaque roue 4, 5 son cercle mobile Q; que chaque roue 8, 9 a son cliquet supérieur et son cliquet inférieur; que ces deux cliquets ont une de leurs fonctions commune: c'est d'empêcher les roues VIII, IX, 8, 9, etc., de rétrograder; enfin que le talon 1, pratiqué au cliquet inférieur, lui est essentiel.

Usage de la machine arithmétique pour l'addition.

Commencez par couvrir de la bande PR la rangée supérieure d'ouvertures, en sorte que cette bande soit dans l'état où vous la voyez (fig. 24); mettez ensuite toutes les roues de la bande inférieure ou rangée à zéro; et soient les sommes à ajouter,

$69^{l.}$	$7^{s.}$	$8^{d.}$
584	15	6
342	12	9

Prenez le conducteur; portez sa pointe dans la huitième denture du cercle Q, le plus à la droite; faites tourner ce cercle jusqu'à ce que l'arrêt ou la potence S vous empêche d'avancer.

Passez à la roue des sous ou au cercle Q, qui suit immédiatement celui sur lequel vous avez opéré, en allant de la droite à la gauche; portez la pointe du conducteur dans la septième denture, à compter depuis la potence; faites tourner ce cercle jusqu'à ce que la potence S vous arrête; passez aux livres, aux dizaines, et faites la même opération sur leurs cercles Q.

En vous y prenant ainsi, votre première somme sera évidemment écrite; opérez sur la seconde précisément comme vous avez fait sur la première, sans vous embarrasser des chiffres qui se présentent aux ouvertures, puis sur la troisième. Après votre troisième opération, remarquez les chiffres qui paroîtront aux ouvertures de la ligne YZ : ils marqueront la somme totale de vos trois sommes partielles.

Démonstration. — Il est évident que, si vous faites tourner le cercle Q des deniers de huit parties, vous aurez 8 à l'ouverture correspondante à ce cercle; il est encore évident que, si vous faites tourner le même cercle de six autres parties, comme il est divisé en douze, c'est la même chose que si vous l'aviez fait tourner de douze parties, plus 2; mais, en le faisant tourner de douze, vous auriez remis à zéro le barillet des deniers correspondant à ce cercle de deniers, puisqu'il eût fait un tour exact sur lui-même : il n'a pu faire un tour sur lui-même, que le second barillet, ou celui des sous, n'ait tourné d'un vingtième; et par conséquent mis le chiffre 1 à l'ouverture des sous. Le chiffre des deniers n'a pu rester à 0; car ce n'est pas seulement de douze parties que vous l'avez fait tourner, mais de douze parties plus deux. Vous avez donc fait en sus comme si le barillet des deniers étant à 0, et celui des sous à 1, vous eussiez fait tourner le cercle Q des deniers de deux dentures; mais en faisant tourner le cercle Q des deniers de deux dentures, on met le barillet des deniers à 2, où ce barillet présente 2 à son ouverture. Donc le barillet des deniers offrira 2 à son ouverture, et celui des sous 1; mais 8 deniers et 6 deniers font 14 deniers, ou un sou, plus 2 deniers; ce qu'il falloit en effet ajouter, et ce que la machine a donné. La démonstration sera la même pour tout le reste de l'opération.

Exemple de soustraction.

Commencez par baisser la bande PR sur la ligne YZ d'ouvertures inférieures; écrivez la plus grande somme sur les ouvertures de la ligne supérieure, comme nous l'avons prescrit pour l'addition, par le moyen du conducteur; faites l'addition de la somme à soustraire, ou de la plus petite avec la plus grande, comme nous l'avons prescrit à l'exemple de l'addition; cette addition faite, la soustraction le sera aussi. Les chiffres qui paroîtront aux ouvertures marqueront la différence des deux sommes, ou l'excès de la grande sur la petite; ce que l'on cherchoit.

Soit.	9121 l.	9 s.	2 d.
dont il faut soustraire.	8989	16	11
Si vous exécutez ce que nous avons prescrit, vous trouverez aux ouvertures. . .	**131**	**12**	**3**

Démonstration.—Quand j'écris le nombre 9121 livres 9 sous 2 deniers ; pour faire paroître 2 à l'ouverture des deniers, je suis obligé de faire passer avec le directeur onze dentures du cercle Q des deniers ; car il y a à la rangée supérieure du barillet des deniers onze termes depuis 0 jusqu'à 2 ; si à ce 2 j'ajoute encore 11, je tomberai sur 3 ; car il faut encore que je fasse faire onze dentures au cercle Q ; or, comptant 11 depuis 2, on tombe sur 3. La démonstration est la même pour le reste. Mais remarquez que le barillet des deniers n'a pu tourner de 22, sans que le barillet des sous n'ait tourné d'un vingtième ou de 12 deniers. Et comme à la rangée d'en haut les chiffres vont en rétrogradant dans le sens que les barillets tournent, à chaque tour du barillet des deniers, les chiffres du barillet des sous diminuent d'une unité ; c'est-à-dire que l'emprunt que l'on fait pour un barillet est acquitté sur l'autre, ou que la soustraction s'exécute comme à l'ordinaire.

Exemple de multiplication.

Revenez aux ouvertures inférieures ; faites remonter la bande PR sur les ouvertures supérieures ; mettez toutes les roues à zéro, par le moyen du conducteur, comme nous avons dit plus haut. Ou le multiplicateur n'a qu'un caractère, ou il en a plusieurs ; s'il n'a qu'un caractère, on écrit, comme pour l'addition, autant de fois le multiplicande qu'il y a d'unités dans ce chiffre du multiplicateur ; ainsi la somme de 1245 livres étant à multiplier par 3, j'écris ou pose trois fois cette somme à l'aide de mes roues et des cercles Q ; après la dernière fois, il paroît aux ouvertures 3735 livres qui est en effet le produit de 1245 livres par 3.

Si le multiplicateur a plusieurs caractères, il faut multiplier tous les chiffres du multiplicande par chacun de ceux du multiplicateur, les écrire de la même manière que pour l'addition ; mais il faut réserver au second multiplicateur de prendre pour première roue celle des dizaines.

La multiplication n'étant qu'une espèce d'addition, et cette règle se faisant évidemment ici par voie d'addition, l'opération n'a pas besoin de démonstration.

Exemple de division.

Pour faire la division, il faut se servir des ouvertures supérieures : faites donc descendre la bande PR sur les inférieures ; mettez à 0 toutes les roues fixées sur cette bande, et qu'on appelle *roues de quotient ;* faites paroître aux ouvertures votre nombre à diviser, et opérez comme nous allons dire. Soit la somme 65 à diviser par 5 ; vous dites, en 6, 5 y est, et vous ferez tourner votre roue comme si vous vouliez additionner 5 et 6 ; cela fait, les chiffres des roues supérieures allant toujours en rétrogradant, il est évident qu'il ne paroîtra plus que 1 à l'ouverture où il paroissoit 6 ; car dans 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 ; 1 est le cinquième terme après 6.

Mais le diviseur 5 n'est plus que dans 1 ; marquez donc 1 sur la roue des quotiens, qui répond à l'ouverture des dizaines ; passez ensuite à

l'ouverture des unités, ôtez-en 5 autant de fois qu'il sera possible, en ajoutant 5 au caractère qui paroît à travers cette ouverture, jusqu'à ce qu'il vienne à cette ouverture, ou 0, ou un nombre plus petit que 5, et qu'il n'y ait que des zéros aux ouvertures qui précèdent : à chaque addition, faites passer l'aiguille de la roue des quotiens qui est au-dessous de l'ouverture des unités, du chiffre 1 sur le chiffre 2, sur le chiffre 3, en un mot sur un chiffre qui ait autant d'unités que vous ferez de soustractions; ici, après avoir ôté trois fois 5 du chiffre qui paroissoit à l'ouverture des unités, il est venu 0 : donc 5 est treize fois en 65.

Il faut observer qu'en ôtant ici une fois 5 du chiffre qui paroît aux unités, il vient tout de suite 0 à cette ouverture; mais que pour cela l'opération n'est pas achevée, parce qu'il reste une unité à l'ouverture des dizaines, qui fait, avec le 0 qui suit, 10, qu'il faut épuiser; or, il est évident que 5 ôté deux fois de 10, il ne restera plus rien; c'est-à-dire que, pour exhaustion totale, ou que pour avoir 0 à toutes les ouvertures, il faut encore 5 deux fois.

Il ne faut pas oublier que la soustraction se fait exactement comme l'addition, et que la seule différence qu'il y ait, c'est que l'une se fait sur les nombres d'en bas, et l'autre sur les nombres d'en haut.

Mais si le diviseur a plusieurs caractères, voici comment on opérera. Soit 9989 à diviser par 124, on ôtera 1 de 9, chiffre qui paroît à l'ouverture des mille; 2 du chiffre qui paroît à l'ouverture des centaines, 4 du chiffre qui paroîtra à l'ouverture des dizaines; et l'on mettra l'aiguille des cercles de quotient, qui répond à l'ouverture des dizaines, sur le chiffre 1. Si le diviseur 124 peut s'ôter encore une fois de ce qui paroîtra, après la première soustraction, aux ouvertures des mille, des centaines et des dizaines, on l'ôtera, et on tournera l'aiguille du même cercle de quotient sur 2, et on continuera jusqu'à l'exhaustion la plus complète qu'il sera possible : pour cet effet, il faudra réitérer ici la soustraction huit fois sur les trois mêmes ouvertures; l'aiguille du cercle du quotient qui répond aux dizaines sera donc sur 8, et il ne se trouvera plus aux ouvertures que 69, qui ne peut plus se diviser par 124; on mettra donc l'aiguille du cercle de quotient, qui répond à l'ouverture des unités, sur 9 : ce qui marquera que, 124 ôté 80 fois de 9989, il reste ensuite 69.

Manière de réduire les livres en sous, et les sous en deniers.

Réduire les livres en sous, c'est multiplier par 20 les livres données, et réduire les sous en deniers, c'est multiplier par 12. Voy. *Multiplication.*

Convertir les sous en livres et les deniers en sous, c'est diviser dans le premier cas par 20, et dans le second par 12. Voy. *Division.*

Convertir les deniers en livres, c'est diviser par 240. Voy. *Division.*

Il parut en 1725 une autre machine arithmétique d'une composition plus simple que celle de M. Pascal, et que celles qu'on avoit déjà faites à l'imitation : elle est de M. de L'Épine; et l'Académie des sciences a jugé qu'elle contenoit plusieurs choses nouvelles et ingénieusement

pensées. On la trouvera dans le *Recueil des machines* approuvées par cette académie; on y en verra encore une autre de M. de Boitissendeau, dont l'Académie fait aussi l'éloge. Le principe de ces machines une fois connu, il y a peu de mérite à les varier; mais il falloit trouver ce principe; il falloit s'apercevoir que si l'on fait tourner verticalement de droite à gauche un barillet chargé de deux suites de nombres placées l'une au-dessous de l'autre en cette sorte :

0, 9, 8, 7, 6, etc.,
9, 0, 1, 2, 3, etc.,

l'addition se faisoit sur la rangée supérieure, et la soustraction sur l'inférieure, précisément de la même manière [1].

LETTRE

DE PASCAL ET ROBERVAL A FERMAT,

Sur un principe de géostatique mis en avant par ce dernier.

Monsieur,

Le principe que vous demandez pour la géostatique est que, si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme et de soi sans poids, et qu'étant ainsi disposés, ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais, jusqu'à ce que le milieu de la ligne (qui est le centre de pesanteur des anciens) s'unisse au centre commun des choses pesantes. Ce principe, lequel nous avons considéré il y a longtemps, ainsi qu'il vous a été mandé, paroît d'abord fort plausible : mais quand il est question de principe, vous savez quelles conditions lui sont requises pour être reçu; desquelles conditions, au principe dont il s'agit, la principale manque; savoir, que nous ignorons quelle est la cause radicale qui fait que les corps pesans descendent, et quelle est l'origine de

1. Dans un rapport lu à l'Académie des sciences le 12 février 1849, sur une machine arithmétique imaginée par MM. Maurel et Jayet, M. Binet rappelle en peu de mots les divers instruments du même genre qui ont été proposés à différentes époques. Il consacre à la machine de Pascal les lignes suivantes :

« Blaise Pascal fit construire, de 1642 à 1645, une véritable machine à calculer, qui devint un sujet d'admiration pour ses contemporains. A cette époque, la mécanique pratique était peu avancée sous le rapport de la précision : se proposer de remplacer, par des mouvements et des combinaisons de pièces matérielles, l'acte des supputations numériques, auquel concourent la mémoire et le jugement, était, certes, une entreprise audacieuse....

« .... Le Conservatoire des arts et métiers possède la machine à laquelle Pascal attribue toutes ces qualités, et dont il a fait lui-même usage. Une petite caisse de laiton de 36 centimètres de longueur, 13 centimètres de largeur et 8 centimètres de hauteur, renferme tout le mécanisme. Grâce à l'obligeance de notre confrère, M. Pouillet, nous avons pu l'étudier, et reconnaître que rien de ce que Pascal énonce ne pouvait être contesté d'une manière

leur pesanteur. Ce qui n'étant point en notre connoissance (comme il faut librement avouer, et en ceci, et quasi en toutes les autres choses physiques), il est évident qu'il nous est impossible de déterminer ce qui arriveroit au centre, où les choses pesantes aspirent, ni aux autres lieux hors la surface de la terre, sur laquelle, parce que nous y habitons, nous avons quelques expériences assez constantes, desquelles nous tirons ces principes en vertu desquels nous raisonnons en la mécanique.

La diversité des opinions touchant l'origine de la pesanteur des corps. desquelles aucune n'a été jusqu'ici, ni démontrée, ni convaincue de fausseté par démonstration, est un ample témoignage de l'ignorance humaine en ce point.

La commune opinion est, que la pesanteur est une qualité qui réside dans le corps même qui tombe. D'autres sont d'avis que la descente des corps procède de l'attraction d'un autre corps qui attire celui qui descend, comme le globe de la terre paroît attirer une pierre qui tombe. Il y a une troisième opinion qui n'est pas hors de vraisemblance; que c'est une attraction mutuelle entre les corps, causée par un désir naturel que ces corps ont de s'unir ensemble, comme il est évident au fer et à l'aimant, lesquels sont tels, que si l'aimant est arrêté, le fer ne l'étant pas, ira le trouver; et si le fer est arrêté, l'aimant ira vers lui; et si tous deux sont libres, ils s'approcheront réciproquement l'un de l'autre; en sorte toutefois que le plus fort des deux fera le moins de chemin.

Or, de ces trois causes possibles de la pesanteur ou des centres des corps, les conséquences sont fort différentes, particulièrement de la première et des deux autres, comme nous ferons voir en les examinant.

Car si la première est vraie, le sens commun nous dicte qu'en quelque lieu que soit un corps pesant, près ou loin du centre de la terre, il pèsera toujours également, ayant toujours en soi la même qualité qui le fait peser, et en même degré. Le sens commun nous dicte aussi (posée cette même opinion première) qu'alors un corps reposera au centre commun des choses pesantes, quand les parties du corps qui seront de part et d'autre du même centre, seront d'égale pesanteur, pour contre-

absolue; néanmoins la question de savoir si l'instrument aide réellement le calculateur, abrége son travail en donnant, avec sûreté, les résultats attendus, subsiste tout entière. La lenteur de sa marche est manifeste; et l'imparfaite exécution de ses engrenages à chevilles ne permet guère de compter sur son exactitude. Elle fut cependant le fruit de longues recherches: plus de cinquante essais d'instruments de formes diverses entraînèrent l'auteur à des dépenses considérables. Plusieurs mécaniciens et géomètres ont tenté de perfectionner cette invention, et parmi eux on cite Leibnitz comme s'étant souvent livré à ce genre de recherches. Tous ces efforts du génie mécanique n'ont pourtant abouti, après un siècle, qu'à cette conclusion énoncée par Bossut : « La machine de Pascal est aujourd'hui peu connue et nullement en usage. »

Les progrès accomplis depuis un petit nombre d'années par les arts mécaniques ont permis de réaliser des machines arithmétiques bien plus commodes et plus précises que n'étaient ces premiers essais. Il serait trop long de les énumérer ici. Le lecteur en trouvera une nomenclature complète dans une curieuse notice publiée par M. Th. Olivier à l'occasion d'une machine à calculer de M. Roth.

peser l'une à l'autre, sans considérer si elles sont peu ou beaucoup, également ou inégalement éloignées du centre commun.

Si cette première opinion est véritable, nous ne voyons point que le principe que vous demandez pour la géostatique puisse subsister. Car soient deux poids égaux A, B (fig. 30), joints ensemble par la ligne droite ferme et de soi sans poids AB; soit C le point du milieu de la même ligne AB; et soient D, E, deux autres points tels quels dans ladite ligne entre les poids A et B. Vous demandez qu'on vous accorde que les poids A, B tombant librement avec leur ligne, ne reposeront point jusqu'à ce que le point du milieu C s'unisse au centre commun des choses pesantes. Suivant cette première opinion, nous accordons que, si le point C est uni au centre des choses pesantes, le composé des poids A, B demeurera immobile véritablement. Mais il nous semble aussi que si le point D ou E convient avec le même centre commun des choses pesantes, combien que l'un des poids en soit plus proche que l'autre, ils contre-pèseront encore et demeureront en équilibre; puisque (pour nous servir de vos propres termes) ces deux poids sont égaux, et ont tous deux même inclination de s'unir au même centre commun des choses pesantes, et l'un n'a aucun avantage sur l'autre pour le déplacer de son lieu. Et il ne sert de rien d'alléguer le centre de pesanteur du corps AB, lequel centre, selon les anciens, est au milieu C; car il n'a pas été démontré que le point C soit le centre de pesanteur du composé A, B, sinon lorsque la descente des corps se fait naturellement par des lignes parallèles; ce qui est contre vos suppositions et les nôtres, et contre la vérité : et même nous ne voyons pas qu'aucun corps, hormis la sphère, ait un centre de pesanteur, posée la définition de ce centre selon Pappus et les auteurs; et quand il y en auroit un en chaque corps, il ne paroît pas (et n'a jamais été démontré) que ce seroit ce point-là par lequel le corps s'uniroit au centre des choses pesantes : même cela, pour les raisons précédentes, répugne à notre commune connoissance en plusieurs figures, comme en la seconde des deux figures suivantes. En tout cas, nous ne voyons point que ce centre de pesanteur des anciens doive être considéré autre part qu'aux poids qui sont pendus ou soutenus hors du lieu auquel ils aspirent.

Fig. 30.

Quant à la comparaison qui vous a été faite d'un levier horizontal, lequel, étant pressé horizontalement aux deux bouts par deux forces ou puissances égales, demeure en l'état qu'il est : elle vous semble entièrement pareille au levier précédent AB (puisque vous voulez l'appeler ainsi), d'autant que ces poids ne pressent le levier que par la force ou puissance qu'ils ont de se porter vers leur centre commun. Comme si le levier horizontal est AB (fig. 31), et les forces ou puissances égales A et B pressant horizontalement le levier pour se porter à un certain point commun C, auquel elles aspirent, et lequel est posé également ou inégalement entre les mêmes puissances dans la ligne AB : ces forces pressant également le levier, se résisteront l'une à l'autre, selon notre

sens; encore même que l'une, comme A, fût plus proche que l'autre du point commun auquel toutes deux aspirent. Et quand le levier ne seroit pas horizontal, mais en telle autre position que l'on voudra, étant considéré de soi sans poids, et toutes les autres choses comme auparavant, le même effet s'ensuivra, selon notre jugement.

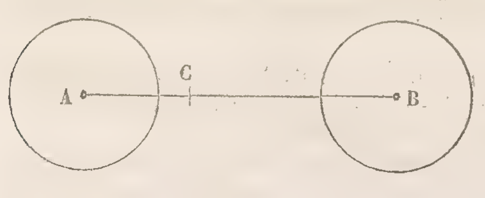


Fig. 31.

Nous ajouterons ici ce que nous pensons, suivant cette première opinion, de deux poids qui seroient inegaux, joints comme dessus à une ligne droite ferme et de soi sans poids.

Soient donc deux poids inégaux A et B (fig. 32), desquels A soit le moindre; et soit AB la ligne ferme qui les joint, dans laquelle le point C soit le centre de pesanteur du composé des corps A, B, selon les anciens : ce point C ne sera pas au milieu de la ligne AB. Si donc on met le composé des poids A, B, de sorte que le point C convienne au centre commun des choses pesantes, nous ne pouvons croire que ce composé demeurera en cet état, le poids A étant entièrement d'une part du centre des choses pesantes, et le poids B entièrement de l'autre part. Mais il nous semble que le plus grand poids B doit s'approcher du même centre des choses pesantes, jusqu'à ce qu'une partie dudit poids B soit au delà dudit centre vers A comme la partie D, en sorte que cette partie D avec tout le poids A étant d'une même part, soit de même pesanteur que la partie E restant de l'autre part.

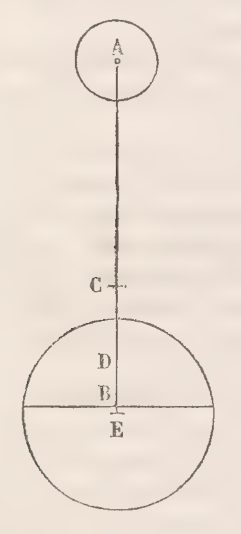


Fig. 32.

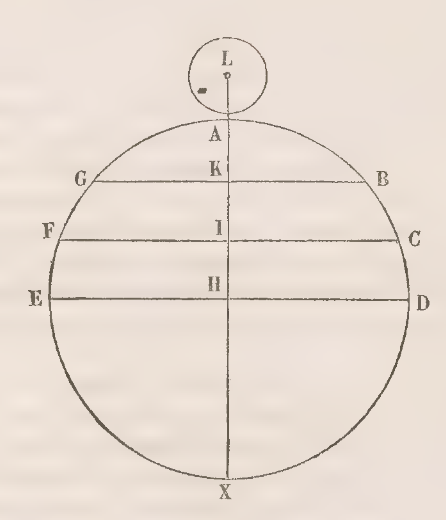


Fig. 33.

Si la seconde opinion touchant la cause de la descente des poids est véritable, voici les conséquences qu'on peut en tirer, selon notre jugement.

Soit le corps attirant ADXE sphérique, duquel le centre soit H (fig. 33);

et que la vertu d'attraction soit également répandue par toutes les parties du même corps, en sorte que chacune, selon sa puissance, tire à soi le corps attiré, ainsi que supposent les auteurs de cette opinion.

Sur cette position, le sens commun nous dicte que les distances et autres conditions étant pareilles, les parties égales du corps attirant attireront également, et les inégales, inégalement.

Soit donc le corps attiré L considéré, premièrement, hors le corps attirant en A; soit menée la ligne droite AH, à laquelle soit un plan perpendiculaire EHD, coupant le corps ADXE en deux parties égales, et partant d'égale vertu. Soient aussi dans la ligne AH pris tant de points que l'on voudra, comme K, I, par lesquels soient menés des plans FIC, GKB parallèles au plan EHD, coupant le corps attirant ADXE en parties inégales, et partant d'inégale vertu; alors le corps L étant en A, sera attiré vers H par la vertu entière de tout le corps ADXE; et le chemin étant libre, il viendra en K, où étant, il sera attiré vers H par la plus grande et forte partie BDXEG, et contre-tiré vers A par la plus petite et plus foible partie BAG. Il en sera de même quand il sera parvenu en I, où il sera moins attiré que quand il étoit en K ou en A; toutefois il sera toujours contraint de s'approcher du centre H, tant qu'il y soit venu : mais la partie qui attire diminuant toujours, et celle qui contre-tire s'augmentant toujours, il sera continuellement attiré avec moins de vertu, jusqu'à ce qu'étant arrivé en H, il sera également attiré de toutes parts, et demeurera en cet état.

Si cette proposition est vraie, il est facile de voir que le corps L pèsera d'autant moins, qu'il sera plus proche du centre H; mais cette diminution ne sera pas en la raison des lignes HA, HK, HI; ce que vous connoîtrez en le considérant sans autre explication.

Si la troisième opinion de la descente des corps est véritable, les conclusions que l'on peut en tirer sont les mêmes, ou fort approchant de celles que nous avons tirées de la seconde opinion.

Puis donc que de ces trois causes possibles de la pesanteur nous ne savons quelle est la vraie, et que même nous ne sommes pas assurés que ce soit l'une d'elles, pouvant se faire que la vraie cause soit composée des deux autres, ou que c'en soit une tout autre, de laquelle on tireroit des conséquences toutes différentes, il nous semble que nous ne pouvons poser d'autres principes pour raisonner en cette matière, que ceux desquels l'expérience, assistée d'un bon jugement, nous a rendus certains.

Pour ces considérations, dans nos conférences de mécanique, nous appelons des *poids égaux* ou *inégaux*, ceux qui ont égale ou inégale puissance de se porter vers le centre commun des choses pesantes; et nous entendons un même corps avoir un même poids, quand il a toujours cette même puissance : que si cette puissance augmente ou diminue, alors, quoique ce soit le même corps, nous ne le considérons plus comme le même poids. Or, que cela arrive ou non aux corps qui s'éloignent ou s'approchent du centre commun des choses pesantes, c'est chose que nous désirerions bien de savoir : mais ne trouvant rien qui

nous satisfasse sur ce sujet, nous laissons cette question indécise, raisonnant seulement sur ce que les anciens et nous avons pu découvrir de vrai jusqu'à maintenant.

Voilà ce que nous avions à vous dire pour le présent touchant votre principe de la géostatique, laissant à part beaucoup d'autres doutes, pour éviter la prolixité du discours.

Quant à la nouvelle proportion des angles que vous mettez en avant, afin de la démontrer, vous supposez deux principes, desquels le premier est vrai : mais le second est si éloigné d'être vrai, qu'il y a des cas où il arrive tout le contraire de ce que vous demandez qu'on vous accorde pour vrai.

Le premier est tel. Soit A (fig. 34) le centre commun des choses pesantes; l'appui du levier, N; du centre A intervalle AN, soit décrite une portion de circonférence telle quelle CNB, pourvu que l'arc CN soit égal à l'arc NB; et soit considérée la circonférence CNB, comme une balance ou un levier de soi sans poids, qui se remue librement à l'entour de l'appui N; soient aussi des poids égaux posés en C et B. Vous supposez que ces poids feront équilibre étant balancés sur le point N. Et il semble que tacitement vous supposez encore l'équilibre quand les bras du levier NC et NB seroient des lignes droites (fig. 35), pourvu que les extrémités C et B soient également éloignées du centre A, et les lignes NC et NB, sous-tendantes ou cordes en effet ou en puissance d'arcs égaux NC, NB.

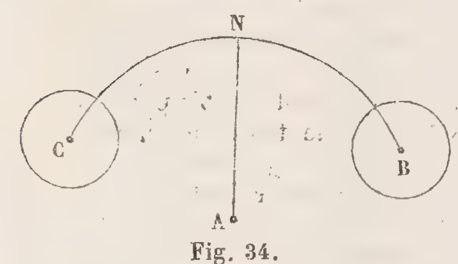


Fig. 34.

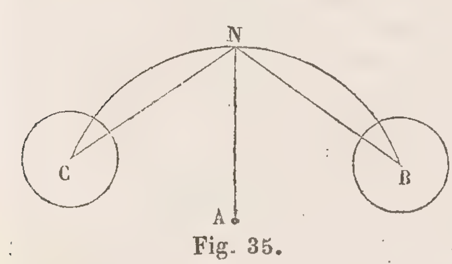


Fig. 35.

Toutes ces choses sont vraies en général; mais nous ne les croyons telles que pour les avoir démontrées par des principes qui nous sont plus clairs et plus connus.

Toutefois en particulier il y a une distinction à faire, laquelle est de grande considération; savoir, que quand les arcs NC et NB sont chacun moindres qu'un quart de circonférence, le levier CNB, chargé des poids C et B, pèse sur l'appui N, poussant vers le centre A pour s'en approcher. Mais quand les arcs CN, NB font chacun un quart de circonférence, le levier CNB (fig. 36), chargé des poids C, B, ne pèse nullement sur l'appui N, d'autant que les poids sont diamétralement opposés; et partant le levier demeurera de même sans appui

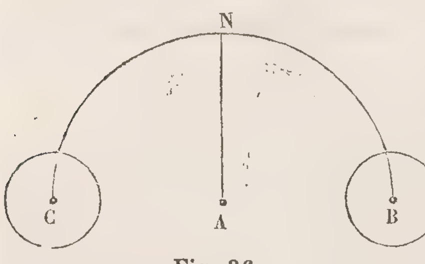


Fig. 36.

qu'avec en appui. Finalement, quand les arcs égaux NC, NB sont chacun plus grands qu'un quart de circonférence (fig. 37), le levier CNB, chargé des poids égaux C, B, pèse sur l'appui N poussant vers P, pour s'éloigner du centre A.

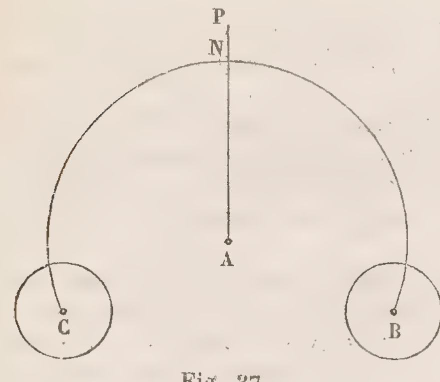


Fig. 37.

Cette distinction étant vraie comme elle est, votre second principe ne peut subsister; ce qui paroîtra assez par l'examen d'icelui.

Votre second principe est tel. Soient A le centre commun des choses pesantes; la balance ou le levier, EFBCD (fig. 38), dont l'appui est D. Soit posé un poids comme B, tout entier au point B pesant de toute sa puissance sur l'appui B Ou bien soit divisé le poids B en parties égales E, F, B, C, D, lesquelles soient posées sur le levier aux points E, F, B, C, D, étant les arcs EF, FB, BC, CD égaux, et tout l'arc EFBCD décrit alentour du centre A. Vous supposez que le poids B, mis tout entier au point B, pèsera de même sur l'appui B, qu'étant posé, par parties égales, aux points E, F, B, C, D. Cela est tellement éloigné du vrai, que quelquefois le poids B, ainsi posé par parties sur le levier, ne pèsera plus du tout sur l'appui B, quelquefois, au lieu de peser sur l'appui B pour tirer le levier vers A, il pèsera tout au contraire sur le même appui B, pour éloigner le levier de A. Et toutefois, étant ramassé tout entier au point B, il pèsera toujours de toute sa force sur l'appui B, pour emporter le levier vers A. Et généralement, étant divisé et étendu, il pèsera toujours moins sur l'appui, qu'étant ramassé au point B, et vous supposez qu'entier et divisé, il pèse toujours de même.

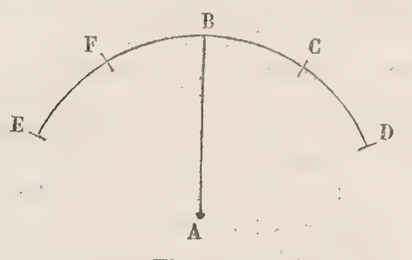


Fig. 38.

Toutes ces choses sont démontrées ensuite de nos principes, et nous vous en expliquerons les principaux cas, que vous connoîtrez véritables sans aucune démonstration.

Soit derechef A (fig. 39) le centre commun des choses pesantes, alentour duquel soit décrit le levier CBD qui soit de soi sans poids, prolongé tant que de besoin : et soit B le point de l'appui, auquel si un poids est posé, nous demeurons d'accord avec vous qu'il pèsera de toute sa puissance sur l'appui B, lequel appui, s'il n'est assez fort, rompra, et le poids s'en ira avec son levier jusqu'au centre A. Maintenant soit divisé le poids, premièrement, en deux parties égales : et ayant pris les arcs BC et CD chacun d'un quart de circonférence, afin que tout l'arc CBD

soit une demi-circonférence, soit posée une moitié du poids en D, l'autre en C, alors ces deux poids C et D pesant vers A, ne feront point d'autre effet sur le levier CBD, sinon qu'ils le presseront également par les deux extrémités C et D pour le courber. Supposant donc qu'il est assez roide pour ne pas plier, ils demeureront sur le levier de même que s'ils étoient attachés aux bouts du diamètre DAC, sans qu'il soit besoin de l'appui B, sur lequel le levier chargé de ces deux poids ne fait aucun effort : et quand cet appui sera ôté, le tout demeurera de même qu'avec l'appui, ce qui est assez clair.

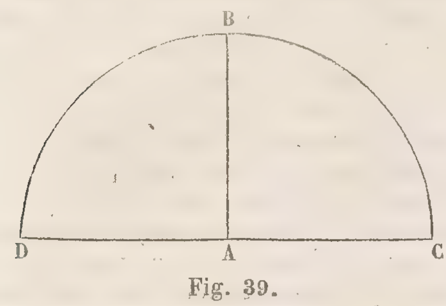


Fig. 39.

Que si le poids est divisé en plus de deux parties égales, et qu'étant étendu sur des portions égales du levier, deux d'icelles parties se rencontrent aux points C, D, et les autres dans l'espace CBD, alors celles qui seront en C et D ne chargeront point l'appui B. Quant aux autres, elles le chargeront, mais d'autant moins que plus elles approcheront des points C, D, auxquels finit la charge. Ainsi il s'en faudra beaucoup que toutes ensemble étendues chargent autant l'appui que lorsqu'elles sont ramassées en B : elles ne pèsent donc pas de même.

Davantage soient pris les arcs égaux BC et BD (fig. 40) chacun plus grand qu'un quart de circonférence, et soit imaginée la ligne droite CD; puis étant divisé le poids en deux parties égales seulement, soient attachées l'une en C, et l'autre en D : alors Il est clair que le levier chargé des poids C, D, pèsera sur l'appui B; mais ce sera tout au contraire que si les deux poids étoient ramassés en B : car si l'appui n'est pas assez fort, il rompra, et les poids emportant le levier, que nous supposons être de soi sans poids, ne cesseront de se mouvoir tant que la ligne droite CD soit venue au point A, le levier étant monté en partie au-dessus de B vers P, au lieu de s'abaisser vers A, comme il arriveroit si les poids, étant ramassés en B, avoient rompu l'appui. Voyez quelle différence !

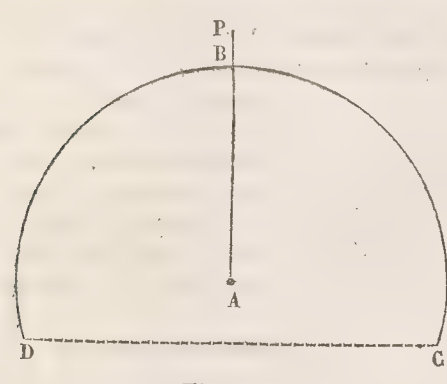


Fig. 40.

Enfin soit le levier comme auparavant, auquel soient des quarts de circonférence BC, BD (fig. 41); et de part et d'autre du point C, soient pris des arcs égaux CG, CE, chacun moindre qu'un quart. De même de part et d'autre du point D soient pris les arcs égaux entre eux et aux précédens DH, DF, tous commensurables au quart. Soit aussi divisé tout l'arc EBF en tant de parties égales que l'on voudra, en sorte que

les points E, C, G, B, H, D, F soient du nombre de ceux qui font la division ; et soit divisé le poids en autant de parties égales que l'arc EBF, lesquelles parties de poids soient posées sur les parties de la division du levier Alors les poids qui se trouveront posés sur les arcs EC et FD, déchargeront autant l'appui B, qu'il étoit chargé par ceux des arcs CG, DH : partant tous ceux qui seront sur les arcs EG et FH ne chargeront point l'appui B, lequel, par ce moyen, ne sera chargé que par ceux qui seront sur l'arc GBH ; et si entre BG et BH il n'y a aucun poids (ce qui arrivera quand les arcs BG et BH ne feront chacun qu'une partie de la susdite division du levier), alors l'appui B sera entièrement déchargé. Voyez donc combien il y a de différence entre les poids ramassés en B, et étendus par parties sur le levier EBF ; voyez aussi qu'un même poids divisé par parties et étendu sur le levier, pèse d'autant moins sur l'appui B, que plus grande est la portion qu'il occupe de la circonférence décrite alentour du point A, centre commun des choses pesantes.

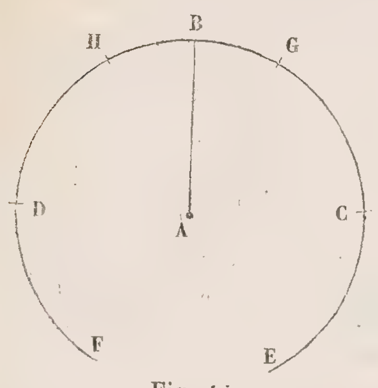


Fig. 41.

Cette dernière considération pourroit bien être cause qu'un même corps pèseroit moins, plus proche que plus éloigné du centre commun des choses pesantes : mais la proportion de ces pesanteurs ne seroit nullement pareille à celle des distances, et seroit peut-être très-difficile à examiner.

Maintenant, pour venir à votre démonstration, soit le levier GIR (fig. 42) duquel l'appui soit I, et que les extrémités G, R et l'appui I soient également éloignés de A, centre commun des choses pesantes, alentour duquel soit imaginée la portion de circonférence GIR ; soit fait que, comme l'arc GI est à l'arc IR, ainsi le poids R soit au poids G. Vous dites que le levier chargé des poids G, R, demeurera en équilibre sur son appui I. Quant à la démonstration, vous supposez qu'elle est facile en conséquence de vos deux principes précédens. Et de fait, si ces principes étoient vrais, il ne resteroit aucune difficulté, et la chose pourroit se conclure ainsi. Soit faite la préparation suivant la méthode d'Archimède, en sorte que les arcs RQ, RM soient égaux, tant entre eux

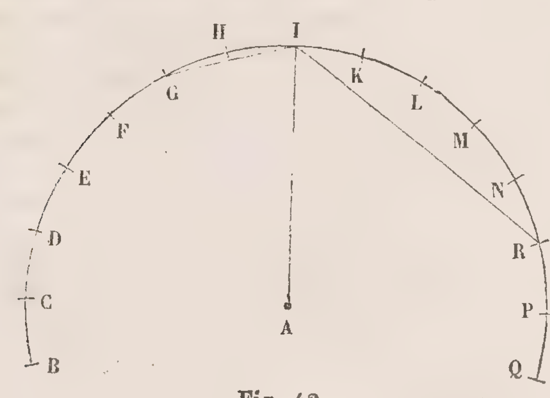


Fig 42.

qu'à l'arc IG; et les arcs GB, GM égaux, tant entre eux qu'à l'arc IR; et soit étendu le poids R également depuis Q jusqu'en M, et le poids G aussi également depuis M jusqu'en B; ainsi les deux poids G, R seront également étendus sur tout l'arc BGIMRQ, lequel arc sera quelquefois moindre que la circonférence entière, quelquefois égal à icelle, et quelquefois plus grand. Et d'autant que les portions IB, IQ sont égales, le levier BGIRQ demeurera en équilibre, par le premier principe, sur l'appui I. Mais le poids G étendu depuis B jusqu'en M pèse de même qu'étant ramassé au point G, par le second principe; et par le même principe, le poids R pèse de même étant étendu depuis M jusqu'en Q, qu'étant ramassé au point R. Partant, puisque ces deux poids, étant ramassés en G et en R, pèsent de même sur le levier qu'étant étendus, et qu'étant étendus ils font équilibre sur le levier, ils feront encore équilibre étant ramassés en G et en R.

En cette démonstration, tout ce qui est fondé sur le second principe reçoit les mêmes difficultés que le principe même; et partant, la conclusion ne s'ensuit point que les poids G, R fassent équilibre sur le levier GIR.

Nous pourrions nous contenter de ce que dessus, croyant que vous serez satisfait: mais nous vous prions de considérer encore deux instances, dont la première est telle.

Au levier GIR (fig. 43) soit l'angle GIR droit, et partant l'arc GIR une demi-circonférence décrite autour de A, centre commun des choses pesantes. Si l'on pose l'arc GI moindre que l'arc IR, par exemple, que GI soit le tiers de IR, et le poids R de vingt livres, il faudroit donc en G soixante livres, selon vous, pour faire équilibre sur le levier GIR appuyé au point I, et toutefois, si vous mettez des poids égaux en G et en R, ils seront diamétralement opposés, et partant, par le principe de la géostatique au cas dudit principe, accordé par vous et par nous, lesdits poids égaux feront encore équilibre, comme s'ils pesoient sur les extrémités du diamètre GR vers le centre A: et quand il y a une fois équilibre, pour peu que l'on augmente ou diminue l'un des poids, l'équilibre se perd. Voyez comme cela peut s'accorder avec votre position.

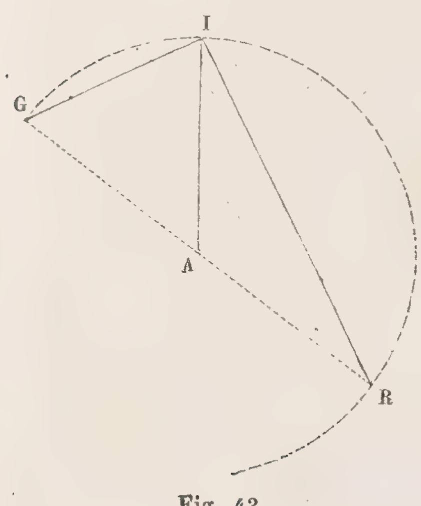


Fig. 43.

La seconde instance est telle. Soit A (fig. 44) le centre commun des choses pesantes, à l'entour duquel soit la circonférence GIR, l'appui du levier I et les bras IG, IR, desquels GI soit le moindre; et soit prolongée la ligne droite IA tant qu'elle rencontre la circonférence en B. Partant, selon vous, il faudra en G un plus grand poids qu'en R.

Et si l'on prend l'arc IC plus grand que IR, mettant en C le même poids qui étoit en R, il faudra en G un plus grand poids qu'auparavant pour faire l'équilibre. De même prenant l'arc ID encore plus grand que IC, et faisant ID être le bras du levier, et mettant en D le même poids qui étoit en C, il faudra encore augmenter le poids G. Ainsi plus le bras du levier qui est en la circonférence IRB aboutira près du point B, étant chargé du même poids, plus il faudra en G un grand poids pour contre-peser. Et selon le sens commun par le raisonnement ordinaire, le bras du levier étant la ligne droite IB chargée comme dessus, il faudroit en G le plus grand poids. Et toutefois alors le poids qui seroit en B, pesant vers A, feroit tout son effort sur la roideur du bras BI, et le moindre poids qui seroit en G feroit balancer le bras IB vers D: et pour peu que le poids qui sera en G fasse balancer le bras IB avec son poids vers D (ce qui est facile à démontrer), alors encore que tant G que B sortent hors la circonférence, on conclura quelque chose de choquant de votre position.

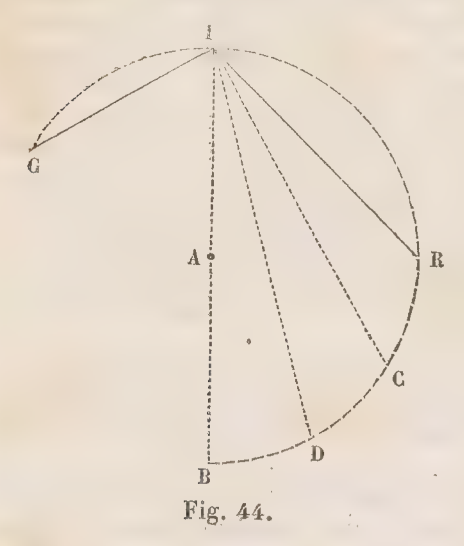


Fig. 44.

Enfin, monsieur, parce que l'expérience de ce que dessus ne peut se faire par les hommes, des poids à l'égard de leur centre naturel; si vous voulez prendre la peine de la faire à l'entour d'un centre artificiel, supposons pour levier un petit cercle artificiel au lieu du grand cercle naturel, et des puissances qui agissent ou aspirent vers le centre du petit cercle, au lieu des poids qui tendent vers le centre du grand: vous trouverez que l'expérience est du tout conforme à ce raisonnement.

Si vous avez agréable de continuer nos communications sur ce sujet ou sur celui de la géométrie, en laquelle nous savons que vous excellez entre tous ceux de ce temps, nous tâcherons à vous donner contentement; et ce que nous vous proposerons ne sera point par forme de questions, car nous en enverrons les démonstrations en même temps pour en avoir votre jugement. Vous nous obligerez aussi de nous faire part de vos pensées. Nous sommes, etc.

A Paris, le 16 août 1636.

CELEBERRIMÆ MATHESEOS

ACADEMIÆ PARISIENSI[1].

Hæc vobis doctissimi et celeberrimi viri, aut dono, aut reddo: vestra enim esse fateor quæ non, nisi inter vos educatus, mea fecissem; propria autem agnosco quæ adeo præcellentibus geometris indigna video. Vobis enim nonnisi magna ac egregia demonstrata placent. Paucis vero genium audax inventionis, paucioribus (ut reor) genium elegans demonstrationis, paucissimis utrumque. Silerem itaque, nihil vobis congruum habens, nisi ea benignitas quæ me a junioribus annis in erudito Lyceo sustinuit, hæc oblata, qualiacunque sint, exciperet.

Horum opusculorum primum, magna ex parte agit de ambitibus, seu peripheriis numerorum quadratorum, cuborum, quadrato quadratorum et in quocunque gradu constitutorum; et ideo *de numericarum potestatum ambitibus* inscribitur.

Secundum circa numeros aliorum multiplices versatur, et ut ex sola additione characterum numericorum agnoscantur methodum tradit.

Deinceps autem, si juvat Deus, prodibunt et alii tractatus quos omnimo paratos habemus, et quorum sequuntur tituli :

De numeris magico magicis; seu methodus ordinandi numeros omnes in quadrato numero contentos, ita ut non solum quadratus totus sit magicus; sed, quod difficilius sane est, ut ablatis singulis ambitibus reliquum semper magicum remaneat, idque omnibus modis possibilibus, nullo omisso.

Promotus Apollonius Gallus; id est tactiones circulares, non solum quales veteribus notæ, et a Vieta repertæ, sed et adeo ulterius promotæ ut vix eundem patiantur titulum.

Tactiones sphæricæ, pari amplitudine dilatæ, quippe eadem methodo tractatæ. Utrarumque autem methodus singula earum problemata per plana resolvens ex singulari conicarum sectionum proprietate oritur, quæ aliis multis difficillimis problematibus succurrit; et vix unicam adimplet paginam.

Tactiones etiam conicæ : ubi ex quinque punctis et quinque rectis datis, quinque quibuslibet, etc.

Loci solidi, cum omnibus casibus et omni ex parte absolutissimi.

Loci plani: non solum illi quos a veteribus tempus abripuit, nec solum illi quos his restitutis perillustris hujus ævi geometra subjunxit, sed et alii huc usque non noti, utrosque complectentes, et multo latius exuberantes, methodo, ut conjicere est, omnino nova, quippe nova præstante, via tamen longe breviori.

Conicorum opus completum, et conica Apollonii et alia innumera unica fere propositione amplectens; quod quidem nondum sexdeci-

1. Cette dédicace était adressée à une réunion de savants qui s'assemblaient régulièrement chez le P. Mersenne. Cette réunion devint plus tard le premier noyau de l'Académie des sciences, qui fut fondée en 1666.

mum ætatis annum assecutus excogitavi, et deinde in ordinem congessi.

Perspectivæ methodus, qua nec inter inventas, nec inter inventu possibiles ulla compendiosior esse videtur; quippe quæ puncta ichnographiæ per duarum solummodo rectarum intersectionem præstet, quo sane nihil brevius esse potest.

Novissima autem ac penitus intentatæ materiæ tractatio, scilicet de *compositione aleæ in ludis ipsi subjectis*, quod gallico nostro idiomate dicitur *faire les partis des jeux* : ubi anceps fortuna æquitate rationis ita reprimitur ut utrique lusorum quod jure competit exacte semper assignetur. Quod quidem eo fortius ratiocinando quærendum, quominus tentando investigari possit : ambigui enim sortis eventus fortuitæ contingentiæ potius quam naturali necessitati merito tribuuntur. Ideo res hactenus erravit incerta; nunc autem quæ experimento rebellis fuerat, rationis dominium effugere non potuit : eam quippe tanta securitate in artem per geometriam reduximus, ut certitudinis ejus particeps facta, jam audacter prodeat; et sic matheseos demonstrationes cum aleæ incertitudine jungendo, et quæ contraria videntur conciliando, ab utraque nominationem suam accipiens stupendum hunc titulum jure sibi arrogat : *aleæ geometria*.

Non de *gnomonia* loquor, nec de innumeris *miscellaneis* quæ satis in promptu habeo; verum nec parata, nec parari digna.

De vacuo quoque subticeo, quippe brevi typis mandandum, et non solum vobis (ut ista) sed et cunctis proditurum: non tamen sine nutu vestro, quem si mereatur, nihil metuendum : quod equidem aliquando alias expertus sum, maxime in instrumento illo arithmetico quod timidus inveneram, et vobis hortantibus exponens, agnovi approbationis vestræ pondus.

Illi sunt geometriæ nostræ maturi fructus : felices et immane lucrum facturi, si hos impertiendo quosdam ex vestris reportemus.

B. PASCAL.

Datum Parisiis, 1654.

PREMIÈRE LETTRE DE PASCAL A FERMAT.

Monsieur,

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous; et quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort, que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre; mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait; car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous. J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés : j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval; mais M. de Méré n'avoit jamais pu trou-

ver la juste valeur des parties, ni de biais pour y arriver : de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion. Votre méthode est très-sûre, et c'est la première qui m'est venue à la pensée dans cette recherche. Mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé, et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrois pouvoir vous dire ici en peu de mots; car je voudrois désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvoit, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris. Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et que chacun a mis 32 pistoles au jeu.

Posons que le premier en ait deux et l'autre une : ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel, que si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles : si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles. Considérez donc, monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie, et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles; car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié, et donnez-moi outre cela mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles, et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties, l'autre point, et qu'ils commencent à jouer une partie : le sort de cette partie est tel, que si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une. Or nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles; donc s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi: « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48. Donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel, que si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie, donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne pas la jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié; de 56 ôtez 32, reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44. »

Or par ce moyen vous voyez par les simples soustractions, que pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde autre 12, et pour la dernière 8.

Or pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert, et que je n'en faisois que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entends la valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de 2 est double de la partie de 3; et quadruple de la dernière partie de 4; et octuple de la dernière partie de 5, etc.

Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser; et voici le problème dont je faisois tant de cas, comme en effet il me plaît fort.

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première.

Soit le nombre des parties donné, par exemple, 8 : prenez les huit premiers nombres pairs et les huit premiers nombres impairs, savoir :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.
et 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Multipliez les nombres pairs en cette sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième, etc. Multipliez les nombres impairs de la même sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, etc. : le dernier produit des pairs est le dénominateur, et le dernier produit des impairs est le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de la première partie de 8, c'est-à-dire que, si on joue chacun le nombre des pistoles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendra sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons, telles que vous les avez imaginées : je n'ai pu le démontrer par cette autre voie que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons; et voici les propositions qui y mènent, qui sont proprement des propositions arithmétiques touchant les combinaisons, dont j'ai d'assez belles propriétés.

Si d'un nombre quelconque de lettres, par exemple, de huit, A, B, C, D, E, F, G, H, vous prenez toutes les combinaisons possibles de quatre lettres; et ensuite toutes les combinaisons possibles de cinq lettres, et puis de six, de sept et de huit, etc.; et qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude, qui est la moitié de la toute, jusqu'au tout : je dis que si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de quatre avec chacune des combinaisons supérieures, la somme sera le nombre tantième de la progression quaternaire; à commencer par le binaire, qui est la moitié de la multitude. Par exemple, et je vous le dirai en latin, car le françois n'y vaut rien :

« Si quotlibet litterarum verbi gratia octo A, B, C, D, E, F, G, H, « sumantur omnes combinationes quaternarii, quinquenarii, sena- « rii, etc., usque ad octonarium : dico, si jungas dimidium combina- « tionis quaternarii, nempe 35 (dimidium 70) cum omnibus combina- « tionibus quinquenarii, nempe 56, plus omnibus combinationibus « senarii, nempe 28, plus omnibus combinationibus septenarii, nempe

« 8, plus omnibus combinationibus octonarii, nempe 1, factum esse « quartum numerum progressionis quaternarii cujus origo est 2 : dico « *quartum numerum*, quia 4 octonarii dimidium est.

« Sunt enim numeri progressionis quaternarii quibus origo est 2, « isti : 2, 8, 32, 128, 512, etc.; quorum 2 primus est, 8 secundus, « 32 tertius, et 128 quartus, cui 128 æquantur + 35, dimidium combi- « nationis 4 litterarum, + 56 combinationis 5 litterarum, + 28 com- « binationis 6 litterarum, + 8 combinationis 7 litterarum, + 1 combi « nationis 8 litterarum. »

Voilà la première proposition, qui est purement arithmétique.

L'autre regarde la doctrine des parties, et est telle. Il faut dire auparavant : Si on a une partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4 : la valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre, est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4, parce qu'il est égal au nombre des parties qui manquent, et 8, parce qu'il est double de 4), et pour dénominateur ce même numérateur, plus toutes les combinaisons supérieures.

Ainsi si j'ai une partie de 5, il m'appartient sur l'argent de mon joueur $\frac{35}{128}$, c'est-à-dire, que s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35, et lui laisse le reste 93. Or, cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là $\frac{105}{384}$, laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur, et la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine. C'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage : je vous envoie néanmoins une de mes vieilles Tables. Je n'ai pas le loisir de la copier, je la referai; vous y verrez comme toujours la valeur de la première partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons.

Vous verrez de même que les nombres de la première ligne augmentent toujours.

Ceux de la seconde, de même

Ceux de la troisième, de même.

Mais ensuite ceux de la quatrième diminuent.

Ceux de la cinquième, etc.

Ce qui est étrange.

Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. de Méré : car il a très-bon esprit, mais il n'est pas géomètre; c'est, comme vous savez, un grand défaut; et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini, et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer; si vous pouviez le faire, on le rendroit parfait. Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison.

Si on entreprend de faire un 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.

Si on entreprend de faire sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.

Et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 à 6, qui est le nombre des faces d'un dé.

Voilà quel étoit son grand scandale, qui lui faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes, et que l'arithmétique se démentoit. Mais vous en verrez bien aisément la raison, par les principes où vous êtes.

e mettrai par ordre tout ce que j'en ai fait, quand j'aurai achevé des Traités géométriques où je travaille il y a déjà quelque temps.

J'en ai fait aussi d'arithmétiques, sur le sujet desquels je vous supplie de me mander votre avis sur cette démonstration.

Je pose le lemme que tout le monde sait, que la somme de tant de nombres qu'on voudra de la progression continuée depuis l'unité, comme 1, 2, 3, 4, étant prise deux fois, est égale au dernier 4, multiplié par le prochainement plus grand 5, c'est-à-dire que la somme des nombres contenus dans A, étant prise deux fois, est égale au produit de A par $A+1$.

Maintenant je viens à ma proposition.

« Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia, unitate « dempta, sextupla est omnium numerorum in minoris radice conten- « torum.

« Sint duæ radices R, S, unitate differentes dico $R^3 - S^3 - 1$ æquari « summæ numerorum in S contentorum; sexies sumptæ. Etenim S vo- « cetur A, ergo R est $A+1$. Igitur cubus radicis R, seu $A+1$, est « $A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3$; cubus verso S seu A est A^3; et horum differentia « est $3A^2 + 3A + 1^3$, id est $R^3 - S^3$. Igitur si auferatur unitas, $3A^2 + 3A$ « æquatur $R^3 - S^3 - 1$. Sed duplum summæ numerorum in A seu S « contentorum æquatur, ex lemmate, A in $A+1$, hoc est $A^2 + A$. Igitur « sextuplum summæ numerorum in A contentorum æquatur $3A^2 + 3A$. « Sed $3A^2 + 3A$ æquatur $R^3 - S^3 - 1$. Igitur $R^3 - S^3 - 1$ æquatur « sextuplo summæ numerorum in A seu S contentorum; quod erat de- « monstrandum. »

On ne m'a pas fait de difficulté là-dessus; mais on m'a dit qu'on ne m'en faisoit pas, par cette raison que tout le monde est accoutumé aujourd'hui à cette méthode : et moi je prétends que sans me faire grâce, on doit admettre cette démonstration comme d'un genre excellent. J'en attends néanmoins votre avis avec toute soumission : tout ce que j'ai démontré en arithmétique est de cette nature. Voici encore deux difficultés.

J'ai démontré une proposition plane, en me servant du cube d'une ligne, comparé au cube d'une autre. Je prétends que cela est purement géométrique, et dans la sévérité la plus grande.

De même j'ai résolu ce problème : *De quatre plans, quatre points et quatre sphères, quatre quelconques étant donnés, trouver une sphère qui, touchant les sphères données, passe par les points donnés, et laisse sur les plans des portions de sphères capables d'angles donnés.* Et celui-ci : *De trois cercles, trois points, trois lignes, trois quelconques étant donnés, trouver un cercle qui, touchant les cercles et les points, laisse sur la ligne un arc capable d'angle donné.*

J'ai résolu ces problèmes pleinement, n'employant dans la construction que des cercles et des lignes droites. Mais dans la démonstration, je me sers des lieux solides, de paraboles ou hyperboles. Je prétends néanmoins, qu'attendu que la construction est plane, ma solution est plane, et doit passer pour telle.

C'est bien mal reconnoître l'honneur que vous me faites de souffrir mes entretiens, que de vous importuner si longtemps : je ne pense jamais vous dire que deux mots, et si je ne vous dis pas ce que j'ai le plus sur le cœur, qui est que plus je vous connois, plus je vous admire et vous honore; et que si vous voyiez à quel point cela est, vous donneriez une place dans votre amitié à celui qui est, monsieur, votre, etc

PASCAL.

Le 29 juillet 1654.

TABLE

DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Si on joue chacun 256, *en*

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
1re Partie.	63	70	80	96	128	256
2e Partie.	63	70	80	96	128	
3e Partie.	56	60	64	64		
4e Partie.	42	40	32			
5e Partie.	24	16				
6e Partie.	8					

Si on joue 256, chacun, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour		6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
	La Ire Partie.	63	70	80	96	128	256
	Les 2 Ires Parties.	126	140	160	192	256	
	Les 3 Ires Parties.	182	200	224	256		
	Les 4 Ires Parties.	224	240	256			
	Les 5 Ires Parties.	248	256				
	Les 6 Ires Parties.	256					

DEUXIÈME LETTRE DE PASCAL A FERMAT.

Monsieur,

Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les partis de plusieurs joueurs, par l'ordinaire passé; et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci, cette admirable convenance qui étoit entre nous, et qui m'étoit si chère, ne commence à se démentir; car je crains que nous ne soyons de différens avis sur ce sujet. Je veux vous ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement; car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que deux joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très-sûre; mais quand il y en a trois, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte, et dont je me sers partout, est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions, et non pas aux autres.

Je suis sûr que je me donnerai à entendre; mais il me faudra un peu de discours, et à vous un peu de patience.

Voici comment vous procédez, quand il y a deux joueurs. Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque

deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties; d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier, et combien pour le second, et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée Donc pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes : cela est aisé à supputer; ils peuvent en avoir 16, qui est le second degré de 4, c'est-à-dire le carré; car figurons-nous qu'une des faces est marquée A, favorable au premier joueur, et l'autre B, favorable au second; donc ces quatres dés peuvent s'asseoir sur une de ces 16 assiettes, aaaa.... bbbb.

a a a a	1
a a a b	1
a a b a	1
a a b b	1
a b a a	1
a b a b	1
a b b a	1
a b b b	2
b a a a	1
b a a b	1
b a b a	1
b a b b	2
b b a a	1
b b a b	2
b b b a	2
b b b b	2

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux A le font gagner; donc il en a 11 pour lui : et parce qu'il manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois B peuvent le faire gagner; donc il y en a 5; donc il faut qu'ils partagent la somme, comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs. Sur quoi vous dites que, s'il y en a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

Sur cela, monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très-juste et très-bon; mais que, s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste, et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos messieurs; sur quoi M. de Roberval me fit cette objection.

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti, sur la supposition qu'on joue en quatre parties; vu que quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou, à la vérité, peut-être quatre; et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte, qu'on jouera quatre parties; vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné; et qu'au moins si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré. De sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Je lui répondis que je ne me fondois pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle véritablement n'est pas en son lieu en cette

occasion, comme sur mon autre méthode universelle à qui rien n'échappe, et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons; et de plus, je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte.

N'est-il pas vrai que si deux joueurs, se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties complètes, c'est-à-dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tout à la fois : n'est-il pas vrai, dis-je, que s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être tel que nous avons dit, suivant la multitude des assiettes favorables à chacun?

Il en demeura d'accord; et cela, en effet, est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât, en ne s'astreignant pas à jouer les quatre parties. Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs n'étant pas astreints à jouer quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent, sans dommage ni avantage, s'astreindre à jouer les quatre parties entières, et que cette convention ne change en aucune manière leur condition? Car si le premier gagne les deux premières parties de quatre, et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné; et s'il les perd, il n'a pas moins gagné; car ces deux que l'autre a gagnées, ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois; et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque?

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'on aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières; donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties comme je l'ai montré; donc il est juste aussi en l'autre cas.

Voilà comment je le démontrai : et si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours; et si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre, et jamais deux n'auront leur compte.

Suivons la même pointe pour trois joueurs, et posons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au second et deux au troisième. Pour faire le parti suivant la même méthode des combinaisons, il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera décidé, comme nous avons fait quand il y avoit deux joueurs: ce sera en trois. Car ils ne sauroient jouer trois parties sans que la décision soit arrivée nécessairement.

Il faut voir maintenant combien trois parties se combinent en trois joueurs; combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre, et combien au dernier; et, suivant cette proportion, distribuer l'argent, de même qu'on a fait en l'hypothèse de deux joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaisons en tout, cela est aisé : c'est la troisième puissance de 3 ; c'est-à-dire son cube 27.

Car si on jette trois dés à la fois (puisqu'il faut jouer trois parties) qui aient chacun trois faces, puisqu'il y a trois joueurs, l'une marquée A favorable au premier, l'autre B pour le second, l'autre C pour le troisième ; il est manifeste que ces trois dés jetés ensemble peuvent s'asseoir sur 27 assiettes différentes, savoir :

a a a	1		
a a b	1		
a a c	1		
a b a	1		
a b b	1	2	
a b c	1		
a c a	1		
a c b	1		
a c c	1		3
b a a	1		
b a b	1	2	
b a c	1		
b b a	1	2	
b b b		2	
b b c		2	
b c a	1		
b c b		2	
b c c			3
c a a	1		
c a b	1		
c a c	1		3
c b a	1		
c b b		2	
c b c			3
c c a	1		3
c c b			3
c c c			3

Or, il ne manque qu'une partie au premier . donc toutes les assiettes où il y a un A sont pour lui ; donc il y en a 19.

Il manque deux parties au second : donc toutes les assiettes où il y a deux B sont pour lui ; donc il y en a 7.

Il manque deux parties au troisième : donc toutes les assiettes où il y a deux C sont pour lui ; donc il y en a 7.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun suivant la proportion de 19, 7, 7, on se tromperoit trop grossièrement, et je n'ai garde de croire que vous le fassiez ainsi : car il y a quelques faces favorables au premier et au second tout ensemble, comme A B B ; car le premier y trouve un A qu'il lui faut, et le second deux B B qui lui manquent : ainsi A C C est pour le premier et le troisième.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui sont communes à deux comme valant la somme entière à chacun, mais seulement la moitié.

Car s'il arrivoit l'assiette A C C, le premier et le troisième auroient même droit à la somme, ayant chacun leur compte ; donc ils partageroient l'argent par la moitié : mais s'il arrive l'assiette A B B, le premier gagne seul ; il faut donc faire la supputation ainsi.

Il y a treize assiettes qui donnent l'entier au premier, et six qui luidonnent la moitié, et huit qui ne lui valent rien.

Donc si la somme entière est 1 pistole :

Il y a treize faces qui lui valent chacune 1 pistole.

Il y a six faces qui lui valent chacune $\frac{1}{2}$ pistole.

Et huit qui ne valent rien.

Donc, en cas de parti, il faut multiplier,

13 par une pistole, qui font.................. 13
6 par une demie, qui font.................. 3
8 par zéro, qui font........................ 0

Somme 27 Somme 16

Et diviser la somme des valeurs 16 par la somme des assiettes 27, qui fait la fraction $\frac{16}{27}$, qui est ce qui appartient au premier en cas de parti; savoir, 16 pistoles de 27.

Le parti du second et du troisième joueur se trouvera de même.

Il y a 4 assiettes, qui lui valent 1 pistole : multipliez........	4
Il y a 3 assiettes, qui lui valent $\frac{1}{2}$ pistole : multipliez.......	1 $\frac{1}{2}$
Et 20 assiettes, qui ne lui valent rien........................	0
Somme 27	Somme 5 $\frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joueur 5 pistoles et $\frac{1}{2}$ sur 27, et autant au troisième; et ces trois sommes 5 $\frac{1}{2}$, 5 $\frac{1}{2}$ et 16 étant jointes, font les 27.

Voilà, ce me semble, de quelle manière il faudroit faire les partis par les combinaisons suivant votre méthode, si ce n'est que vous ayez quelque autre chose sur ce sujet que je ne puis savoir. Mais si je ne me trompe, ce parti est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joue en trois parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu-là est qu'on ne joue que jusqu'à ce qu'un des joueurs ait atteint le nombre des parties qui lui manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joue trois parties, mais il peut arriver aussi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, et rien de nécessité.

Mais d'où vient, dira-t-on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la même supposition feinte que quand il y avoit deux joueurs? En voici la raison :

Dans la condition véritable de ces trois joueurs, il n'y en a qu'un qui peut gagner : car la condition est que dès qu'on a gagné, le jeu cesse; mais en la condition feinte, deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties; savoir, si le premier en gagne une qui lui manque, et un des autres, deux qui lui manquent; car ils n'auront joué que trois parties : au lieu que quand il n'y avoit que deux joueurs, la condition feinte et la véritable convenoient pour l'avantage des joueurs en tout, et c'est ce qui met l'extrême différence entre la condition feinte et la véritable.

Que si les joueurs se trouvant en l'état de l'hypothèse, c'est-à-dire s'il manque une partie au premier, deux au second et deux au troisième, veulent maintenant, de gré à gré, et conviennent de cette condition, qu'on jouera trois parties complètes, et que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque, prendront la somme entière (s'ils se trouvent seuls qui l'aient atteint), ou s'il se trouve que deux l'aient atteint, qu'ils la partageront également : en ce cas, le parti doit se faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16, le second 5 $\frac{1}{2}$, le troisième 5 $\frac{1}{2}$ de 27 pistoles; et cela porte sa démonstration de soi-même, en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils jouent simplement à condition, non pas qu'on joue nécessairement trois parties, mais seulement jusqu'à ce que l'un d'entre eux ait atteint ses parties, et qu'alors le jeu cesse, sans donner moyen à un autre d'y arriver, alors il appartient au premier 17 pistoles, au second 5, au troisième 5, de 27.

Et cela se trouve par ma méthode générale, qui détermine aussi qu'en la condition précédente il en faut 16 au premier, 5 $\frac{1}{2}$ au second, et 5 $\frac{1}{2}$ au troisième, sans se servir des combinaisons; car elle va partout seule et sans obstacle.

Voilà, monsieur, mes pensées sur ce sujet, sur lequel je n'ai d'autre avantage sur vous que celui d'y avoir beaucoup plus médité. Mais c'est peu de chose à votre égard, puisque vos premières vues sont plus pénétrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse pas de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous. Je crois vous avoir fait connoître par là que la méthode des combinaisons est bonne entre deux joueurs par accident, comme elle l'est aussi quelquefois entre trois joueurs, comme quand il manque une partie à l'un, une à l'autre, et deux à l'autre; parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé, ne suffit pas pour en faire gagner deux; mais elle n'est pas générale, et n'est généralement bonne qu'en cas seulement qu'on soit astreint à jouer un certain nombre de parties exactement. De sorte que comme vous n'aviez pas ma méthode, quand vous m'avez proposé le parti de plusieurs joueurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous ne soyons de sentimens différens sur ce sujet. Je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procédez à la recherche de ce parti. Je recevrai votre réponse avec respect et avec joie, quand même votre sentiment me seroit contraire. Je suis, etc. PASCAL.

Du 24 août 1654.

PREMIÈRE LETTRE DE FERMAT A PASCAL.

Monsieur,

Nos coups fourrés continuent toujours, et je suis aussi bien que vous dans l'admiration de quoi nos pensées s'ajustent si exactement, qu'il me semble qu'elles aient pris une même route et fait un même chemin : vos derniers traités du *Triangle arithmétique* et de *son application*, en sont une preuve authentique; et si mon calcul ne me trompe, votre onzième conséquence couroit la poste de Paris à Toulouse, pendant que ma proposition des nombres figurés, qui en effet est la même, alloit de Toulouse à Paris. Je n'ai garde de faillir, tandis que je rencontrerai de cette sorte; et je suis persuadé que le vrai moyen pour s'empêcher de faillir est celui de concourir avec vous. Mais si j'en disois davantage, la chose tiendroit du compliment, et nous avons banni cet ennemi des conversations douces et aisées.

Ce seroit maintenant à mon tour à vous débiter quelqu'une de mes inventions numériques; mais la fin du parlement augmente mes occupations, et j'ose espérer de votre bonté que vous m'accorderez un répit juste et quasi nécessaire. Cependant je répondrai à votre question des trois joueurs qui jouent en deux parties. Lorsque le premier en a une, et que les autres n'en ont pas une, votre première solution est la vraie, et la division de l'argent doit se faire en dix-sept, cinq et cinq; de quoi

la raison est manifeste et se prend toujours du même principe, les combinaisons faisant voir d'abord que le premier a pour lui dix-sept hasards égaux, lorsque chacun des autres n'en a que cinq.

Au reste, il n'est rien à l'avenir que je ne vous communique avec toute franchise. Songez cependant, si vous le trouvez à propos, à cette proposition.

Les puissances carrées de 2, augmentées de l'unité, sont toujours des nombres premiers [1].

Le carré de 2, augmenté de l'unité, fait 5, qui est nombre premier.

Le carré du carré fait 16, qui augmenté de l'unité, fait 17, nombre premier.

Le carré de 16 fait 256, qui, augmenté de l'unité, fait 257, nombre premier.

Le carré de 256 fait 65 536, qui, augmenté de l'unité, fait 65 537, nombre premier, et ainsi à l'infini.

C'est une propriété de la vérité de laquelle je vous réponds. La démonstration en est très-malaisée, et je vous avoue que je n'ai pu encore la trouver pleinement; je ne vous la proposerois pas pour la chercher, si j'en étois venu à bout.

Cette proposition sert à l'invention des nombres qui sont à leurs parties aliquotes en raison donnée, sur quoi j'ai fait des découvertes considérables. Nous en parlerons une autre fois. Je suis, monsieur, votre, etc., Fermat.

A Toulouse, le 29 août 1654.

DEUXIÈME LETTRE DE FERMAT A PASCAL,

EN RÉPONSE A CELLE DE LA PAGE 226.

Monsieur,

N'appréhendez pas que notre convenance se démente, vous l'avez confirmée vous-même en pensant la détruire, et il me semble qu'en répondant à M. de Roberval pour vous, vous avez aussi répondu pour moi. Je prends l'exemple des trois joueurs, au premier desquels il manque une partie, et à chacun des deux autres deux, qui est le cas que vous m'opposez. Je n'y trouve que dix-sept combinaisons pour le premier, et cinq pour chacun des deux autres; car quand vous dites que la combinaison ACC est bonne pour le premier et pour le troisième, il semble que vous ne vous souveniez plus que tout ce qui se fait après que l'un des joueurs a gagné, ne sert plus de rien. Or, cette combinaison ayant fait gagner le premier dès la première partie, qu'importe que le troisième en gagne deux ensuite, puisque, quand il en gagneroit trente, tout cela seroit superflu ? Ce qui vient de ce que, comme vous avez très-bien remarqué, cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties ne sert qu'à faciliter la règle, et (suivant mon sen-

1. Euler a reconnu que cette proposition n'est point générale. En effet, la trente-deuxième puissance de 2, augmentée de l'unité, est divisible par 641.

timent) à rendre tous les hasards égaux, ou bien, plus intelligiblement, à réduire toutes les fractions à une même dénomination. Et afin que vous n'en doutiez plus, si au lieu de trois parties, vous étendez, au cas proposé, la feinte jusqu'à quatre, il y aura non-seulement 27 combinaisons, mais 81, et il faudra voir combien de combinaisons feront gagner au premier une partie plutôt que deux à chacun des autres, et combien feront gagner à chacun des deux autres deux parties plutôt qu'une au premier. Vous trouverez que les combinaisons pour le gain du premier, seront 51, et celles de chacun des autres deux 15. Ce qui revient à la même raison, que si vous prenez 5 parties ou tel autre nombre qu'il vous plaira, vous trouverez toujours 3 nombres en proportion de 17, 5, 5, et ainsi j'ai droit de dire que la combinaison ACC n'est que pour le premier et non pour le troisième, et que CCA n'est que pour le troisième et non pour le premier, et que partant, ma règle des combinaisons est la même en 3 joueurs qu'en 2, et généralement en tous nombres.

Vous aviez déjà pu voir par ma précédente, que je n'hésitois point à la solution véritable de la question des 3 joueurs dont je vous avois envoyé les 3 nombres décisifs 17, 5, 5. Mais parce que M. Roberval sera peut-être bien aise de voir une solution sans rien feindre, et qu'elle peut quelquefois produire des abrégés en beaucoup de cas, la voici en l'exemple proposé.

Le premier peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois.

S'il gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces, il rencontre la favorable du premier coup. Un seul dé produit 3 hasards; ce joueur a donc pour lui $\frac{1}{3}$ des hasards lorsqu'on ne joue qu'une partie.

Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés produisent 9 hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{2}{9}$ des hasards lorsqu'on joue deux parties.

Si on en joue trois, il ne peut gagner que de deux façons, ou lorsque le second gagne la première, le troisième la seconde et lui la troisième, ou lorsque le troisième gagne la première, le second la seconde, et lui la troisième; car, si le second ou le troisième joueur gagnoit les deux premières, il gagneroit le jeu, et non pas le premier joueur. Or, trois dés ont 27 hasards; donc ce premier joueur a $\frac{2}{27}$ de hasards lorsqu'on joue trois parties.

La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur est par conséquent $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{27}$; ce qui fait en tout $\frac{17}{27}$.

Et la règle est bonne et générale en tous les cas; de sorte que sans recourir à la feinte, les combinaisons véritables en chaque nombre des parties portent leur solution, et font voir ce que j'ai dit au commencement, que l'extension à un certain nombre de parties n'est autre chose que la réduction de diverses fractions à une même dénomination. Voilà en peu de mots tout le mystère, qui nous remettra sans doute en bonne

intelligence, puisque nous ne cherchons l'un et l'autre que la raison et la vérité.

J'espère vous envoyer à la Saint-Martin un abrégé de tout ce que j'ai inventé de considérable aux nombres. Vous me permettrez d'être concis, et de me faire entendre seulement à un homme qui comprend tout à demi-mot.

Ce que vous y trouverez de plus important regarde la proposition que tout nombre est composé d'un, de deux, ou de trois triangles; d'un, de deux, de trois ou de quatre carrés; d'un, de deux, de trois, de quatre ou de cinq pentagones; d'un, de deux, de trois, de quatre, de cinq ou de six hexagones, et à l'infini. Pour y parvenir, il faut démontrer que tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de quatre, est composé de deux carrés, comme 5, 13, 17, 29, 37, etc.

Étant donné un nombre premier de cette nature, comme 53, trouver par règle générale les deux carrés qui le composent.

Tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 3, est composé d'un carré et du triple d'un autre carré, comme 7, 13, 19, 31, 37, etc.

Tout nombre premier qui surpasse de 1 ou de 3 un multiple de 8, est composé d'un carré et du double d'un autre carré, comme 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Il n'y a aucun triangle en nombres duquel l'aire soit égale à un nombre carré.

Cela sera suivi de l'invention de beaucoup de propositions que Bachet avoue avoir ignorées, et qui manquent dans le Diophante.

Je suis persuadé que dès que vous aurez connu ma façon de démontrer en cette nature de propositions, elle vous paroîtra belle, et vous donnera lieu de faire beaucoup de nouvelles découvertes; car il faut, comme vous savez, que *multi pertranseant ut augeatur scientia.*

S'il me reste du temps, nous parlerons ensuite des nombres magiques, et je rappellerai mes vieilles espèces sur ce sujet. Je suis de tout mon cœur, monsieur, votre, etc. FERMAT.

Ce 25 septembre.

Je souhaite la santé de M. de Carcavi comme la mienne, et suis tout à lui.

Je vous écris de la campagne, et c'est ce qui retardera par aventure mes réponses pendant ces vacations.

TROISIÈME LETTRE DE FERMAT A PASCAL

Monsieur,

Si j'entreprends de faire un point avec un seul dé en huit coups; si nous convenons, après que l'argent est dans le jeu, que je ne jouerai pas le premier coup, il faut, par mon principe, que je tire du jeu un sixième du total pour être désintéressé, à raison dudit premier coup

Que si encore nous convenons après cela que je ne jouerai pas le second coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le sixième du restant, qui est $\frac{5}{36}$ du total; et si après cela nous convenons que je ne jouerai pas le troisième coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le sixième du restant, qui est $\frac{25}{216}$ du total. Et si après cela nous convenons encore que je ne jouerai pas le quatrième coup, je dois tirer le sixième du restant, qui est $\frac{125}{1296}$ du total. Et je conviens avec vous que c'est la valeur du quatrième coup, supposé qu'on ait déjà traité des précédens. Mais vous me proposez dans l'exemple dernier de votre lettre (je mets vos propres termes) que si j'entreprends de trouver le six en huit coups et que j'en aie joué trois sans le rencontrer; si mon joueur me propose de ne point jouer mon quatrième coup, et qu'il veuille me désintéresser à cause que je pourrois le rencontrer; il m'appartiendra $\frac{125}{1296}$ de la somme entière de nos mises; ce qui pourtant n'est pas vrai, suivant mon principe; car, en ce cas, les trois premiers coups n'ayant rien acquis à celui qui tient le dé, la somme totale restant dans le jeu, celui qui tient le dé et qui convient de ne pas jouer son quatrième coup, doit prendre pour son indemnité un sixième du total; et s'il avoit joué quatre coups sans trouver le point cherché, et qu'on convînt qu'il ne joueroit pas le cinquième, il auroit de même pour son indemnité un sixième du total; car la somme entière restant dans le jeu, il ne suit pas seulement du principe, mais il est de même du sens naturel que chaque coup doit donner un égal avantage. Je vous prie donc que je sache si nous sommes conformes au principe, ainsi que je crois, ou si nous différons seulement en l'application. Je suis, de tout mon cœur, etc. FERMAT.

TROISIÈME LETTRE DE PASCAL A FERMAT,

EN RÉPONSE A CELLE DE LA PAGE 232.

Monsieur,

Votre dernière lettre m'a parfaitement satisfait; j'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que je l'entends fort bien; elle est entièrement vôtre, et n'a rien de commun avec la mienne, et arrive au même but facilement. Voilà notre intelligence rétablie. Mais, monsieur, si j'ai concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numériques, dont vous m'avez fait la grâce de m'envoyer les énonciations : pour moi je vous confesse que cela me passe de bien loin; je ne suis capable que de les admirer, et vous supplie très-humblement d'occuper votre premier loisir à les achever. Tous nos messieurs les virent samedi dernier, et les estimèrent de tout leur cœur : on ne peut pas aisément supporter l'attente de choses si belles et si souhaitables; pensez-y donc, s'il vous plaît, et assurez-vous que je suis, etc. PASCAL.

Paris 27 octobre 1654.

LETTRE DE FERMAT A CARCAVI.

Monsieur,

J'ai été ravi d'avoir eu des sentimens conformes à ceux de M. Pascal; car j'estime infiniment son génie, et je le crois très-capable de venir à bout de tout ce qu'il entreprendra. L'amitié qu'il m'offre m'est si chère et si considérable, que je crois ne point devoir faire difficulté d'en faire quelque usage en l'impression de mes traités. Si cela ne vous choquoit point, vous pourriez tous deux procurer cette impression, de laquelle je consens que vous soyez les maîtres; vous pourriez éclaircir, ou augmenter ce qui semble trop concis, et me décharger d'un soin que mes occupations m'empêchent de prendre : je désire même que cet ouvrage paroisse sans mon nom, vous remettant, à cela près, le choix de toutes les désignations qui pourront marquer le nom de l'auteur que vous qualifierez votre ami. Voici le biais que j'ai imaginé pour la seconde partie, qui contiendra mes inventions pour les nombres : c'est un travail qui n'est encore qu'une idée, et que je n'aurois pas le loisir de coucher au long sur le papier; mais j'enverrai succinctement à M. Pascal tous mes principes et mes premières démonstrations, de quoi je vous réponds à l'avance qu'il tirera des choses non-seulement nouvelles et jusqu'ici inconnues, mais encore surprenantes. Si vous joignez votre travail avec le sien, tout pourra succéder et s'achever dans peu de temps, et cependant on pourra mettre au jour la première partie que vous avez en votre pouvoir. Si M. Pascal goûte mon ouverture, qui est principalement fondée sur la grande estime que j'ai de son génie, de son savoir et de son esprit, je commencerai d'abord à vous faire part de mes inventions numériques. Adieu, je suis, monsieur, etc. FERMAT.

Toulouse, ce 9 août 1659.

QUATRIÈME LETTRE DE FERMAT A PASCAL.

Monsieur,

Dès que j'ai su que nous sommes plus proches l'un de l'autre que nous n'étions auparavant, je n'ai pu résister à un dessein d'amitié dont j'ai prié M. de Carcavi d'être le médiateur : en un mot je prétends vous embrasser, et converser quelques jours avec vous; mais parce que ma santé n'est guère plus forte que la vôtre, j'ose espérer qu'en cette considération vous me ferez la grâce de la moitié du chemin, et que vous m'obligerez de me marquer un lieu entre Clermont et Toulouse, où je ne manquerai pas de me rendre vers la fin de septembre ou le commencement d'octobre. Si vous ne prenez pas ce parti, vous courrez hasard de me voir chez vous, et d'y avoir deux malades en même temps. J'attends de vos nouvelles avec impatience, et suis de tout mon cœur, tout à vous. FERMAT.

A Toulouse, le 25 juillet 1660.

LETTRE DE PASCAL A FERMAT,

EN RÉPONSE A LA PRÉCÉDENTE.

Monsieur,

Vous êtes le plus galant homme du monde, et je suis assurément un de ceux qui sais le mieux reconnoître ces qualités-là et les admirer infiniment, surtout quand elles sont jointes aux talens qui se trouvent singulièrement en vous : tout cela m'oblige à vous témoigner de ma main ma reconnoissance pour l'offre que vous me faites, quelque peine que j'aie encore d'écrire et de lire moi-même : mais l'honneur que vous me faites m'est si cher, que je ne puis trop me hâter d'y répondre. Je vous dirai donc, monsieur, que, si j'étois en santé, je serois volé à Toulouse, et que je n'aurois pas souffert qu'un homme comme vous eût fait un pas pour un homme comme moi. Je vous dirai aussi que, quoique vous soyez celui de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand géomètre, ce ne seroit pas cette qualité-là qui m'auroit attiré; mais que je me figure tant d'esprit et d'honnêteté en votre conversation, que c'est pour cela que je vous rechercherois. Car pour vous parler franchement de la géométrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit; mais en même temps je la connois pour si inutile, que je fais peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan. Aussi je l'appelle le plus beau métier du monde; mais enfin ce n'est qu'un métier; et j'ai dit souvent qu'elle est bonne pour faire l'essai, mais non pas l'emploi de notre force : de sorte que je ne ferois pas deux pas pour la géométrie, et je m'assure fort que vous êtes fort de mon humeur. Mais il y a maintenant ceci de plus en moi, que je suis dans des études si éloignées de cet esprit-là, qu'à peine me souviens-je qu'il y en ait. Je m'y étois mis, il y a un an ou deux, par une raison tout à fait singulière, à laquelle ayant satisfait, je suis au hasard de ne jamais plus y penser, outre que ma santé n'est pas encore assez forte; car je suis si foible que je ne puis marcher sans bâton, ni me tenir à cheval. Je ne puis même faire que trois ou quatre lieues au plus en carrosse; c'est ainsi que je suis venu de Paris ici en vingt-deux jours. Les médecins m'ordonnent les eaux de Bourbon pour le mois de septembre, et je suis engagé autant que je puis l'être, depuis deux mois, d'aller de là en Poitou par eau jusqu'à Saumur, pour demeurer jusqu'à Noël avec M. le duc de Roannes, gouverneur de Poitou, qui a pour moi des sentimens que je ne vaux pas. Mais comme je passerai par Orléans en allant à Saumur par la rivière, si ma santé ne me permet pas de passer outre, j'irai de là à Paris. Voilà, monsieur, tout l'état de ma vie présente, dont je suis obligé de vous rendre compte, pour vous assurer de l'impossibilité où je suis de recevoir l'honneur que vous daignez m'offrir, et que je souhaite de tout mon cœur de pouvoir un jour reconnoître, ou en vous, ou en messieurs vos enfans, auxquels je suis tout dévoué, ayant une vénération particulière pour ceux qui portent le nom du premier homme du monde. Je suis, etc. PASCAL.

De Bienassis, le 10 août 1660

LETTRE DE FERMAT A M. ***.

Monsieur mon cher maître,

Je suis embarrassé en affaires non géométriques; je vous envoie pourtant un petit écrit que le P. Lalouvère m'a fait porter ce matin. J'ai reçu le Traité de M. Pascal depuis deux jours, et n'ai pu m'appliquer encore sérieusement à le lire; j'en ai pourtant conçu une grande opinion, aussi bien que de tout ce qui part de cet illustre. Je suis tout à vous.

FERMAT.

A Toulouse, ce 16 février 1659.

PORISMATA DUO:

AUCTORE PETRO FERMAT.

PORISMA I. — *Datis positione duabus rectis* ABE, YBC (fig. 45, 46, 47) *sese in puncto* B *secantibus: datis etiam punctis* A *et* D *in recta* ABE: *quæruntur duo puncta, exempli gratia,* O *et* N, *a quibus, si ad quodlibet rectæ* YBC *punctum, ut* H, *recta* OHN *inflectatur, rectam* ABD *in punctis* I *et* V *secans, rectangulum sub* AI *in* DV *æquetur spatio dato, videlicet rectangulo sub* AB *in* BD.

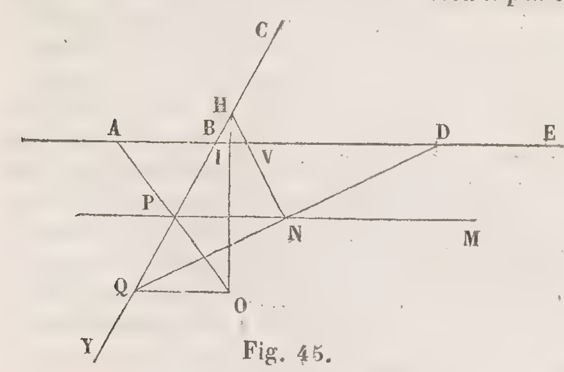


Fig. 45.

Ita procedit porismatica Euclidis constructio, et generalissimam problematis solutionem repræsentabit.

Sumatur punctum quodvis O; jungatur recta AO secans rectam YBC in puncto P; a puncto O ducatur recta OQ ipsi ABD parallela, et rectæ YBC occurrens in Q; ducatur etiam infinita PNM eidem ABD parallela; et juncta QD secet rectam PNM in puncto N. Aio duo puncta P et N adimplere propositum; sumpto quippe ubilibet in recta YBC puncto H, et ductis rectis OH, NI, rectæ ABD occurrentibus in punctis I et V, rectangulum sub AI in DV, in quibus

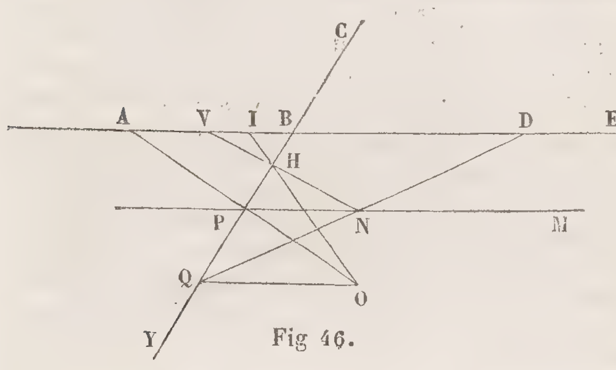


Fig 46.

libet omnino casibus (tres tantum triplex figura repræsentat) rectangulo AB in BD æquale erit.

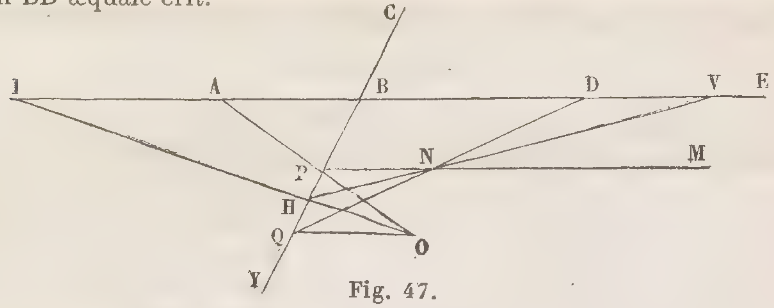


Fig. 47.

Porisma II. — *Dato circulo* ABCD (fig. 48, 49), *cujus diameter* AC, *centrum* M : *quæruntur duo puncta ut* E *et* N, *a quibus*, *si ad quodvis circumferentiæ punctum*, *ut* D, *inflectatur recta* EDN, *diametrum in punctis* Q *et* H *secans*, *summa quadratorum* QD *et* DH, *ad triangulum* QDH *habeat rationem datam*, *idemque in qualibet inflexione generaliter et perpetuo contingat*.

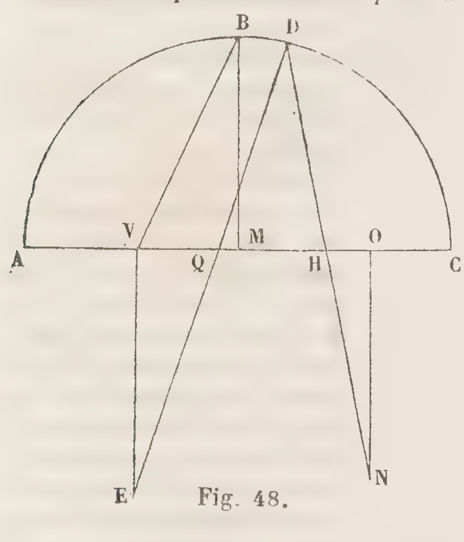


Fig. 48.

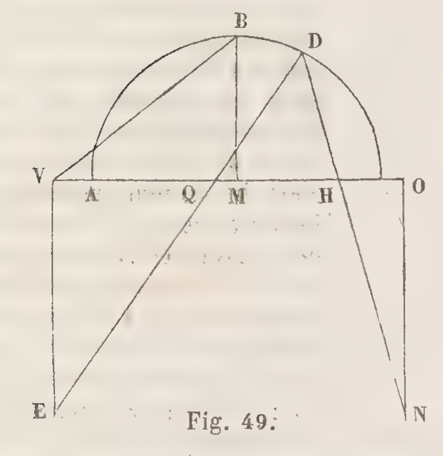


Fig. 49.

A centro M excitetur ad diametrum perpendicularis MB ; fiat ratio data eadem quæ quadrupla rectæ BU ad rectam UM ; a puncto U excitetur UE ad diametrum perpendicularis, et ipsi UB æqualis ; sumpta recta MO ipsi MU æquali, fiat ON æqualis et parallela rectæ UF : dico puncta quæsita esse puncta E et N. Sumpto quippe quovis in circumferentia puncto ut D, et junctis ED, UD, rectis, diametrum in punctis Q et H secantibus, summa quadratorum QD et DH ad triangulum QDH erit, in quocumque casu, in ratione data, hoc est in ratione quadruplæ BU ad rectam UM.

Non solum proponitur inquirenda istius porismatis demonstratio, sed videant etiam subtiliores mathematici an duo alia puncta præter E et N possint problemati proposito satisfacere, et utrum solutiones quæstionis sicut in primo porismate suppetant infinitæ. Si nihil respondeant, geometriæ in hac parte laboranti non dedignabimur opitulari.

SOLUTIO PROBLEMATIS A DOMINO PASCAL PROPOSITI,

EODEM AUCTORE FERMAT.

Proposuit dominus Pascal hoc problema : *Dato trianguli angulo ad verticem, et ratione quam habet perpendiculum ad differentiam laterum: invenire speciem trianguli.*

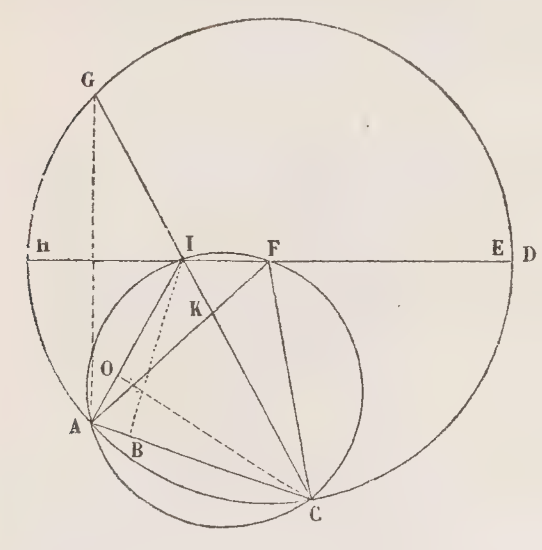


Fig. 50.

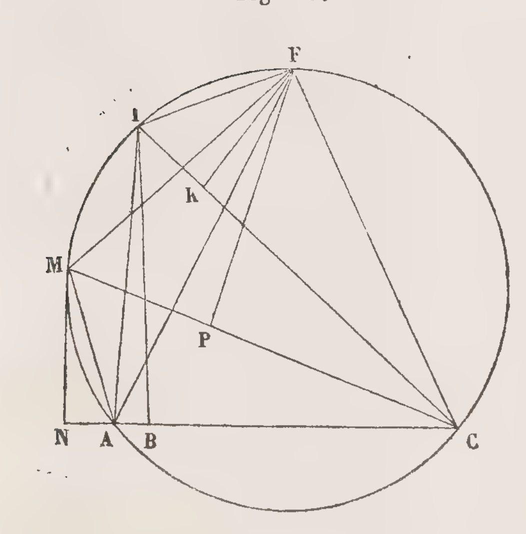


Fig. 51.

Exponatur recta quævis data AC (fig. 50, 51) super quam portio circuli AIFC capax anguli dati describatur. Eo quæstionem deduximus ut, data basi AC, angulo verticis AIC, et ratione quam habet perpendiculum ad differentiam laterum, quæratur triangulum.

Ponatur jam factum esse et triangulum quæsitum esse AIC, demittatur perpendiculum IB; et diviso arcu AFC bifariam in F, jungantur AF, FC, et juncta IF, demittantur in rectas AI, IC, perpendiculares CO, FK; deinde centro F, intervallo AF, describatur circulus AHGEC, cui rectæ CI, IF, continuatæ occurrant in punctis G, H, E; denique jungatur GA. Angulus AFC ad centrum duplus est anguli AGC ad circumferentiam; sed angulus AIC æquatur angulo AFC in eadem portione; igitur angulus AIC duplus est anguli AGC. Sed angulus AIC æquatur duobus angulis AGC, IAG; igitur anguli IGA, IAG sunt æquales, ideoque rectæ IA, IG : sed quum a centro F in rectam GC cadat perpendicularis FK, æquales sunt GK, KC, ideoque KI est dimidia differentia inter rectas CI, IG, hoc est inter rectas CI, IA. Data est autem ratio perpendicularis IB ad differen-

tiam laterum CI, IA; ergo datur ratio BI ad IK, et singulis in rectam AC ductis, data est ratio rectanguli sub AC in BI ad rectangulum sub AC in IK; sed rectangulum sub AC in BI æquatur rectangulo sub AI in CO; est enim utrumque dimidium trianguli AIC : ergo ratio rectanguli sub AI in CO ad rectangulum sub AC in IK data est. Datur autem ex hypothesi angulus AIC, et rectus est COI ex constructione; ergo datur specie triangulum COI. Ratio igitur CO ad CI data est, ideoque rectanguli sub AI in CO rectangulum sub AI in IC ratio datur. Sed probavimus rationem rectanguli sub AI in CO, ad rectangulum sub AC in IK dari; ergo datur ratio rectanguli AIC ad rectangulum sub AC in IK. Jam in triangulo AFC, datur angulus AFC ex hypothesi; ergo angulus GAC datur, cui æqualis CIF idcirco dabitur; est autem rectus angulus FKI; ergo triangulum FIK datur specie; ideoque rectæ KI ad IF ratio data est; ideoque rectanguli AC in IK ad rectangulum sub AC in IF datur ratio. Probatum est autem dari rationem rectanguli AI in IC ad rectangulum AC in IK; ergo datur ratio rectanguli AI in IC ad rectangulum AC in IF. Est autem rectangulum CIG æquale rectangulo CIA, quia rectæ IG, IA sunt æquales, et rectangulo CIG æquatur rectangulum HIE : ergo ratio rectanguli HIE ad rectangulum sub AC in IF data est. Sit data ratio ED ad AC : quum igitur AC sit data, dabitur ED, quæ ponatur recta HE in directum ut in figura 50; rectangulum igitur HIE ad rectangulum AC in IF est in ratione data ED ad AC; sed ut DE ad AC, ita DE in IF ad AC in IF : igitur, ut rectangulum HIE est ad rectangulum AC in IF, ita rectangulum DE in IF ad rectangulum AC in IF; rectangulum igitur DE in IF æquatur rectangulo HIE. Probatum est triangulum AFC dari specie; sed datur basis AC magnitudine; ergo datur AF, ideoque dupla ipsius EH datur. Æqualibus rectangulis DE in IF et HIE addatur rectangulum sub DE in IH; fiet rectangulum sub DE in FH æquale rectangulo DIH; datur autem rectangulum sub DE in FH, quia utraque rectarum DE, FH datur; datur igitur rectangulum DIH et ad datam magnitudinem DH applicatur deficiens figura quadrata; ergo recta IH datur, ideoque reliqua IF. Datur autem punctum F positione; ergo datur et punctum I, et totum triangulum AIC. Non est difficilis ab analysi ad synthesin regressus.

Sed, ut omne dubium tollatur, probatur facillime triangulum quæsitum esse simile invento AIC in figura 51 (triangulum autem AIC ex utravis parte puncti F verticem habere potest, in æquali a puncto F utrinque distantia, erit enim idem specie et magnitudine, et positio variabit). Si enim triangulum quæsitum non est simile invento, manente eadem basi, ejus vertex vel ibit inter puncta F et I, vel inter puncta I et A. (Ex utravis parte nihil interest; nam de parte FC idem secundum triangulum AIC pari demonstratione concludit). Sit primum vertex inter A et I, et triangulum quæsitum ponatur, si fieri potest, simile triangulo AMC. Jungatur FM et demittatur perpendicularis FP; erit ratio perpendiculi MN ad MP data ex hypothesi, ideoque æqualis rationi IB ad IK quam probavimus datæ æqualem : quod est absurdum; quum enim in triangulo FMP angulus ad M æquatur angulo ad I trianguli IFK, erunt similia triangula FIK, FMP; sed FM est major FI; ergo MP est major

IK; est autem MN minor IB : non igitur eadem potest esse ratio MN ad MP quæ IB ad IK. Si punctum M sit inter I et F, probabitur augeri perpendiculum et minui differentiam laterum, idque eadem argumentatione. Ideoque varians proportionem si punctum M sit in portione FC, utemur secundo triangulo AIC, et erit eadem demonstratio, ut inutile sit diutius in his casibus immorari. Constat igitur triangulum quæsitum invento AIC esse simile, et patet proposito esse satisfactum.

Proponitur si placet tam domino Pascal quam domino Roberval solvendum hoc problema :

Ad datum punctum in helice Baliani, invenire tangentem.

Quænam autem sit hujusmodi helix novit dominus Roberval.

Hujus problematis a nobis soluti, solutionem a viris eruditissimis expectamus; aut si maluerint ipsis impertiemur, imo et generalem de linearum curvarum contactibus methodum.

Sed ne a præsenti materia triangulari vacuis manibus discessisse videamur, proponi possunt hæ quæstiones :

Data basi, angulo verticis, et aggregato perpendiculi et differentiæ laterum : invenire triangulum.

Data basi, angulo verticis, et differentia perpendiculi et differentiæ laterum : invenire triangulum.

Data basi, angulo verticis, et rectangulo sub differentia laterum in perpendiculum : invenire triangulum.

Data basi, angulo verticis, et summa quadratorum perpendiculi et differentiæ laterum : invenire triangulum.

Et multæ similes, quarum enodationem facilius inventuros viros doctissimos existimo, quam de contactu helicis Baliani propositum problema aut theorema.

Sed observandum in quæstionibus de triangulis, quoties problema poterit solvi per plana, non recurrendum ad solida : quod quum norint viri doctissimi, supervacuum fortasse subit addidisse.

LETTRE DE SLUZE,

Chanoine de la cathédrale de Liége, traduite de l'italien en françois, pour réponse à M.***.

Monsieur,

J'avoue que j'ai grande obligation *alla gentilezza* de M. Pascal, et j'ai grande estime de sa science, par la solution du problème que vous lui aviez proposé; mais je voudrois bien savoir s'il lui a été proposé avec toute son universalité : la raison qui m'en a fait douter, est que je vois qu'il considère tous les points donnés dans un même plan, et je les considère en quelques plans différens qu'ils puissent être; ce que vous pouvez lui demander comme de vous-même.

Pour ce qui est des problèmes que vous m'avez envoyés, je dirai seulement que, s'ils m'eussent été envoyés quand je les ai demandés, j'aurois tâché de lui donner satisfaction; mais la multitude des affaires qui m'accablent, comme vous savez bien, les vacances étant finies, ne me

permettent pas d'appliquer mon esprit à de semblables recherches. Mais voyant que vous le désirez, je n'ai pu m'empêcher de les considérer quelque peu; et d'abord je me suis aperçu que le premier problème[1] pouvoit recevoir très-aisément solution par les lieux solides, c'est-à-dire avec l'intersection de deux hyperboles. Après avoir fait un petit griffonnement d'analyse, je reconnus que le problème étoit *plan*, et que la résolution n'en étoit pas difficile, mais que la construction en seroit un peu longue et embrouillée. Ainsi, pour ne pas être obligé d'écrire beaucoup, j'ai choisi un cas seulement entre plusieurs qui sont dans le problème; et pour trouver une construction plus brève, je l'ai appliqué aux nombres, comme vous verrez dans le papier qui est dans cette lettre. Par là toutes les personnes intelligentes verront aisément que j'ai la construction universelle; je vous l'enverrai si vous la désirez, bien que ma paresse s'y oppose. J'estime pourtant que M. Pascal sera satisfait.

Pour ce qui est de l'autre, je m'aperçus d'abord qu'il prenoit son origine de cinq plans qui touchent un ou deux cônes opposés. La résolution en est longue, mais pourtant je ne la crois pas si difficile. Quoi qu'il en soit, l'embarras continuel des affaires qui se sont présentées et multipliées au triple depuis que vous n'avez été ici, ne me donne pas le temps d'y penser pour le présent.

Je souhaiterois bien que vous me fissiez la faveur de me marquer les livres qui ont été imprimés sur cette matière, ou sur autre de philosophie, qui soient de quelque considération. Nous avons ici des *Exercitationes mathematicæ* de M. François Schooten, professeur à Leyde : je crois qu'on les aura vues à Paris.

Je viens à ce que vous me dites de M. Descartes; je l'estime un grand homme : c'est pourquoi je voudrois savoir particulièrement ce qu'on lui oppose. Je ne prétends pas le faire passer pour irrépréhensible, même dans ses écrits de géométrie, parce que j'ai remarqué en plusieurs endroits qu'il étoit homme, et que *quandoque bonus dormitat Homerus :* mais une petite tache ne rend pas difforme un beau visage, *atque opere in longo fas est obrepere somnum.*

TRAITÉ DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE.

Définitions. — J'appelle *Triangle arithmétique*, une figure dont la construction est telle.

Je mène d'un point quelconque, G (fig. 52), deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, GV, Gζ, dans chacune desquelles je prends tant que je veux de parties égales et continues, à commencer par G, que je nomme 1, 2, 3, 4, etc.; et ces nombres sont *les exposans* des divisions des lignes.

Ensuite je joins les points de la première division qui sont dans cha-

1. Voici quel était l'énoncé de ce problème : *Étant donnés deux cercles et une ligne droite, trouver un cercle qui touche les deux cercles donnés et qui laisse sur la ligne droite un arc capable d'un angle donné.*

cune des deux lignes, par une autre ligne qui forme un triangle dont elle est *la base.*

Je joins ainsi les deux points de la seconde division par une autre ligne, qui forme un second triangle dont elle est *la base.*

Et joignant ainsi tous les points de division qui ont un même exposant, j'en forme autant *de triangles et de bases.*

Je mène, par chacun des points de division, des lignes parallèles aux côtés, qui par leurs intersections forment de petits carrés, que j'appelle *cellules.*

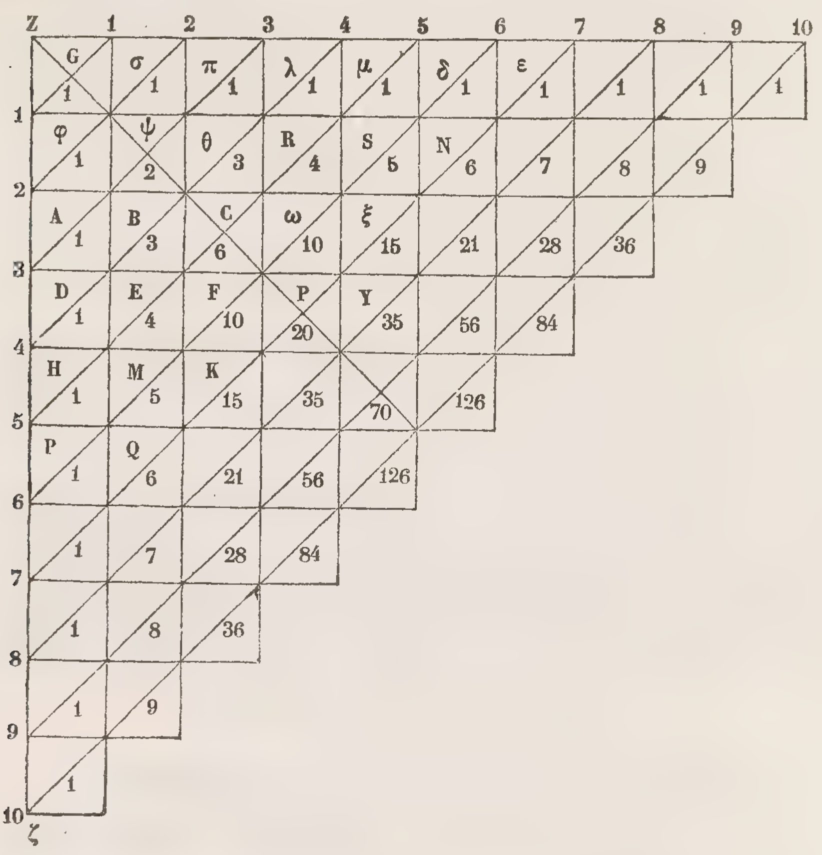


Fig. 52.

Et les cellules qui sont entre deux parallèles qui vont de gauche à droite, s'appellent *cellules d'un même rang parallèle*, comme les cellules G, σ, π, etc., ou φ, ψ, θ, etc.

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas, s'appellent *cellules d'un même rang perpendiculaire*, comme les cellules G, φ, A, D, etc., et celles-ci, σ, ψ, B, etc.

Et celles qu'une même base traverse diagonalement, sont dites *cellules d'une même base*, comme celles qui suivent, D, B, θ, λ, et celles-ci, A, ψ, π.

Les cellules d'une même base également distantes de ses extrémités,

sont dites *réciproques*, comme celles-ci, E, R et B, θ; parce que l'exposant du rang parallèle de l'une est le même que l'exposant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paroît en cet exemple, où E est dans le second rang perpendiculaire, et dans le quatrième parallèle; et sa réciproque R est dans le second rang parallèle, et dans le quatrième perpendiculaire réciproquement; et il est bien facile de démontrer que celles qui ont leurs exposans réciproquement pareils, sont dans une même base, et également distantes de ses extrémités.

Il est aussi bien facile de démontrer que l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, joint à l'exposant de son rang parallèle, surpasse de l'unité l'exposant de sa base. Par exemple, la cellule F est dans le troisième rang perpendiculaire, et dans le quatrième parallèle, et dans la sixième base, et les deux exposans des rangs $3+4$ surpassent de l'unité l'exposant de la base 6, ce qui vient de ce que les deux côtés du triangle sont divisés en un pareil nombre de parties; mais cela est plus tôt compris que démontré.

Cette remarque est de même nature, que chaque base contient une cellule plus que la précédente, et chacune autant que son exposant d'unités; ainsi la seconde φσ a deux cellules, la troisième Aψπ en a trois, etc.

Or les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouvent par cette méthode.

Le nombre de la première cellule qui est à l'angle droit est arbitraire; mais celui-là étant placé, tous les autres sont forcés; et pour cette raison il s'appelle le *générateur* du triangle; et chacun des autres est spécifié par cette seule règle:

Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle. Ainsi la cellule F, c'est-à-dire, le nombre de la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E; et ainsi des autres.

D'où se tirent plusieurs conséquences. En voici les principales, où je considère les triangles dont le générateur est l'unité; mais ce qui s'en dira conviendra à tous les autres.

CONSÉQUENCE I. — *En tout triangle arithmétique, toutes les cellules du premier rang parallèle et du premier rang perpendiculaire sont pareilles à la génératrice.*

Car par la construction du triangle, chaque cellule est égale à celle qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celle qui la précède dans son rang parallèle; or les cellules du premier rang parallèle n'ont aucunes cellules qui les précèdent dans leurs rangs perpendiculaires, ni celles du premier rang perpendiculaire dans leurs rangs parallèles: donc elles sont toutes égales entre elles, et partant au premier nombre générateur.

Ainsi φ égale G + zéro, c'est-à-dire, φ égale G.

Ainsi A égale φ + zéro, c'est-à-dire, φ.

Ainsi σ égale G + zéro, et π égale σ + zéro.

Et ainsi des autres.

Conséquence II. — *En tout triangle arithmétique, chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallèle précédent, comprises depuis son rang perpendiculaire jusqu'au premier inclusivement.*

Soit une cellule quelconque ω : je dis qu'elle est égale à $R + \theta + \psi + \varphi$, qui sont celles du rang parallèle supérieur depuis le rang perpendiculaire de ω jusqu'au premier rang perpendiculaire.

Cela est évident par la seule interprétation des cellules, par celles d'où elles sont formées.

Car ω égale $R + \underline{C}$.

$$\overline{\theta} + \underline{B}$$

$$\overline{\psi} + \underline{A}$$

$$\varphi$$

Car A et φ sont égaux entre eux par la précédente.

Donc ω égale $R + \theta + \psi + \varphi$.

Conséquence III. — *En tout triangle arithmétique, chaque cellule égale la somme de toutes celles du rang perpendiculaire précédent, comprises depuis son rang parallèle jusqu'au premier inclusivement.*

Soit une cellule quelconque C : je dis qu'elle est égale à $B + \psi + \sigma$, qui sont celles du rang perpendiculaire précédent, depuis le rang parallèle de la cellule C jusqu'au premier rang parallèle.

Cela paroît de même par la seule interprétation des cellules.

Car C égale $B + \underline{\theta}$.

$$\overline{\psi} + \underline{\pi}$$

$$\sigma$$

Car π égale σ par la première.

Donc C égale $B + \psi + \sigma$.

Conséquence IV. — *En tout triangle arithmétique, chaque cellule diminuée de l'unité, est égale à la somme de toutes celles qui sont comprises entre son rang parallèle et son rang perpendiculaire exclusivement.*

Soit une cellule quelconque ξ : je dis que $\xi - G$ égale $R + \theta + \psi + \varphi + \lambda + \pi + \sigma + G$, qui sont tous les nombres compris entre le rang $\xi\omega CBA$ et le rang $\xi S\mu$ exclusivement.

Cela paroît de même par l'interprétation.

Car ξ égale $\lambda + R + \underline{\omega}$.

$$\overline{\pi} + \theta + \underline{C}$$

$$\overline{\sigma} + \psi + \underline{B}$$

$$\overline{G} + \varphi + \underline{A}$$

$$G$$

Donc ξ égale $\lambda + R + \pi + \theta + \sigma + \psi + G + \varphi + G$.

Avertissement. — J'ai dit dans l'énonciation, *chaque cellule diminuée de l'unité*, parce que l'unité est le générateur; mais si c'étoit un autre nombre, il faudroit dire, *chaque cellule diminuée du nombre générateur.*

Conséquence V. — *En tout triangle arithmétique, chaque cellule est égale à sa réciproque*

Car dans la seconde base $\varphi\sigma$, il est évident que les deux cellules réciproques φ, σ, sont égales entre elles et à G.

Dans la troisième A, ψ, π; il est visible de même que les réciproques π, A, sont égales entre elles et à G.

Dans la quatrième, il est visible que les extrêmes D, λ, sont encore égales entre elles et à G.

Et celles d'entre-deux, B, θ, sont visiblement égales, puisque B égale $A+\psi$, et θ égale $\psi+\pi$; or $\pi+\psi$ sont égales à $A+\psi$ par ce qui est montré; donc, etc.

Ainsi l'on montrera dans toutes les autres bases que les réciproques sont égales, parce que les extrêmes sont toujours pareilles à G, et que les autres s'interpréteront toujours par d'autres égales dans la base précédente qui sont réciproques entre elles.

CONSÉQUENCE VI. — *En tout triangle arithmétique, un rang parallèle et un perpendiculaire qui ont un même exposant, sont composés de cellules toutes pareilles les unes aux autres.*

Car ils sont composés de cellules réciproques.

Ainsi le second rang perpendiculaire $\sigma\psi BEMQ$ est entièrement pareil au second rang parallèle $\varphi\psi\theta RSN$.

CONSÉQUENCE VII. — *En tout triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base est double de celles de la base précédente.*

Soit une base quelconque $DB\theta\lambda$: je dis que la somme de ses cellules est double de la somme des cellules de la précédente $A\psi\pi$.

Car les extrêmes	$\underline{D}$,	$\underline{\lambda}$,
égalent les extrêmes	A,	π,
et chacune des autres.	B,	θ,
en égalent deux de l'autre base.	$\overline{A+\psi}$,	$\overline{\psi+\pi}$.

Donc $D+\lambda+B+\theta$ égalent $2A+2\psi+2\pi$.

La même chose se démontre de même de toutes les autres.

CONSÉQUENCE VIII. — *En tout triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base est un nombre de la progression double, qui commence par l'unité, dont l'exposant est le même que celui de la base.*

Car la première base est l'unité.

La seconde est double de la première, donc elle est 2.

La troisième est double de la seconde, donc elle est 4. Et ainsi à l'infini.

Avertissement. — Si le générateur n'étoit pas l'unité, mais un autre nombre, comme 3, la même chose seroit vraie; mais il ne faudroit pas prendre les nombres de la progression double à commencer par l'unité, savoir : 1, 2, 4, 8, 16, etc., mais ceux d'une autre progression double à commencer par le générateur 3, savoir, 3, 6, 12, 24, 48, etc.

CONSÉQUENCE IX. — *En tout triangle arithmétique, chaque base diminuée de l'unité est égale à la somme de toutes les précédentes.*

Car c'est une propriété de la progression double.

Avertissement. — Si le générateur étoit autre que l'unité, il faudroit dire, *chaque base diminuée du générateur.*

CONSÉQUENCE X. — *En tout triangle arithmétique, la somme de tant de cellules continues qu'on voudra de sa base, à commencer par une*

extrémité, est égale à autant de cellules de la base précédente, plus encore à autant, hormis une.

Soit prise la somme de tant de cellules qu'on voudra de la base Dλ, par exemple, les trois premières, D + B + θ : je dis qu'elle est égale à la somme des trois premières de la base précédente A + ψ + π, plus aux deux premières de la même base A + ψ.

Car	D.	B.	θ.
égale	A.	A + ψ.	ψ + π.

Donc D + B + θ égale 2A + 2ψ + π.

Définition. — J'appelle *cellules de la dividente*, celles que la ligne qui divise l'angle droit par la moitié traverse diagonalement, comme les cellules G, ψ, C, ρ, etc.

Conséquence XI. — *Chaque cellule de la dividente est double de celle qui la précède dans son rang parallèle ou perpendiculaire.*

Soit une cellule de la dividente C : je dis qu'elle est double de θ, et aussi de B.

Car C égale θ + B, et θ égale B, par la cinquième conséquence.

Avertissement. — Toutes ces conséquences sont sur le sujet des égalités qui se rencontrent dans le triangle arithmétique. On va en voir maintenant les proportions, dont la proposition suivante est le fondement.

Conséquence XII. — *En tout triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure, comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base, à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement.*

Soient deux cellules contiguës quelconques d'une même base, E, C : je dis que :

E	est à C	comme 2	à 3
inférieure,	supérieure,	parce qu'il y a deux cellules depuis E jusqu'en bas ; savoir, E, H,	parce qu'il y a trois cellules depuis C jusqu'en haut ; savoir, C, R, μ.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.

Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base ; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 à 1.

Le deuxième, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second lemme en cette sorte. Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, comme en la quatrième Dλ, c'est-à-dire, si D est à B comme 1 à 3, et B à θ comme 2 à 2, et θ à λ comme 3 à 1, etc. ; je dis que la même proportion se trou-

vera dans la base suivante, Hμ, et que, par exemple, E est à C comme 2 à 3.

Car D est à B comme 1 à 3, par l'hypothèse.

Donc $\underline{D+B}$ est à B comme $\underline{1+3}$ à 3.
E à B comme 4 à 3.

De même B est à θ comme 2 à 2, par l'hypothèse.

Donc $\underline{B+\theta}$ à B, comme $\underline{2+2}$ à 2.
C à B, comme 4 à 2.

Mais B à E, comme 3 à 4,

comme il est montré. Donc par la proportion troublée, C est à E comme 3 à 2.

Ce qu'il falloit démontrer.

On le montrera de même dans tout le reste, puisque cette preuve n'est fondée que sur ce que cette proportion se trouve dans la base précédente, et que chaque cellule est égale à sa précédente, plus à sa supérieure, ce qui est vrai partout.

Conséquence XIII. — *En tout triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans un même rang perpendiculaire, l'inférieure est à la supérieure, comme l'exposant de la base de cette supérieure à l'exposant de son rang parallèle.*

Soient deux cellules quelconques dans un même rang perpendiculaire, F, C : je dis que

F est à	C comme	5 à	3
l'inférieure,	la supérieure,	exposant de la base de C,	exposant du rang parallèle de C.

Car E est à C comme 2 à 3.

Donc $\underline{E+C}$ est à C comme $\underline{2+3}$ à 3.
F est à C comme 5 à 3.

Conséquence XIV. — *En tout triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans un même rang parallèle, la plus grande est à sa précédente, comme l'exposant de la base de cette précédente à l'exposant de son rang perpendiculaire.*

Soient deux cellules dans un même rang parallèle F, E : je dis que

F est à	E comme	5 à	2
la plus grande,	précédente,	exposant de la base de E,	exposant du rang perpendiculaire de E.

Car E est à C comme 2 à 3.

Donc $\underline{E+C}$ est à E comme $\underline{2+3}$ à 2.
F est à E comme 5 à 2.

Conséquence XV. — *En tout triangle arithmétique, la somme des cellules d'un quelconque rang parallèle est à la dernière de ce rang, comme l'exposant du triangle est à l'exposant du rang.*

Soit un triangle quelconque, par exemple, le quatrième GDλ : je dis que quelque rang qu'on y prenne, comme le second parallèle, la somme de ses cellules, savoir, $\varphi+\psi+\theta$, est à θ comme 4 à 2. Car $\varphi+\psi+\theta$ égale C, et C est à θ comme 4 à 2, par la treizième conséquence.

Conséquence XVI. — *En tout triangle arithmétique, un quelconque rang parallèle est au rang inférieur, comme l'exposant du rang inférieur à la multitude de ses cellules.*

Soit un triangle quelconque, par exemple, le cinquième, μGH : je dis que quelque rang qu'on y prenne, par exemple, le troisième, la somme de ses cellules est à la somme de celles du quatrième, c'est-à-dire, A + B + C est à D + E, comme 4 exposant du rang quatrième, à 2, qui est l'exposant de la multitude de ses cellules, car il en contient 2.

Car A + B + C égale F, et D + E égale M. Or F est à M comme 4 à 2, par la douzième conséquence.

Avertissement. — On pourroit l'énoncer aussi de cette sorte : *Chaque rang parallèle est au rang inférieur, comme l'exposant du rang inférieur à l'exposant du triangle, moins l'exposant du rang supérieur.* Car l'exposant d'un triangle moins l'exposant d'un de ses rangs, est toujours égal à la multitude des cellules du rang inférieur.

Conséquence XVII. — *En tout triangle arithmétique, quelque cellule que ce soit jointe à toutes celles de son rang perpendiculaire, est à la même cellule jointe à toutes celles de son rang parallèle, comme les multitudes des cellules prises dans chaque rang.*

Soit une cellule quelconque B : je dis que B + ψ + σ est à B + A, comme 3 à 2.

Je dis 3, parce qu'il y a trois cellules ajoutées dans l'antécédent; et 2, parce qu'il y en a deux dans le conséquent.

Car B + ψ + σ égale C, par la troisième conséquence; et B + A égale E, par la seconde conséquence.

Or C est à E comme 3 à 2, par la douzième conséquence.

Conséquence XVIII. — *En tout triangle arithmétique, deux rangs parallèles, également distans des extrémités, sont entre eux comme la multitude de leurs cellules.*

Soit un triangle quelconque GVζ, et deux de ses rangs également distans des extrémités, comme le sixième P + Q, et le second φ + ψ + θ + R + S + N : je dis que la somme des cellules de l'un est à la somme des cellules de l'autre, comme la multitude des cellules de l'un est à la multitude des cellules de l'autre.

Car par la sixième conséquence, le second rang parallèle φψθRSN est le même que le second rang perpendiculaire σψBEMQ, duquel nous venons de démontrer cette proportion.

Avertissement. — On peut l'énoncer ainsi : *En tout triangle arithmétique, deux rangs parallèles, dont les exposans joints ensemble excèdent de l'unité l'exposant du triangle, sont entre eux comme leurs exposans réciproquement.* Car ce n'est qu'une même chose que ce qui vient d'être énoncé.

Conséquence dernière. — *En tout triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans la dividente, l'inférieure est à la supérieure prise quatre fois, comme l'exposant de la base de cette supérieure, à un nombre plus grand de l'unité.*

Soient deux cellules de la dividente ρ, C : je dis que ρ est à 4C comme 5, exposant de la base de C, est à 6.

Car ρ est double de ω, et C de θ; donc 4θ égalent 2C.

Donc 4θ sont à C comme 2 à 1.

Or ρ est à 4C comme ω à 4θ, ou en raison composée de. ω à C + C à 4θ
par les conséquences précédentes. . . . . 5 à 3   1 à 2
ou 3 à 6
5 à 6

Donc ρ est à 4C comme 5 à 6. Ce qu'il falloit démontrer.

Avertissement. — On peut tirer de là beaucoup d'autres proportions que je supprime, parce que chacun peut facilement les conclure, et que ceux qui voudront s'y attacher en trouveront peut-être de plus belles que celles que je pourrois donner. Je finis donc par le problème suivant, qui fait l'accomplissement de ce traité.

Problème. — *Étant donnés les exposans des rangs perpendiculaire et parallèle d'une cellule, trouver le nombre de la cellule, sans se servir du triangle arithmétique.*

Soit, par exemple, proposé de trouver le nombre de la cellule ξ du cinquième rang perpendiculaire, et du troisième rang parallèle.

Ayant pris tous les nombres qui précèdent l'exposant du perpendiculaire 5; savoir 1, 2, 3, 4; soient pris autant de nombres naturels, à commencer par l'exposant du parallèle 3; savoir, 3, 4, 5, 6.

Soient multipliés les premiers l'un par l'autre, et soit le produit 24. Soient multipliés les autres l'un par l'autre, et soit le produit 360, qui, divisé par l'autre produit 24, donne pour quotient 15 : ce quotient est le nombre cherché.

Car ξ est à la première de sa base V, en raison composée de toutes les raisons des cellules d'entre-deux, c'est-à-dire,

ξ est à V,

en raison composée de. . . . . ξ à ρ + ρ à K + K à Q + Q à V
ou par la douzième conséquence. . . . . . . 3 à 4   4 à 3   5 à 2   6 à 1

Donc ξ est à V comme 3 en 4 en 5 en 6, à 4 en 3 en 2 en 1.

Mais V est l'unité; donc ξ est le quotient de la division du produit de 3 en 4 en 5 en 6, par le produit de 4 en 3 en 2 en 1.

Avertissement. — Si le générateur n'étoit pas l'unité, il eût fallu multiplier le quotient par le générateur.

DIVERS USAGES DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE,

DONT LE GÉNÉRATEUR EST L'UNITÉ.

Après avoir donné les proportions qui se rencontrent entre les cellules et les rangs des triangles arithmétiques, je passe à divers usages de ceux dont le générateur est l'unité; c'est ce qu'on verra dans les traités suivants. Mais j'en laisse bien plus que je n'en donne; c'est une chose

étrange combien il est fertile en propriétés! Chacun peut s'y exercer: j'avertis seulement ici que, dans toute la suite, je n'entends parler que des triangles arithmétiques, dont le générateur est l'unité.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE POUR LES ORDRES NUMÉRIQUES.

On a considéré dans l'arithmétique les nombres des différentes progressions; on a aussi considéré ceux des différentes puissances et des différens degrés; mais on n'a pas, ce me semble, assez examiné ceux dont je parle, quoiqu'ils soient d'un très-grand usage : et même ils n'ont pas de nom; ainsi j'ai été obligé de leur en donner; et parce que ceux de *progression*, de *degré* et de *puissance* sont déjà employés, je me sers de celui d'*ordres*.

J'appelle donc *nombres du premier ordre*, les simples unités

1, 1, 1, 1, 1, etc.

J'appelle *nombres du second ordre*, les naturels qui se forment par l'addition des unités,

1, 2, 3, 4, 5, etc.

J'appelle *nombres du troisième ordre*, ceux qui se forment par l'addition des naturels, qu'on appelle *triangulaires*,

1, 3, 6, 10, etc.

C'est-à-dire, que le second des triangulaires; savoir, 3, égale la somme des deux premiers naturels, qui sont 1, 2; ainsi le troisième triangulaire 6 égale la somme des trois premiers naturels, 1, 2, 3, etc.

J'appelle *nombres du quatrième ordre*, ceux qui se forment par l'addition des triangulaires, qu'on appelle *pyramidaux*,

1, 4, 10, 20, etc.

J'appelle *nombres du cinquième ordre*, ceux qui se forment par l'addition des précédens, auxquels on n'a pas donné de nom exprès, et qu'on pourroit appeler *triangulo-triangulaires :*

1, 5, 15, 35, etc.

J'appelle *nombres du sixième ordre*, ceux qui se forment par l'addition des précédens

1, 6, 21, 56, 126, 252, etc.

Et ainsi à l'infini, 1, 7, 28, 84, etc.

1, 8, 36, 120, etc.

Or, si on fait une table de tous les ordres des nombres, où l'on marque à côté les exposans des ordres, et au-dessus les racines, en cette sorte

	Racines.	1	2	3	4	5	etc.
Unités......	Ordre 1	1	1	1	1	1	etc.
Naturels....	Ordre 2	1	2	3	4	5	etc.
Triangulaires..	Ordre 3	1	3	6	10	15	etc.
Pyramidaux...	Ordre 4	1	4	10	20	35	etc.

on trouvera cette table pareille au triangle arithmétique; et le pre-

mier ordre des nombres sera le même que le premier rang parallèle du triangle ; le second ordre des nombres sera le même que le second rang parallèle : et ainsi à l'infini.

Car dans le triangle arithmétique le premier rang est tout d'unités, et le premier ordre des nombres est de même tout d'unités.

Ainsi dans le triangle arithmétique, chaque cellule, comme la cellule F, égale C + B + A, c'est-à-dire qu'elle égale sa supérieure, plus toutes celles qui précèdent cette supérieure dans son rang parallèle, comme il a été prouvé dans la deuxième conséquence du traité de ce triangle : et la même chose se trouve dans chacun des ordres des nombres ; car, par exemple, le troisième des pyramidaux 10 égale les trois premiers des triangulaires 1 + 3 + 6, puisqu'il est formé par leur addition.

D'où il se voit manifestement que les rangs parallèles du triangle ne sont autre chose que les ordres des nombres, et que les exposans des rangs parallèles sont les mêmes que les exposans des ordres, et que les exposans des rangs perpendiculaires sont les mêmes que les racines : et ainsi le nombre, par exemple, 21, qui dans le triangle arithmétique se trouve dans le troisième rang parallèle, et dans le sixième rang perpendiculaire, étant considéré entre les ordres numériques, il sera du troisième ordre, et le sixième de son ordre, ou de la sixième racine.

Ce qui fait connoître que tout ce qui a été dit des rangs et des cellules du triangle arithmétique, convient exactement aux ordres des nombres, et que les mêmes égalités et les mêmes proportions qui ont été remarquées aux uns, se trouveront aussi aux autres ; il ne faudra seulement que changer les énonciations, en substituant les termes qui conviennent aux ordres numériques, comme ceux de *racine* et d'*ordre*, à ceux qui convenoient au triangle arithmétique, comme de *rang parallèle* et *perpendiculaire*. J'en donnerai un petit traité à part, où quelques exemples qui y sont rapportés, feront aisément apercevoir tous les autres.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE POUR LES COMBINAISONS.

Le mot de *combinaison* a été pris en plusieurs sens différens, de sorte que, pour ôter l'équivoque, je suis obligé de dire comment je l'entends.

Lorsque de plusieurs choses on donne le choix d'un certain nombre, toutes les manières d'en prendre autant qu'il est permis entre toutes celles qui sont présentées, s'appellent ici les *différentes combinaisons*.

Par exemple, si de quatre choses exprimées par ces quatre lettres, A, B, C, D, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques, toutes les manières d'en prendre deux différentes dans les quatre qui sont proposées, s'appellent *combinaisons*.

Ainsi on trouvera par expérience, qu'il y a six manières différentes d'en choisir deux dans quatre, car on peut prendre A et B, ou A et C, ou A et D, ou B et C, ou B et D, ou C et D.

Je ne compte pas A et A pour une des manières d'en prendre deux ; car ce ne sont pas des choses différentes, ce n'en est qu'une répétée.

Ainsi je ne compte pas A et B, et puis B et A pour deux manières différentes; car on ne prend en l'une et en l'autre manière que les deux mêmes choses, mais d'un ordre différent seulement; et je ne prends point garde à l'ordre : de sorte que je pouvois m'expliquer en un mot à ceux qui ont accoutumé de considérer les combinaisons, en disant simplement que je parle seulement des combinaisons qui se font sans changer l'ordre.

On trouvera de même, par expérience, qu'il y a quatre manières de prendre trois choses dans quatre; car on peut prendre ABC, ou ABD, ou ACD, ou BCD.

Enfin on trouvera qu'on ne peut en prendre quatre dans quatre qu'en une manière, savoir, ABCD.

Je parlerai donc en ces termes :

1 dans 4 se combine 4 fois.
2 dans 4 se combine 6 fois.
3 dans 4 se combine 4 fois.
4 dans 4 se combine 1 fois.

Ou ainsi :

La multitude des combinaisons de 1 dans 4 est 4.
La multitude des combinaisons de 2 dans 4 est 6.
La multitude des combinaisons de 3 dans 4 est 4.
La multitude des combinaisons de 4 dans 4 est 1.

Mais la somme de toutes les combinaisons, en général, qu'on peut faire dans 4, est 15, parce que la multitude des combinaisons de 1 dans 4, de 2 dans 4, de 3 dans 4, de 4 dans 4, étant jointes ensemble, font 15.

Ensuite de cette explication, je donnerai ces conséquences en forme de lemmes.

Lemme I. — Un nombre ne se combine point dans un plus petit, par exemple, 4 ne se combine point dans 2.

Lemme II. 1 dans 1 se combine 1 fois.
2 dans 2 se combine 1 fois.
3 dans 3 se combine 1 fois.

Et généralement un nombre quelconque se combine une fois seulement dans son égal.

Lemme III. 1 dans 1 se combine 1 fois.
1 dans 2 se combine 2 fois.
1 dans 3 se combine 3 fois.

Et généralement l'unité se combine dans quelque nombre que ce soit autant de fois qu'il contient d'unités.

Lemme IV. — S'il y a quatre nombres quelconques, le premier tel qu'on voudra, le second plus grand de l'unité, le troisième tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne soit pas moindre que le second, le quatrième plus grand de l'unité que le troisième : la multitude des combinaisons du premier dans le troisième, jointe à la multitude des combinaisons du second dans le troisième, égale la multitude des combinaisons du second dans le quatrième.

Soient quatre nombres tels que j'ai dit :

Le premier tel qu'on voudra, par exemple, 1.
Le second plus grand de l'unité, savoir, 2.
Le troisième tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne soit pas moindre que le second, par exemple ; 3.
Le quatrième plus grand de l'unité, savoir, 4.

Je dis que la multitude des combinaisons de 1 dans 3, plus la multitude des combinaisons de 2 dans 3, égale la multitude des combinaisons de 2 dans 4.

Soient trois lettres quelconques, B, C, D.

Soient les mêmes trois lettres, et une de plus, A, B, C, D.

Prenons, suivant la proposition, toutes les combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D; il y en aura trois, savoir, B, C, D.

Prenons dans les mêmes trois lettres toutes les combinaisons de deux, il y en aura trois, savoir, BC, BD, CD.

Prenons enfin dans les quatre lettres A, B, C, D toutes les combinaisons de deux, il y en aura six, savoir, AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Il faut démontrer que la multitude des combinaisons de 1 dans 3 et celles de 2 dans 3, égalent celles de 2 dans 4.

Cela est aisé, car les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 1 dans 3, et par celles de 2 dans 3.

Pour le faire voir, il faut remarquer qu'entre les combinaisons de 2 dans 4, savoir, AB, AC, AD, BC, BD, CD, il y en a où la lettre A est employée, et d'autres où elle ne l'est pas.

Celles où elle n'est pas employée sont, BC, BD, CD, qui par conséquent sont formées de deux de ces trois lettres, B, C, D; donc ce sont des combinaisons de 2 dans ces trois, B, C, D. Donc les combinaisons de 2 dans ces trois lettres, B, C, D, font portion des combinaisons de 2 dans ces quatre lettres, A, B, C, D, puisqu'elles forment celles où A n'est pas employé.

Maintenant si des combinaisons de 2 dans 4 où A est employé, savoir AB, AC, AD, on ôte l'A, il restera une lettre seulement de ces trois, B, C, D, savoir, B, C, D, qui sont précisément les combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D. Donc si aux combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D, on ajoute à chacune la lettre A, et qu'ainsi on ait AB, AC, AD, on formera les combinaisons de 2 dans 4, où A est employé; donc les combinaisons de 1 dans 3 font portion des combinaisons de 2 dans 4.

D'où il se voit que les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 2 dans 3, et de 1 dans 3; et partant que la multitude des combinaisons de 2 dans 4 égale celle de 2 dans 3, et de 1 dans 3.

On montrera la même chose dans tous les autres exemples, comme :

La multitude des combinaisons de 29 dans 40, et la multitude des combinaisons de 30 dans 40, égalent la multitude des combinaisons de 30 dans 41. Ainsi la multitude des combinaisons de 15 dans 55, et la multitude des combinaisons de 16 dans 55, égalent la multitude des

combinaisons de 16 dans 56; et ainsi à l'infini. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition I. — *En tout triangle arithmétique, la somme des cellules d'un rang parallèle quelconque égale la multitude des combinaisons de l'exposant du rang dans l'exposant du triangle.*

Soit un triangle quelconque, par exemple, le quatrième GDλ : je dis que la somme des cellules d'un rang parallèle quelconque, par exemple, du second, $\varphi+\psi+\theta$, égale la somme des combinaisons de ce nombre 2, qui est l'exposant de ce second rang, dans ce nombre 4, qui est l'exposant de ce triangle :

Ainsi la somme des cellules du cinquième rang du huitième triangle égale la somme des combinaisons de 5 dans 8, etc.

La démonstration en sera courte, quoiqu'il y ait une infinité de cas, par le moyen de ces deux lemmes.

Le premier, qui est évident de lui-même, que dans le premier triangle cette égalité se trouve, puisque la somme des cellules de son unique rang, savoir G, ou l'unité, égale la somme des combinaisons de 1, exposant du rang, dans 1, exposant du triangle.

Le deuxième, que, s'il se trouve un triangle arithmétique dans lequel cette proportion se rencontre, c'est-à-dire dans lequel, quelque rang que l'on prenne, il arrive que la somme des cellules soit égale à la multitude des combinaisons de l'exposant du rang dans l'exposant du triangle : je dis que le triangle suivant aura la même propriété.

D'où il s'ensuit que tous les triangles arithmétiques ont cette égalité; car elle se trouve dans le premier triangle par le premier lemme, et même elle est encore évidente dans le second; donc par le second lemme, le suivant l'aura de même, et partant le suivant encore; et ainsi à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second lemme.

Soit un triangle quelconque, par exemple, le troisième, dans lequel on suppose que cette égalité se trouve, c'est-à-dire, que la somme des cellules du premier rang $G+\sigma+\pi$ égale la multitude des combinaisons de 1 dans 3; et que la somme des cellules du deuxième rang $\varphi+\psi$ égale les combinaisons de 2 dans 3; et qne la somme des cellules du troisième rang A égale les combinaisons de 3 dans 3 : je dis que le quatrième triangle aura la même égalité, et que, par exemple, la somme des cellules du second rang $\varphi+\psi+\theta$ égale la multitude des combinaisons de 2 dans 4.

Car $\varphi+\psi+\theta$ égale	$\varphi+\psi$	+	θ
		+	$G+\sigma+\pi$
Par l'hypothèse	ou la multitude des combinaisons de 2 dans 3.	+	ou la multitude des combinaisons de 1 dans 3.
Par le quatrième lemme	Ou la multitude des combinaisons de 2 dans 4.		

On le montrera de même de tous les autres. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition II. — *Le nombre de quelque cellule que ce soit égale la*

multitude des combinaisons d'un nombre moindre de l'unité que l'exposant de son rang parallèle, dans un nombre moindre de l'unité que l'exposant de sa base.

Soit une cellule quelconque, F, dans le quatrième rang parallèle et dans la sixième base; je dis qu'elle égale la multitude des combinaisons de 3 dans 5, moindres de l'unité que 4 et 6, car elle égale les cellules A + B + C. Donc par la précédente, etc.

Problème I. Proposition III. — *Étant proposés deux nombres, trouver combien de fois l'un se combine dans l'autre, par le triangle arithmétique.*

Soient les nombres proposés 4, 6, il faut trouver combien 4 se combine dans 6.

Premier moyen. — Soit prise la somme des cellules du quatrième rang du sixième triangle : elle satisfera à la question.

Second moyen. — Soit prise la cinquième cellule de la septième base, parce que ces nombres 5, 7 excèdent de l'unité les donnés 4, 6 : son nombre est celui qu'on demande.

Conclusion. — Par le rapport qu'il y a des cellules et des rangs du triangle arithmétique aux combinaisons, il est aisé de voir que tout ce qui a été prouvé des uns convient aux autres suivant leur manière; c'est ce que je montrerai en peu de discours dans un petit traité que j'ai fait des combinaisons.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

Pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties.

Pour entendre les règles des partis, la première chose qu'il faut considérer, est que l'argent que les joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la propriété; mais ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que le hasard peut leur en donner, suivant les conditions dont ils sont convenus d'abord.

Mais comme c'est une loi volontaire, ils peuvent la rompre de gré à gré; et ainsi, en quelque terme que le jeu se trouve, ils peuvent le quitter; et au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, renoncer à l'attente du hasard, et rentrer chacun en la propriété de quelque chose; et en ce cas, le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avoient droit d'espérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne, ou de continuer l'aventure du jeu : et cette juste distribution s'appelle *le parti.*

Le premier principe qui fait connoître de quelle sorte on doit faire les partis, est celui-ci :

Si un des joueurs se trouve en telle condition, que, quoi qu'il arrive, une certaine somme doit lui appartenir en cas de perte et de gain, sans que le hasard puisse la lui ôter; il ne doit en faire aucun parti, mais la prendre entière comme assurée, parce que le parti devant être propor-

tionné au hasard, puisqu'il n'y a nul hasard de perdre, il doit tout retirer sans parti.

Le second est celui-ci : Si deux joueurs se trouvent en telle condition que, si l'un gagne, il lui appartiendra une certaine somme, et s'il perd, elle appartiendra à l'autre; si le jeu est de pur hasard, et qu'il y ait autant de hasards pour l'un que pour l'autre, s'ils veulent se séparer sans jouer, et prendre ce qui leur appartient légitimement, le parti est qu'ils séparent la somme qui est au hasard par la moitié, et que chacun prenne la sienne.

COROLLAIRE I. — *Si deux joueurs jouent à un jeu de pur hasard, à condition que, si le premier gagne, il lui reviendra une certaine somme, et s'il perd, il lui en reviendra une moindre; s'ils veulent se séparer sans jouer, et prendre chacun ce qui leur appartient, le parti est, que le premier prenne ce qui lui revient en cas de perte, et de plus la moitié de l'excès dont ce qui lui reviendroit en cas de gain surpasse ce qui lui revient en cas de perte.*

Par exemple, si deux joueurs jouent à condition que, si le premier gagne, il emportera 8 pistoles, et s'il perd, il en emportera 2 : je dis que le parti est qu'il prenne ces 2, plus la moitié de l'excès de 8 sur 2, c'est-à-dire, plus 3, car 8 surpasse 2 de 6, dont la moitié est 3.

Car par l'hypothèse, s'il gagne, il emporte 8, c'est-à-dire, $6+2$, et s'il perd, il emporte 2; donc ces 2 lui appartiennent en cas de perte et de gain : et par conséquent, par le premier principe, il ne doit en faire aucun parti, mais les prendre entières. Mais pour les 6 autres, elles dépendent du hasard; de sorte que s'il lui est favorable, il les gagnera, sinon, elles reviendront à l'autre; et par l'hypothèse, il n'y a pas plus de raison qu'elles reviennent à l'un qu'à l'autre : donc le parti est qu'ils les séparent par la moitié, et que chacun prenne la sienne, qui est ce que j'avois proposé.

Donc, pour dire la même chose en d'autres termes, il lui appartient le cas de la perte, plus la moitié de la différence des cas de perte et de gain.

Et partant, si en cas de perte, il lui appartient A, et en cas de gain $A+B$, le parti est qu'il prenne $A+\frac{1}{2}B$.

COROLLAIRE II. — *Si deux joueurs sont en la même condition que nous venons de dire : je dis que le parti peut se faire de cette façon, qui revient au même, que l'on assemble les deux sommes de gain et de perte, et que le premier prenne la moitié de cette somme; c'est-à-dire qu'on joigne* 2 *avec* 8, *et ce sera* 10, *dont la moitié* 5 *appartiendra au premier.*

Car la moitié de la somme de deux nombres est toujours la même que la moindre, plus la moitié de leur différence. Et cela se démontre ainsi :

Soit A ce qui revient en cas de perte, et $A+B$ ce qui revient en cas de gain : je dis que le parti se fait en assemblant ces deux nombres, qui font $A+A+B$, et en donnant la moitié au premier, qui est $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$. Car cette somme égale $A+\frac{1}{2}B$, qui a été prouvée faire le parti juste.

Ces fondemens étant posés, nous passerons aisément à déterminer le parti entre deux joueurs qui jouent en tant de parties qu'on voudra, en quelque état qu'ils se trouvent, c'est-à-dire, quel parti il faut faire quand ils jouent en deux parties, et que le premier en a une à point, ou qu'ils jouent en trois, et que le premier en a une à point, ou quand il en a deux à point, ou quand il en a deux à une; et généralement en quelque nombre de parties qu'ils jouent, et en quelque gain de parties qu'ils soient, et l'un, et l'autre.

Sur quoi la première chose qu'il faut remarquer, est que deux joueurs qui jouent en deux parties, dont le premier en a une à point, sont en même condition que deux autres qui jouent en trois parties, dont le premier en a deux, et l'autre une : car il y a cela de commun que, pour achever, il ne manque qu'une partie au premier, et deux à l'autre : et c'est en cela que consiste la différence des avantages, et qui doit régler les partis; de sorte qu'il ne faut proprement avoir égard qu'au nombre des parties qui restent à gagner à l'un et à l'autre, et non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées, puisque, comme nous avons déjà dit, deux joueurs se trouvent en même état, quand jouant en deux parties, l'un en a une à point, que deux qui jouant en douze parties, l'un en a onze à dix.

Il faut donc proposer la question en cette sorte :

Étant proposés deux joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, faire le parti.

J'en donnerai ici la méthode, que je poursuivrai seulement en deux ou trois exemples, qui seront si aisés à continuer, qu'il ne sera pas nécessaire d'en donner davantage.

Pour faire la chose générale sans rien omettre, je la prendrai par le premier exemple, qu'il est peut-être mal à propos de toucher, parce qu'il est trop clair; je le fais pourtant pour commencer par le commencement; c'est celui-ci :

Premier cas. — Si à un des joueurs il ne manque aucune partie, et à l'autre quelques-unes, la somme entière appartient au premier; car il l'a gagnée, puisqu'il ne lui manque aucune des parties dans lesquelles il devoit la gagner.

Second cas. — Si à un des joueurs il manque une partie, et à l'autre une, le parti est qu'ils séparent l'argent par la moitié, et que chacun prenne la sienne : cela est évident par le second principe. Il en est de même s'il manque deux parties à l'un, et deux à l'autre; et de même quelque nombre de parties qui manque à l'un, s'il en manque autant à l'autre.

Troisième cas. — Si à un des joueurs il manque une partie, et à l'autre deux, voici l'art de trouver le parti.

Considérons ce qui appartiendroit au premier joueur (à qui il ne manque qu'une partie) en cas de gain de la partie qu'ils vont jouer, et puis ce qui lui appartiendroit en cas de perte.

Il est visible que si celui à qui il ne manque qu'une partie, gagne cette partie qui va se jouer, il ne lui en manquera plus; donc tout lui appartiendra par le premier cas. Mais, au contraire, si celui à qui il manque

deux parties, gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui en manquera plus qu'une; donc ils seront en telle condition, qu'il en manquera une à l'un, et une à l'autre. Donc ils doivent partager l'argent par la moitié, par le deuxième cas.

Donc si le premier gagne cette partie qui va se jouer, il lui appartient tout, et s'il la perd, il lui appartient la moitié; donc, en cas qu'ils veuillent se séparer sans jouer cette partie, il lui appartient $\frac{3}{4}$ par le second corollaire.

Et si on veut proposer un exemple de la somme qu'ils jouent, la chose sera bien plus claire.

Posons que ce soit 8 pistoles; donc le premier en cas de gain, doit avoir le tout, qui est 8 pistoles, et en cas de perte, il doit avoir la moitié, qui est 4; donc il lui appartient en cas de parti la moitié de $8+4$, c'est-à-dire, 6 pistoles de 8; car $8+4$ font 12, dont la moitié est 6.

Quatrième cas. — Si à un des joueurs il manque une partie, et à l'autre trois, le parti se trouvera de même en examinant ce qui appartient au premier en cas de gain et de perte.

Si le premier gagne, il aura toutes ses parties, et partant tout l'argent, qui est, par exemple, 8.

Si le premier perd, il ne faudra plus que deux parties à l'autre à qui il en falloit trois. Donc ils seront en tel état, qu'il faudra une partie au premier, et deux à l'autre; et partant, par le cas précédent, il appartiendra 6 pistoles au premier.

Donc en cas de gain, il lui en faut 8, et en cas de perte 6; donc en cas de parti, il lui appartient la moitié de ces deux sommes, savoir, 7; car $6+8$ font 14, dont la moitié est 7.

Cinquième cas. — Si à un des joueurs il manque une partie, et à l'autre quatre, la chose est de même.

Le premier, en cas de gain, gagne tout, qui est, par exemple, 8; et en cas de perte, il manque une partie au premier, et trois à l'autre; donc il lui appartient 7 pistoles de 8; donc en cas de parti, il lui appartient la moitié de 8, plus la moitié de 7, c'est-à-dire, $7\frac{1}{2}$.

Sixième cas. — Ainsi, s'il manque une partie à l'un, et cinq à l'autre; et à l'infini.

Septième cas. — De même s'il manque deux parties au premier, et trois à l'autre; car il faut toujours examiner les cas de gain et de perte.

Si le premier gagne, il lui manquera une partie, et à l'autre trois; donc par le quatrième cas il lui appartient 7 de 8.

Si le premier perd, il lui manquera deux parties, et à l'autre deux; donc par le deuxième cas, il appartient à chacun la moitié, qui est 4; donc en cas de gain, le premier en aura 7, et en cas de perte, il en aura 4; donc en cas de parti, il aura la moitié de ces deux ensemble, savoir, $5\frac{1}{2}$.

Par cette méthode on fera les partis sur toutes sortes de conditions, en prenant toujours ce qui appartient en cas de gain et ce qui appartient en cas de perte, et assignant pour le cas de parti la moitié de ces deux sommes.

Voilà une des manières de faire les partis.

Il y en a deux autres, l'une par le triangle arithmétique, et l'autre par les combinaisons.

Méthode pour faire les partis entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties, par le moyen du triangle arithmétique. — Avant que de donner cette méthode, il faut faire ce lemme.

Lemme. — *Si deux joueurs jouent à un jeu de pur hasard, à condition que, si le premier gagne, il lui appartiendra une portion quelconque sur la somme qu'ils jouent, exprimée par une fraction, et que, s'il perd, il lui appartiendra une moindre portion sur la même somme, exprimée par une autre fraction : s'ils veulent se séparer sans jouer, la condition du parti se trouvera en cette sorte. Soient réduites les deux fractions à même dénomination, si elles n'y sont pas; soit prise une fraction dont le numérateur soit la somme des deux numérateurs, et le dénominateur double du précédent : cette fraction exprime la portion qui appartient au premier sur la somme qui est au jeu.*

Par exemple, qu'en cas de gain il appartienne les $\frac{3}{5}$ de la somme qui est au jeu, et qu'en cas de perte, il lui appartienne $\frac{1}{5}$: je dis que ce qui lui appartient en cas de parti, se trouvera en prenant la somme des numérateurs, qui est 4, et le double du dénominateur, qui est 10, dont on fait la fraction $\frac{4}{10}$.

Car par ce qui a été démontré au deuxième corollaire, il falloit assembler les cas de gain et de perte, et en prendre la moitié; or la somme des deux fractions $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$ est $\frac{4}{5}$, qui se fait par l'addition des numérateurs, et sa moitié se trouve en doublant le dénominateur, et ainsi l'on a $\frac{4}{10}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Or ces règles sont générales et sans exception, quoi qui revienne en cas de perte ou de gain; car si, par exemple, en cas de gain, il appartient $\frac{1}{2}$, et en cas de perte rien, en réduisant les deux fractions à même dénominateur, on aura $\frac{1}{2}$ pour le cas de gain, et $\frac{0}{2}$ pour le cas de perte; donc en cas de parti, il faut cette fraction $\frac{1}{4}$, dont le numérateur égale la somme des autres, et le dénominateur est double du précédent.

Ainsi si en cas de gain, il appartient tout, et en cas de perte $\frac{1}{3}$, en réduisant les fractions à même dénomination, on aura $\frac{3}{3}$ pour le cas de gain, et $\frac{1}{3}$, pour celui de la perte; donc en cas de parti, il appartient $\frac{4}{6}$.

Ainsi, si en cas de gain il appartient tout, et en cas de perte rien, le parti sera visiblement $\frac{1}{2}$; car le cas de gain est $\frac{1}{1}$, et le cas de perte $\frac{0}{1}$, donc le parti est $\frac{1}{2}$.

Et ainsi de tous les cas possibles.

Problème I. Proposition I. — *Étant proposés deux joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le triangle arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer), eu égard aux parties qui manquent à chacun.*

Soit prise dans le triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble : ensuite soient prises dans cette base autant de cellules continues à commencer par la première, qu'il manque de parties au premier joueur, et qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules qu'il manque

de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres : ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des joueurs réciproquement; de sorte que si la somme qu'ils jouent est égale à la somme des nombres de toutes les cellules de la base, il en appartiendra à chacun ce qui est contenu en autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre; et s'ils jouent une autre somme, il leur en appartiendra à proportion.

Par exemple, qu'il y ait deux joueurs, au premier desquels il manque deux parties, et à l'autre quatre : il faut trouver le parti.

Soient ajoutés ces deux nombres 2 et 4, et soit leur somme 6; soit prise la sixième base du triangle arithmétique P δ, dans laquelle il y a par conséquent six cellules P, M, F, ω, S, δ. Soient prises autant de cellules à commencer par la première P, qu'il manque de parties au premier joueur, c'est-à-dire, les deux premières P, M; donc il en reste autant que de parties à l'autre, c'est-à-dire, quatre, F, ω, S, δ : je dis que l'avantage du premier est à l'avantage du second, comme $F+\omega+S+\delta$ à $P+M$, c'est-à-dire que, si la somme qui se joue est égale à $P+M+F+\omega+S+\delta$, il en appartient à celui à qui il manque deux parties la somme des quatre cellules $\delta+S+\omega+F$; et à celui à qui il manque quatre parties, la somme des deux cellules $P+M$: et s'ils jouent une autre somme, il leur en appartient à proportion.

Et pour le dire généralement, quelque somme qu'ils jouent, il en appartient au premier une portion exprimée par cette fraction

$$\frac{F+\omega+S+\delta}{P+M+F+\omega+S+\delta},$$

dont le numérateur est la somme des quatre cellules de l'autre, et le dénominateur la somme de toutes les cellules; et à l'autre une portion exprimée par cette fraction, $\frac{P+M}{P+M+F+\omega+S+\delta}$, dont le numérateur est la somme des deux cellules de l'autre, et le dénominateur la même somme de toutes les cellules.

Et s'il manque une partie à l'un, et cinq à l'autre, il appartient au premier la somme des cinq premières cellules $P+M+F+\omega+S$, et à l'autre la somme de la cellule δ.

Et s'il manque six parties à l'un, et deux à l'autre, le parti s'en trouvera dans la huitième base, dans laquelle les six premières cellules contiennent ce qui appartient à celui à qui il manque deux parties, et les deux autres, ce qui appartient à celui à qui il en manque six; et ainsi à l'infini.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux lemmes.

Le premier, que la seconde base contient les partis des joueurs auxquels il manque deux parties en tout. Le deuxième, que, si une base quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la base suivante sera de même, c'est-à-dire qu'elle contiendra aussi les partis des joueurs auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules.

D'où je conclus, en un mot, que toutes les bases du triangle arithmétique ont cette propriété : car la seconde l'a par le premier lemme; donc par le second lemme, la troisième l'a aussi, et par conséquent la quatrième; et ainsi à l'infini. Ce qu'il falloit démontrer.

Il faut donc seulement démontrer ces deux lemmes.

Le premier est évident de lui-même; car s'il manque une partie à l'un et une à l'autre, il est évident que leurs conditions sont comme φ à σ, c'est à dire comme 1 à 1, et qu'il appartient à chacun cette fraction,

$$\frac{\sigma}{\varphi+\sigma} \text{ qui est } \tfrac{1}{2}.$$

Le deuxième se démontrera de cette sorte.

Si une base quelconque, comme la quatrième D λ, contient les partis de ceux à qui il manque quatre parties, c'est-à-dire que, s'il manque une partie au premier, et trois au second, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, soit celle qui est exprimée par cette fraction $\frac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$, qui a pour dénominateur la somme des cellules de cette base, et pour numérateur ses trois premières; et que, s'il manque deux parties à l'un, et deux à l'autre, la fraction qui appartient au premier soit $\frac{D+B}{D+B+\theta+\lambda}$; et que, s'il manque trois parties au premier, et une à l'autre, la fraction du premier soit $\frac{D}{D+B+\theta+\lambda}$, etc. Je dis que la cinquième base contient aussi les partis de ceux auxquels il manque cinq parties; et que s'il manque, par exemple, deux parties au premier, et trois à l'autre, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, est exprimée par cette fraction,

$$\frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}.$$

Car pour savoir ce qui appartient à deux joueurs à chacun desquels il manque quelques parties, il faut prendre la fraction qui appartiendroit au premier en cas de gain, et celle qui lui appartiendroit en cas de perte, les mettre à même dénomination, si elles n'y sont pas, et en former une fraction, dont le numérateur soit la somme des deux autres, et le dénominateur double de l'autre, par le lemme précédent.

Examinons donc les fractions qui appartiendroient à notre premier joueur en cas de gain et de perte.

Si le premier, à qui il manque deux parties, gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui manquera plus qu'une partie, et à l'autre, toujours trois; donc il leur manque quatre parties en tout; donc, par l'hypothèse, leur parti se trouve en la base quatrième, et il appartiendra au premier cette fraction $\frac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$.

Si au contraire le premier perd, il lui manquera toujours deux parties, et deux seulement à l'autre; donc par l'hypothèse la fraction du

premier sera $\frac{D+B}{D+B+\theta+\lambda}$. Donc en cas de parti il appartiendra au premier cette fraction

$$\frac{D+B+\theta+D+B}{2D+2B+2\theta+2\lambda}, \text{ c'est-à-dire, } \frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

Ainsi cela se démontre en toutes les autres bases sans aucune différence, parce que le fondement de cette preuve est qu'une base est toujours double de sa précédente par la septième conséquence, et que, par la dixième conséquence, tant de cellules qu'on voudra d'une même base sont égales à autant de la base précédente (qui est toujours le dénominateur de la fraction en cas de gain) plus encore aux mêmes cellules, excepté une (qui est le numérateur de la fraction en cas de perte); ce qui étant vrai généralement partout, la démonstration sera toujours sans obstacle et universelle.

Problème II. Proposition II. — *Étant proposés deux joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties proposé, trouver dans le triangle arithmétique la valeur de la dernière partie sur l'argent du perdant.*

Par exemple, que deux joueurs jouent chacun 3 pistoles en quatre parties : on demande la valeur de la dernière partie sur les 3 pistoles du perdant.

Soit prise la fraction, qui a l'unité pour numérateur, et pour dénominateur la somme des cellules de la base quatrième, puisqu'on joue en quatre parties : je dis que cette fraction est la valeur de la dernière partie sur la mise du perdant.

Car si deux joueurs jouant en quatre parties, l'un en a trois à point, et qu'ainsi il en manque une au premier, et quatre à l'autre, il a été démontré que ce qui appartient au premier pour le gain qu'il a fait de ses trois premières parties, est exprimé par cette fraction $\frac{H+E+C+R}{H+E+C+R+\mu}$, qui a pour dénominateur la somme des cellules de la cinquième base, et pour numérateur ses quatre premières cellules; donc, il ne reste sur la somme totale des deux mises que cette fraction $\frac{\mu}{H+E+C+R+\mu}$, laquelle seroit acquise à celui qui a déjà les trois premières parties en cas qu'il gagnât la dernière; donc la valeur de cette dernière sur la somme des deux mises est

$$\frac{\mu}{H+E+C+R+\mu}, \text{ c'est-à-dire, } \frac{\text{l'unité.}}{2D+2B+2\theta+2\lambda}.$$

Or, puisque la somme totale des mises est $2D+2B+2\theta+2\lambda$, la somme de chaque mise est $D+B+\theta+\lambda$; donc la valeur de la dernière partie sur la seule mise du perdant est cette fraction

$$\frac{1}{D+B+\theta+\lambda},$$

double de la précédente, et laquelle a pour numérateur l'unité, et pour

dénominateur la somme des cellules de la quatrième base. Ce qu'il falloit démontrer.

Problème III. Proposition III. — *Étant proposés deux joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties donné, trouver dans le triangle arithmétique la valeur de la première partie sur la mise du perdant.*

Par exemple, que deux joueurs jouent chacun 3 pistoles en quatre parties, on demande la valeur de la première sur la mise du perdant.

Soit ajouté au nombre 4 le nombre 3, moindre de l'unité, et soit la somme 7; soit prise la fraction qui ait pour dénominateur toutes les cellules de la septième base, et pour numérateur la cellule de cette base qui se rencontre dans la dividente; savoir, cette fraction,

$$\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta},$$

je dis qu'elle satisfait au problème.

Car si deux joueurs jouant en quatre parties, le premier en a une à point, il en restera trois à gagner au premier, et quatre à l'autre; donc il appartient au premier sur la somme des deux mises cette fraction

$$\frac{V+Q+K+\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta},$$

qui a pour dénominateur toutes les cellules de la septième base, et pour numérateur ses quatre premières cellules.

Donc il lui appartient $V+Q+K+\rho$ sur la somme totale des deux mises, exprimée par $V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta$; mais cette dernière somme étant l'assemblage des deux mises, il en avoit mis au jeu la moitié; savoir $V+Q+K+\frac{1}{2}\rho$ (car $V+Q+K$ sont égaux à $\zeta+N+\xi$).

Donc il a $\frac{1}{2}\rho$, c'est-à-dire ω, plus qu'il n'avoit en entrant au jeu; donc il a gagné sur la somme totale des deux mises une portion exprimée par cette fraction $\frac{\omega}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$; donc il a gagné sur la mise du perdant une portion qui sera double de celle-là; savoir, celle qui est exprimée par cette fraction $\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$.

Donc le gain de la première partie lui a acquis cette fraction; donc sa valeur est telle.

Corollaire. — Donc la valeur de la première partie de deux sur la mise du perdant, est exprimée par cette fraction $\frac{1}{2}$.

Car en prenant cette valeur suivant la règle qui vient d'en être donnée, il faut prendre la fraction qui a pour dénominateur les cellules de la troisième base (parce que le nombre des parties en quoi on joue est 2, et le nombre moindre de l'unité est 1, qui avec 2 fait 3), et pour numérateur la cellule de cette base qui est dans la dividente; donc on aura cette fraction $\frac{\psi}{A+\psi+\pi}$.

Or le nombre de la cellule ψ est 2, et les nombres des cellules $A+\psi+\pi$, sont $1+2+1$.

Donc on a cette fraction $\frac{2}{1+2+1}$, c'est-à-dire $\frac{2}{4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$.

Donc le gain de la première partie lui a acquis cette fraction; donc sa valeur est telle. Ce qu'il falloit démontrer.

Problème IV. Proposition IV. — *Étant proposés deux joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties donné, trouver par le triangle arithmétique la valeur de la seconde partie sur la mise du perdant.*

Soit le nombre donné des parties dans lesquelles on joue, 4; il faut trouver la valeur de la deuxième partie sur la mise du perdant.

Soit prise la valeur de la première partie par le problème précédent : je dis qu'elle est la valeur de la seconde.

Car deux joueurs jouant en quatre parties, si l'un en a deux à point, la fraction qui lui appartient est celle-ci, $\frac{P+M+F+\omega}{P+M+F+\omega+S+\delta}$, qui a pour dénominateur la somme des cellules de la sixième base, et pour numérateur la somme des quatre premières; mais il en avoit mis au jeu cette fraction $\frac{P+M+F}{P+M+F+\omega+S+\delta}$, savoir, la moitié du tout. Donc il lui reste cette fraction, $\frac{\omega}{P+M+F+\omega+S+\delta}$, qui est la même chose que celle-ci $\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$; donc il a gagné sur la moitié de la somme entière, c'est-à-dire sur la mise du perdant, cette fraction $\frac{2\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$, double de la précédente.

Donc le gain des deux premières parties lui a acquis cette fraction sur l'argent du perdant, qui est le double de ce que la première partie lui avoit acquis par la précédente; donc la seconde partie lui en a autant acquis que la première.

Conclusion. — On peut aisément conclure, par le rapport qu'il y a du triangle arithmétique aux partis qui doivent se faire entre deux joueurs, que les proportions des cellules qui ont été données dans le *Traité du Triangle*, ont des conséquences qui s'étendent à la valeur des partis, qui sont bien aisées à tirer, et dont j'ai fait un petit discours en traitant des partis, qui donne l'intelligence et le moyen de les étendre plus avant.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE POUR TROUVER LES PUISSANCES DES BINÔMES ET APOTOMES.

S'il est proposé de trouver la puissance quelconque, comme le quatrième degré d'un binôme, dont le premier nombre soit A, l'autre l'unité, c'est-à-dire qu'il faille trouver le carré carré de A+1; il faut prendre dans le triangle arithmétique la base cinquième, savoir, celle dont l exposant 5 est plus grand de l'unité que 4, exposant de l'ordre proposé : les cellules de cette cinquième base sont 1, 4, 6, 4, 1, dont

il faut prendre le premier nombre 1 pour coefficient de A au degré proposé, c'est-à-dire de A^4; ensuite il faut prendre le second nombre de la base, qui est 4, pour coefficient de A au degré prochainement inférieur, c'est-à-dire de A^3, et prendre le nombre suivant de la base, savoir 6, pour coefficient de A au degré inférieur, savoir, A^2, et le nombre suivant de la base, savoir, 4, pour coefficient de A au degré inférieur, savoir, A racine, et prendre le dernier nombre de la base 1 pour nombre absolu : et ainsi on aura $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$. qui sera la puissance carree carrée du binôme $A + 1$. De sorte que si A (qui représente tout nombre) est l'unité, et qu'ainsi le binôme $A + 1$ soit le binaire.

cette puissance $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A^2 + 1$

sera maintenant $1.1^4 + 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$.

C'est-à-dire une fois le carré carré de l'unité A, c'est-à-dire	1
Quatre fois le cube de 1, c'est-à-dire........	4
Six fois le carré de 1, c'est-à-dire...........	6
Quatre fois l'unité, c'est-à-dire.............	4
Plus l'unité..............................	1
Qui ajoutés font...........................	16

Et en effet le carré carré de 2 est 16.

Si A est un autre nombre, comme 4, et partant que le binôme $A + 1$ soit 5, alors son carré carré sera toujours, suivant cette méthode, $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$, qui signifie maintenant

$$1.4^4 + 4.4^3 + 6.4^2 + 4.4 + 1.$$

C'est-à-dire une fois le carré carré de 4, savoir........	256
Quatre fois le cube de 4, savoir...........	256
Six fois le carré de 4.....................	96
Quatre fois la racine 4....................	16
Plus l'unité...............................	1
dont la somme..................................	625

fait le carré carré de 5 : et en effet le carré carré de 5 est 625. Et ainsi des autres exemples.

Si on veut trouver le même degré du binôme $A + 2$, il faut prendre de même $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$, et ensuite écrire ces quatre nombres 2, 4, 8, 16, qui sont les quatre premiers degrés de 2, sous les nombres 4, 6, 4, 1, c'est-à-dire sous chacun des nombres de la base, en laissant le premier : en cette sorte

$$\begin{array}{ccccc} 1A^4 + & 4A^3 + & 6A^2 + & 4A^1 + & 1 \\ & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}$$

et multiplier les nombres qui se répondent l'un par l'autre

$$\begin{array}{ccccc} 1A^4 + & 4A^3 + & 6A^2 + & 4A^1 + & 1 \\ & 2 & 4 & 8 & 16. \\ \hline \end{array}$$

en cette sorte $1A^4 + 8A^3 + 24A^2 + 32A^1 + 16$

Et ainsi on aura le carré carré du binôme $A + 2$; de sorte que si A est l'unité, ce carré carré sera tel:

Une fois le carré carré de l'unité A.........	1
Huit fois le cube de l'unité.....	8
Vingt-quatre fois le carré de 1.............	24
Trente-deux fois 1	32
Plus le carré carré de 2..................	16
dont la somme.............	81

sera le carré carré de 3 : et en effet 81 est le carré carré de 3.

Et si A est 2, alors $A + 2$ sera 4, et son carré carré sera

Une fois le carré carré de A ou de 2, savoir..	16
8.2^3..................................	64
24.2^2..................................	96
32.2..................................	64
Plus le carré carré de 2.................	16
dont la somme................................	256

sera le carré carré de 4.

De la même manière on trouvera le carré carré de $A + 3$, en mettant de la même sorte $A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$
et au-dessous les nombres 3 9 27 81 qui sont les quatre premiers degrés de 3; et multipliant les nombres correspondans, on trouvera que le carré carré de $A + 3$ est $1A^4 + 12A^3 + 54A^2 + 108A + 81$. Et ainsi à l'infini.

Si au lieu du carré carré on veut le carré cube, ou le cinquième degré, il faut prendre la base sixième, et en user comme j'ai dit de la cinquième; et ainsi de tous les autres degrés.

On trouvera de même les puissances des apotomes $A - 1$, $A - 2$, etc. La méthode en est toute semblable, et ne diffère qu'aux signes, car les signes de + et de — se suivent toujours alternativement, et le signe de + est toujours le premier.

Ainsi le carré de $A - 1$ se trouvera de cette sorte. Le carré carré de $A + 1$ est par la règle précédente $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$. Donc en changeant les signes comme j'ai dit, on aura $1A^4 - 4A^3 + 6A^2 - 4A + 1$. Ainsi le cube de $A - 2$ se trouvera de même.

Car le cube de $A + 2$, par la règle précédente, est $A^3 + 6A^2 + 12A + 8$. Donc le cube de $A - 2$ se trouvera en changeant les signes

$$A^3 - 6A^2 + 12A - 8.$$

Et ainsi à l'infini.

Je ne donne point la démonstration de tout cela, parce que d'autres en ont déjà traité, comme Hérigogne, outre que la chose est évidente d'elle-même.

TRAITÉ DES ORDRES NUMÉRIQUES.

Je présuppose qu'on a vu le *Traité du Triangle arithmétique*, et son usage pour les ordres numériques; autrement j'y renvoie ceux qui veulent voir ce discours, qui en est proprement une suite. J'y ai donné la définition des ordres numériques, et je ne la répéterai pas. J'y ai montré aussi que le triangle arithmétique n'est autre chose que la table des

ordres numériques; ensuite de quoi il est évident que toutes les propriétés qui ont été données dans le triangle arithmétique entre les cellules ou entre les rangs, conviennent aux ordres numériques : de sorte que si peu qu'on ait l'art d'appliquer les propriétés des uns aux autres, il n'y a point de proposition dans le *Traité du Triangle* qui n'ait ses conséquences touchant les divers ordres : et cela est tout ensemble et si facile, et si abondant, que je suis fort éloigné de vouloir tout donner expressément; j'aimerois mieux laisser tout à faire, puisque la chose est si aisée; mais pour me tenir entre ces deux extrémités, j'en donnerai seulement quelques exemples, qui ouvriront le moyen de trouver tous les autres.

Par exemple : de ce qui a été dit dans une des conséquences du *Traité du Triangle*, que *chaque cellule égale celle qui la précède dans son rang parallèle, plus celle qui la précède dans son rang perpendiculaire*, j'en forme cette proposition touchant les ordres numériques.

PROPOSITION I. — *Un nombre, de quelque ordre que ce soit, égale celui qui le précède dans son ordre, plus son coradical de l'ordre précédent : et par conséquent, le quatrième, par exemple, des pyramidaux égale le troisième pyramidal, plus le quatrième triangulo-triangulaire : ainsi le cinquième triangulo-triangulaire égale le quatrième triangulo-triangulaire, plus le cinquième pyramidal, etc.*

Autre exemple : de ce qui a été montré dans le triangle, que *chaque cellule, comme F, égale* $E+B+\psi+\sigma$, *c'est-à-dire celle qui la précède dans son rang parallèle, plus toutes celles qui précèdent cette précédente dans son rang perpendiculaire*, je forme cette proposition.

PROPOSITION II. — *Un nombre, de quelque ordre que ce soit, égale tous ceux tant de son ordre que de tous les précédens, dont la racine est moindre de l'unité que la sienne; et partant le quatrième des pyramidaux, par exemple, égale le troisième des pyramidaux, plus le troisième des triangulaires, plus le troisième des naturels, plus le troisième des unités, c'est-à-dire l'unité.*

D'où on peut maintenant tirer d'autres conséquences, comme celle-ci, que je donne pour ouvrir le chemin à d'autres pareilles.

PROPOSITION III. — *Chaque nombre, de quelque cellule que ce soit, est composé d'autant de nombres qu'il y a d'ordres depuis le sien jusqu'au premier inclusivement, chacun desquels nombres est de chacun de ces ordres; ainsi un triangulo-triangulaire est composé d'un autre triangulo-triangulaire, d'un pyramidal, d'un triangulaire, d'un naturel et de l'unité.*

Et si on veut en faire un problème, il pourra s'énoncer ainsi.

PROPOSITION IV. PROBLÈME. — *Étant donné un nombre d'un ordre quelconque, trouver un nombre dans chacun des ordres depuis le premier jusqu'au sien inclusivement, dont la somme égale le nombre donné.*

La solution en est facile : il faut prendre dans tous ces ordres les nombres dont la racine est moindre de l'unité que celle du nombre donné.

Autre exemple : de ce que *les cellules correspondantes sont égales entre elles*, il se conclut :

Proposition V. — *Que deux nombres de différens ordres sont égaux entre eux, si la racine de l'un est le même nombre que l'exposant de l'ordre de l'autre : et partant, le troisième pyramidal est égal au quatrième triangulaire : le cinquième du huitième ordre est le même que le huitième du cinquième ordre, etc.*

On n'auroit jamais achevé. Par exemple :

Proposition VI. — *Tous les quatrièmes nombres de tous les ordres sont les mêmes que tous les nombres du quatrième ordre, etc.*

Parce que *les rangs parallèles et perpendiculaires qui ont un même exposant sont composés de cellules toutes pareilles.* Par cette méthode, on trouvera un rapport admirable en tout le reste, comme celui-ci :

Proposition VII. — *Un nombre, de quelque ordre que ce soit, est au prochainement plus grand dans le même ordre, comme la racine du moindre est à cette même racine jointe à l'exposant de l'ordre, moins l'unité.*

Ce qui s'ensuit de la quatorzième conséquence du triangle, où il est montré que *chaque cellule est à celle qui la précède dans son rang parallèle, comme l'exposant de la base de cette précédente à l'exposant de son rang perpendiculaire.* Et afin de ne rien cacher de la manière dont se tirent ces correspondances, j'en montrerai le rapport à découvert : il en est un plus difficile ici que tantôt, parce qu'on ne voit point de rapport de la base des triangles avec les ordres des nombres ; mais voici le moyen de le trouver. Au lieu de *l'exposant de la base* dont j'ai parlé dans cette quatorzième conséquence, il faut substituer *l'exposant du rang parallèle, plus l'exposant du rang perpendiculaire, moins l'unité :* ce qui produit le même nombre, et avec cet avantage, qu'on connoît le rapport qu'il y a de ces exposans avec les ordres numériques : car on sait qu'en ce nouveau langage, il faut dire, *l'exposant de l'ordre, plus la racine, moins l'unité.* Je dis tout ceci, afin de faire toucher la méthode pour faire et pour faciliter ces réductions. Ainsi on trouvera que

Proposition VIII. — *Un nombre, de quelque ordre que ce soit, est à son coradical, de l'ordre suivant, comme l'exposant de l'ordre du moindre est à ce même exposant joint à leur racine commune moins l'unité.*

C'est la treizième conséquence du triangle. Ainsi on trouvera encore que

Proposition IX. — *Un nombre, de quelque ordre que ce soit, est à celui de l'ordre précédent, dont la racine est plus grande de l'unité que la sienne, comme la racine du premier à l'exposant de l'ordre du second.*

Ce n'est que la même chose que la douzième conséquence du triangle arithmétique. J'en laisse beaucoup d'autres, chacune desquelles, aussi bien que de celles que je viens de donner, peut encore être augmentée de beaucoup par de différentes énonciations : car au lieu d'exprimer ces proportions comme j'ai fait, en disant *qu'un nombre est à un autre comme un troisième à un quatrième*, ne peut-on pas dire que *le rectangle des extrêmes est égal à celui des moyens ?* et ainsi multiplier

les propositions, et non sans utilité; car étant regardées d'un autre côté, elles donnent d'autres ouvertures. Par exemple, si on veut tourner autrement cette dernière proposition, on peut l'énoncer ainsi :

Proposition X. — *Un nombre, de quelque ordre que ce soit, étant multiplié par la racine précédente, égale l'exposant de son ordre multiplié par le nombre de l'ordre suivant procédant de cette racine.*

Et parce que, quand quatre nombres sont proportionnels, le rectangle des extrêmes ou des moyens, étant divisé par un des deux autres, donne pour quotient le dernier, on peut dire aussi :

Proposition XI. — *Un nombre, de quelque ordre que ce soit, étant multiplié par la racine précédente, et divisé par l'exposant de son ordre, donne pour quotient le nombre de l'ordre suivant qui procède de cette racine.*

Les manières de tourner une même chose sont infinies : en voici un illustre exemple, et bien glorieux pour moi. Cette même proposition que je viens de rouler en plusieurs sortes, est tombée dans la pensée de notre célèbre conseiller de Toulouse, M. de Fermat; et, ce qui est admirable, sans qu'il m'en eût donné la moindre lumière, ni moi à lui, il écrivoit dans sa province ce que j'inventois à Paris, heure pour heure, comme nos lettres écrites et reçues en même temps le témoignent. Heureux d'avoir concouru en cette occasion, comme j'ai fait encore en d'autres d'une manière tout à fait étrange, avec un homme si grand et si admirable, et qui, dans toutes les recherches de la plus sublime géométrie, est dans le plus haut degré d'excellence, comme ses ouvrages, que nos longues prières ont enfin obtenus de lui, le feront bientôt voir à tous les géomètres de l'Europe, qui les attendent! La manière dont il a pris cette même proposition est telle.

En la progression naturelle qui commence par l'unité, un nombre quelconque étant mené dans le prochainement plus grand, produit le double de son triangle.

Le même nombre, étant mené dans le triangle du prochainement plus grand, produit le triple de sa pyramide.

Le même nombre, mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le quadruple de son triangulo-triangulaire; et ainsi à l'infini, par une méthode générale et uniforme.

Voilà comment on peut varier les énonciations Ce que je montre en cette proposition s'entendant de toutes les autres, je ne m'arrêterai plus à cette manière accommodante de traiter les choses, laissant à chacun d'exercer son génie en ces recherches où doit consister toute l'étude des géomètres : car si on ne sait pas tourner les propositions à tous sens, et qu'on ne se serve que du premier biais qu'on a envisagé, on n'ira jamais bien loin : ce sont ces diverses routes qui ouvrent les conséquences nouvelles, et qui, par des énonciations assorties au sujet, lient des propositions qui sembloient n'avoir aucun rapport dans les termes où elles étoient conçues d'abord. Je continuerai donc ce sujet en la manière dont on a accoutumé de traiter la géométrie, et ce que j'en dirai sera comme un nouveau Traité des ordres numériques; et même je le donnerai en latin, parce qu'il se rencontre que je l'ai écrit ainsi en l'inventant.

DE NUMERICIS ORDINIBUS TRACTATUS[1].

Trianguli arithmetici tractatum, ipsiusque circa numericos ordines usum, supponit tractatus iste, ut et plerique e sequentibus : huc ergo mittitur lector horum cupidus; ibi noscet quid sint ordines numerici, nempe, unitates, numeri naturales, trianguli, pyramides, triangulo-trianguli, etc. Quæ quum per egerit, facile hæc assequetur.

Hic proprie ostenditur connexio inter numerum cujusvis ordinis cum sua radice et exponente sui ordinis, quæ talis est, ut ex his tribus, datis duobus quibuslibet, tertius inveniatur. Verbi gratia, data radice et exponente ordinis, numerus ipse datur; sic dato numero et sui ordinis exponente, radix elicitur; necnon ex dato numero et radice, exponens ordinis invenitur : hæc constituunt tria priora problemata, quartum de summa ordinum agit.

DE NUMERICORUM ORDINUM COMPOSITIONE.

Problema I. — *Datis numeri cujuslibet radice et exponente ordinis componere numerum.*

Productus numerorum qui præcedunt radicem, dividat productum totidem numerorum quorum primus sit exponens ordinis : quotiens erit quæsitus numerus.

Propositum sit invenire numerum ordinis, verbi gratia, tertii, radicis vero quintæ.

---

1. L'importance de ce Traité nous a décidé à en donner la traduction française, qui a été faite par M. Ch. Drion.

TRAITÉ DES ORDRES NUMÉRIQUES.

Pour l'intelligence de ce discours et de la plupart des suivans il est nécessaire de connaître le *Traite du triangle arithmetique* et ses applications. J'y renvoie le lecteur en cas de besoin; il y trouvera les définitions des divers ordres numériques, savoir des simples unités, des nombres naturels, triangulaires, pyramidaux, triangulo-triangulaires, etc.

Il y verra également la relation qui existe entre un nombre quelconque, sa racine et l'exposant de son ordre; cette relation permet, deux des quantités précédentes étant données, de trouver la troisième, et, par conséquent de résoudre les problèmes dont voici les énoncés :

1° Trouver un nombre, connaissant sa racine et l'exposant de son ordre;

2° Connaissant un nombre et l'exposant de son ordre, trouver la racine;

3° Déterminer l'exposant de l'ordre d'un nombre, connaissant ce nombre et sa racine.

Nous allons résoudre successivement ces trois questions; nous traiterons ensuite de la sommation des nombres des divers ordres numériques.

COMPOSITION DES ORDRES NUMÉRIQUES.

Problème I.—*Trouver un nombre, connaissant sa racine et l'exposant de son ordre.*

Formez le produit des nombres naturels qui précèdent la racine donnée, puis le produit d'un pareil nombre de facteurs consécutifs dont le premier soit l'exposant proposé; divisez le deuxième produit par le premier, et le quotient sera le nombre demandé.

Productus numerorum 1, 2, 3, 4, qui præcedunt radicem 5, nempe 24, dividat productum totidem numerorum continuorum 3, 4, 5, 6, quorum primus sit exponens ordinis 3, nempe 360 : quotiens 15, est numerus quæsitus.

Nec difficilis demonstratio : eadem enim prorsus constructione, inventa est, ad finem *Tractatus trianguli arithmetici*, cellula quintæ seriei perpendicularis, tertiæ vero seriei parallelæ; cujus cellulæ numerus, idem est ac numerus quintus ordinis tertii, qui quæritur.

Potest autem et sic resolvi idem problema.

Productus numerorum qui præcedunt exponentem ordinis, dividat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit radix : quotiens est quæsitus.

Sic in proposito exemplo, productus numerorum 1, 2, qui præcedunt exponentem ordinis 3, nempe 2, dividat productum totidem numerorum 5, 6, quorum primus sit radix 5, nempe 30 : quotiens 15 est numerus quæsitus.

Nec differt hæc constructio a præcedente, nisi in hoc solo, quod in altera idem fit de radice, quod fit in altera de exponente ordinis : perinde ac si idem esset invenire, quintum numerum ordinis tertii, ac tertium numerum ordinis quinti; quod quidem verum esse jam ostendimus.

Hinc autem obiter colligere possumus arcanum numericum: quum enim ambo illi quotientes 15 sint iidem, constat divisores esse inter se ut dividendos. Animadvertemus itaque :

Soit, par exemple, proposé de trouver le nombre du troisième ordre dont la racine est 5. On formera le produit des facteurs 1, 2, 3, 4, savoir 24, puis celui des nombres 3, 4, 5, 6 (dont le premier, 3, est l'exposant de l'ordre) savoir 360; le quotient 15 sera le nombre cherché.

La démonstration de cette règle est absolument celle qui a été donnée pour le dernier problème du *Traité du triangle arithmétique*, problème dans lequel on proposait de trouver le nombre du troisème rang parallèle et du cinquième perpendiculaire; ce nombre est évidemment le même que celui du troisième ordre qui a 5 pour racine.

Autre solution. — Formez le produit des nombres naturels qui précèdent l'exposant donné, puis le produit d'un pareil nombre de facteurs consécutifs dont le premier soit la racine proposée; divisez le deuxième produit par le premier, et le quotient sera le nombre demandé.

Pour l'exemple cité, on formera le produit des deux nombres 1 et 2 qui précèdent l'exposant; puis le produit des deux facteurs consécutifs 5 et 6, dont le premier est la racine proposée ; on divisera le deuxième produit, savoir 30, par le premier produit, savoir 2 ; le quotient 15 sera le nombre demandé.

Les deux règles qui ont été données pour résoudre ce problème ne diffèrent entre elles que parce que l'une prescrit d'effectuer sur l'exposant de l'ordre les opérations que l'autre recommande de faire sur l'indice de la racine; elles font voir que le cinquième nombre du troisième ordre est égal au troisième nombre du cinquième ordre, principe dont on a donné plus haut déjà la démonstration.

On peut ici constater en passant une propriété nouvelle des nombres. Puisque les produits 360 et 30, divisés respectivement par 24 et par 2 ont fourni le même quotient 15, les deux dividendes 360 et 30 doivent être dans le même rapport que les deux diviseurs 24 et 2. D'où résulte cette proposition :

Si sint duo quilibet numeri, productus omnium numerorum primum ex ambobus propositis præcedentium, est ad productum totidem numerorum quorum primus est secundus ex his ambobus, ut productus ex omnibus qui præcedunt secundum ex illis ambobus, ad productum totidem numerorum continuorum quorum primus est primus ex iis ambobus propositis.

Hæc qui prosequeretur et demonstraret, novi fortassis tractatus materiam reperiret : nunc autem quia extra rem nostram sunt, sic pergimus.

DE NUMERICORUM ORDINUM RESOLUTIONE.

PROBLEMA II. — *Dato numero, ac exponente sui ordinis, invenire radicem.*

Potest autem et sic enuntiari.

Dato quolibet numero, invenire radicem maximi numeri ordinis numerici cujuslibet propositi, qui in dato numero contineatur.

Sit datus numerus quilibet, verbi gratia, 58, ordo vero numericus quicumque propositus, verbi gratia, *sextus*. Oportet igitur invenire radicem *sexti* ordinis numeri 58.

Exhibeatur ex una parte exponens ordinis. 6	et continuo	Exponatur ex altera parte numerus datus. 58
Multiplicetur ipse 6, per numerum 7, proxime majorem; sitque productus. 42	et continuo	Multiplicetur ipse numerus per 2, sitque productus, 116
Multiplicetur iste productus per proxime sequentem multi-	et continuo	Multiplicetur ipse productus per proxime sequentem multi-

---

Deux nombres quelconques étant donnés, le produit de tous les nombres naturels qui précèdent le premier est au produit d'un égal nombre de facteurs consécutifs commençant par le second, comme le produit de tous les nombres naturels qui précèdent le second est au produit d'un égal nombre de facteurs consécutifs commençant par le premier.

En poursuivant les conséquences de ce principe on trouverait peut-être la matière de tout un traité ; nous ne nous arrêterons toutefois pas davantage sur ce point qui sort de notre sujet.

RÉSOLUTION DES ORDRES NUMÉRIQUES.

PROBLÈME II. — *Connaissant un nombre et l'exposant de son ordre, trouver sa racine.*

Cet énoncé est compris dans cet autre plus général :

Trouver la racine du plus grand nombre d'ordre numérique déterminé que renferme un nombre donné.

Soit le nombre 58; on propose de trouver la racine du plus grand nombre du sixième ordre qu'il renferme.

On multipliera, d'une part, l'exposant 6 par le nombre immédiatement supérieur, savoir 7; le produit 42 par le nombre qui suit 7, savoir 8; le nouveau produit, 336, par 9, ce qui donne 3024, et ainsi de suite.

D'autre part, on multipliera le nombre 58 successivement par les nombres naturels 2, 3, 4, etc. On aura ainsi deux suites indéfinies de produits, savoir :

6, 42, 336, 3024.......
58, 116, 348, 1392.......

plicatorem 8, sitque productus. 336

Multiplicetur iste productus per proxime sequentem multiplicatorem 9, sitque productus. 3024

et continuo

plicatorem 3, sitque productus. 348

Multiplicetur iste productus per proxime sequentem multiplicatorem 4, sitque productus. 1392

Et sic in infinitum, donec ultimus productus exponentis 6, nempe 3024, major evadat quam ultimus productus numeri dati, nempe 1392: et tunc absoluta est operatio : ultimus enim multiplicator dati numeri, nempe 4, est radix quæ quærebatur.

Igitur dico numerum sexti ordinis cujus radix est 4, nempe 56, maximum esse ejus ordinis qui in numero dato contineatur, seu dico numerum sexti ordinis cujus radix est 4, nempe 56, non esse majorem dato numero 58; numerum vero ejusdem ordinis proxime majorem seu cujus radix est 5, nempe 126, esse majorem numero dato 58.

Etenim productus ille ultimus numeri dati, nempe 1392, factus est ex numero dato 58, multiplicato per productum numerorum 1. 2, 3. 4, nempe 24: productus vero præcedens hunc ultimum, nempe 348, factus est ex numero dato 58, multiplicato per productum numerorum 1, 2, 3, nempe 6.

Ergo productus numerorum 6, 7, 8, non est major producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per 58. Productus vero numerorum 6, 7, 8, 9, est major producto numerorum 1, 2, 3, 4, multiplicato per 58, *ex constructione.*

Jam numerus ordinis *sexti* cujus radix est 4, nempe 56, multiplicatus per numeros 1, 2, 3, æquatur producto numerorum 6, 7, 8, ex demonstratis in *Tractatu de ordinibus numericis.*

Sed productus numerorum 6, 7, 8, non est major *ex ostensis* producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per datum 58; igitur productus numerorum 1, 2, 3, multiplicatus per 56, non est major quam idem

---

qu'on prolongera jusqu'à ce qu'on ait trouvé dans la première suite le nombre 3024 qui surpasse 1392 qui lui correspond dans la seconde. Le dernier multiplicateur de 58, savoir 4, sera la racine demandée.

Pour le démontrer, il faut faire voir que le *quatrième* nombre du sixième ordre, savoir 56, est le plus grand de cet ordre qui soit contenu dans 58, et prouver, à cet effet, que ce nombre 56 est inférieur à 58; tandis que le *cinquième* nombre du sixième ordre, savoir 126, est au contraire plus grand que 58.

Le nombre 348, qui précède 1392 dans la deuxième suite, résulte de la multiplication de 58 par les facteurs successifs 1, 2, 3, dont le produit est 6. Il est supérieur à 336 qui lui correspond dans la première, et qui provient de la multiplication des facteurs 6, 7, 8. Donc le produit de 58 par les facteurs 1, 2, 3 surpasse le produit des facteurs 6, 7, 8, tandis que le produit de 58 par 1, 2, 3, 4 est au contraire inférieur à celui des facteurs 6, 7, 8, 9.

Or il a été démontré que le nombre du sixième ordre dont la racine est 4, savoir 56, étant multiplié successivement par les nombres 1, 2, 3 qui précèdent cette racine, donne un produit égal à celui des trois facteurs consécutifs 6, 7, 8 dont le premier est l'exposant de l'ordre. Et puisque ce dernier produit est inférieur à celui de 58 par les facteurs 1, 2 et 3, il en résulte que

productus numerorum 1, 2, 3, multiplicatus per datum 58. Igitur 56 non est major quam 58.

Jam sit 126, numerus ordinis *sexti* cujus radix est 5. Igitur ipse 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, æquatur producto numerorum 6, 7, 8, 9, ex *Tractatu de ordinibus numericis*. Sed productus ille numerorum 6, 7, 8, 9, est major quam numerus datus 58 multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, *ex ostensis*. Igitur, numerus 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, est major quam numerus datus 58 multiplicatus per eumdem productum numerorum 1, 2, 3, 4. Igitur numerus 126 est major quam numerus datus 58.

Ergo numerus 56 *sexti* ordinis cujus radix est 4, non est major quam numerus datus; numerus vero 126, ejusdem ordinis cujus radix 5 est proxime major, major est quam datus numerus.

Ergo ipse numerus 56, maximus est ejus ordinis qui in dato contineatur, et ejus radix 4 inventa est. Q. E. F. E. D.

DE NUMERICORUM ORDINUM RESOLUTIONE

Problema III.— *Dato quolibet numero, et ejus radice, invenire ordinis exponentem.*

Non differt hoc problema a præcedente; radix enim, et exponens ordinis, reciproce convertuntur, ita ut dato numero, verbi gratia, 58, et ejus radice 4, reperietur exponens sui ordinis 6, eadem methodo, ac si dato numero ipso 58, et exponente ordinis 4, radix 6, esset invenienda; *quartus* enim numerus *sexti* ordinis idem est ac *sextus quarti*, ut jam demonstratum est.

---

le produit de 56 par 1, 2 et 3 ne surpasse point celui de 58 par les mêmes facteurs. Donc 56 ne surpasse point 58.

Prenons maintenant le nombre 126, qui est le cinquième parmi ceux du sixième ordre. Si on le multiplie successivement par les facteurs 1, 2, 3, 4, on obtient un produit égal à celui des nombres 6, 7, 8, 9. Mais ce dernier surpasse le produit de 58 par les facteurs successifs 1, 2, 3, 4; donc le produit de 126 par les facteurs successifs 1, 2, 3, 4 est plus grand que le produit de 58 par les mêmes facteurs. Donc, enfin, 126 surpasse 58.

En résumé, le nombre donné 58 est compris entre le quatrième nombre du sixième ordre, savoir 56, et le cinquième nombre du même ordre, savoir 126. Donc 56 est le plus grand nombre du sixième ordre qui soit contenu dans 58, et sa racine 4 est la racine cherchée.

RÉSOLUTION DES ORDRES NUMÉRIQUES.

Problème III. — *Déterminer l'exposant de l'ordre d'un nombre, connaissant ce nombre et sa racine.*

Ce problème ne diffère point du précédent; en effet, il a été démontré que deux nombres tels que la racine de l'un soit l'exposant de l'autre sont égaux; que, par exemple, le quatrième nombre du sixième ordre est le même que le sixième nombre du quatrième ordre. On trouverait donc l'exposant du nombre 58, connaissant sa racine, de la même manière qu'on a trouvé la racine de ce nombre, quand l'exposant de son ordre était donné.

DE NUMERICORUM ORDINUM SUMMA.

Problema IV.— *Propositi cujuslibet ordinis numerici, tot quot imperabitur, priorum numerorum summam invenire.*

Propositum sit invenire summam *quinque*, verbi gratia, priorum numerorum ordinis, verbi gratia *sexti.*

Inveniatur ex præcedente numerus *quintus* (quia *quinque* priorum numerorum summa requiritur) ordinis *septimi*, nempe ejus qui propositum *sextum* proxime sequitur : ipse satisfaciet problemati.

Numericorum enim ordinum generatio talis est, ut numerus cujusvis ordinis, æquetur summæ eorum omnium ordinis præcedentis quorum radices non sunt sua majores; ita ut quintus septimi ordinis, æquetur, ex natura et generatione ordinum, quinque prioribus numeris sexti ordinis, quod difficultate caret.

Conclusio. — Methodus qua ordinum resolutionem expedio est generalissima : verum ipsam diu quæsivi; quæ primo sese obtulit ea est.

Si dati numeri quærebatur radix tertii ordinis, ita procedebam. *Sumatur duplum numeri propositi, istius dupli radix quadrata inveniatur: hæc quæsita est, aut saltem ea quæ unitate minor erit.*

Si dati numeri quæritur radix quarti ordinis, *multiplicetur numerus datus per* 6, *nempe per productum numerorum* 1, 2, 3; *producti inveniatur radix cubica*; *ipsa*, *aut ea quæ unitate minor est*, *satisfaciet.*

Si dati numeri quæritur radix quinti ordinis, *multiplicetur datus*

SOMMATION DES NOMBRES DES DIVERS ORDRES.

Problème IV. — *Trouver la somme des premiers termes d'un ordre donné, quel qu'en soit le nombre.*

Soit, par exemple, proposé de trouver la somme des *cinq* premiers nombres du *sixième* ordre.

Prenez dans l'ordre qui suit, c'est-à-dire dans le septième, le nombre dont la racine est égale au nombre de termes de la somme qu'il s'agit d'effectuer, c'est-à-dire le cinquième nombre; il est égal à la somme demandée.

En effet, les nombres des divers ordres sont formés de telle façon que l'un quelconque d'entre eux est égal à la somme de tous ceux de l'ordre précédent dont la racine ne surpasse point sa propre racine; ainsi, le cinquième nombre du septième ordre équivaut à la somme des cinq premiers nombres du sixième.

Conclusion. — La méthode que j'ai donnée plus haut pour la résolution des nombres des divers ordres est tout à fait générale; je ne l'ai trouvée qu'après bien des recherches. Voici comment j'opérais avant de l'avoir imaginée.

Pour trouver la racine d'un nombre donné appartenant au troisième ordre numérique, j'extrayais la racine carrée du double du nombre proposé; j'avais ainsi soit la racine cherchée, soit un nombre supérieur d'une unité à cette racine.

Pour trouver la racine d'un nombre donné appartenant au quatrième ordre numérique, je multipliais ce nombre par 6, c'est-à-dire par le produit des facteurs 1, 2, 3, et j'extrayais la racine cubique du résultat; j'avais encore la racine cherchée ou un nombre qui la surpassait d'une unité.

De même, j'obtenais la racine d'un nombre du cinquième ordre numé-

numerus per 24, nempe per productum numerorum 1, 2, 3, 4, productique inveniatur radix quarti gradus : ipsa unitate minuta, satisfaciet problemati.

Et ita reliquorum ordinum radices quærebam, constructione non generali, sed cuique propria ordini; nec tamen ideo mihi omnino displicebat : illa enim qua resolvuntur potestates non generalior est, aliter enim extrahitur radix quadrata, aliter cubica, etc., quamvis ab eodem principio viæ illæ differentes procedant. Ut ergo nondum generalis potestatum resolutio data erat, sic et vix generalem ordinum resolutionem assequi sperabam : conatus tamen expectationem superantes eam quam tradidi præbuerunt generalissimam, et quidem amicis meis, universalium solutionum amatoribus doctissimis, gratissimam; a quibus excitatus et generalem potestatum purarum resolutionem tentare, ad instar generalis ordinum resolutionis, obtemperans quæsivi, et satis feliciter mihi contigit reperisse, ut infra videbitur.

DE NUMERORUM CONTINUORUM PRODUCTIS,

Seu de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum serie naturali procedentium.

Numeri qui producuntur ex multiplicatione numerorum continuorum a nemine, quod sciam, examinati sunt. Ideo nomen eis impono, nempe *producti continuorum.*

Sunt autem qui ex duorum multiplicatione formantur, ut iste 20 qui ex 4 in 5 oritur, et possent dici *secundæ speciei.*

---

rique, en multipliant ce nombre par 24, produit des facteurs 1, 2, 3, 4, et extrayant ensuite la racine quatrième du résultat; cette racine quatrième, diminuée d'une unité, donnait le nombre cherché.

Et ainsi de suite; pour chaque ordre numérique je suivais une règle particulière. Toutefois je ne m'arrêtai point à ce défaut de généralité; je doutai même qu'il fût possible de découvrir une méthode générale pour résoudre la question, en songeant qu'il n'en existe point non plus pour l'extraction des racines des divers degrés; mais le résultat de mes efforts dépassa mon attente en me faisant trouver la méthode que j'ai exposée plus haut, méthode que goûtèrent fort ceux de mes amis qui s'intéressent aux solutions générales des problèmes de mathématiques. C'est à leurs encouragements que je dois d'avoir poussé plus loin mes recherches et d'avoir réussi à découvrir, non-seulement pour la résolution des nombres des divers ordres, mais encore pour l'extraction des racines des différents degrés, un procédé général fort simple que je décrirai plus loin.

DES PRODUITS DES NOMBRES CONTINUS,

ou des nombres qui s'obtiennent en multipliant entre eux plusieurs termes consécutifs de la série naturelle.

Les produits qui s'obtiennent en multipliant entre eux plusieurs termes consécutifs de la série naturelle, n'ont point encore été, à ma connaissance du moins, étudiés jusqu'à ce jour. Je les appellerai *produits des nombres continus.*

Il en est qui résultent de la multiplication de deux facteurs seulement; tel est 20, produit de 4 par 5. Nous les appellerons produits de la *seconde espèce*

Sunt qui ex trium multiplicatione formantur, ut iste 120, qui ex 4 in 5 in 6 oritur, et dici possent *tertiæ speciei.*

Sic *quartæ speciei* dici possent qui ex quatuor numerorum continuorum multiplicatione formantur, et sic in infinitum : ita ut, ex multitudine *multiplicatorum*, species nominationem exponentis sortiretur; et sic nullus esset productus primæ speciei, nullus est enim productus ex uno tantum numero.

Primum hujus tractatuli theorema, illud est quod obiter in præcedente tractatu annotavimus, quod quærendo, reliqua invenimus imo et generalem potestatum resolutionem : adeo stricta connexione sibi mutuo cohærent veritates!

Propositio I. — *Si sint duo numeri quilibet, productus omnium numerorum primum præcedentium, est ad productum totidem numerorum continuorum a secundo incipientium : ut productus omnium numerorum secundum præcedentium, ad productum totidem numerorum continuorum a primo incipientium.*

Sint duo numeri quilibet 5, 8 : dico productum numerorum 1, 2, 3, 4, qui præcedunt 5, nempe 24, esse ad productum totidem continuorum numerorum 8, 9, 10, 11, nempe 7920 : ut productum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, qui præcedunt 8, nempe 5640, ad productum totidem continuorum numerorum 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, nempe 1 663 200.

Etenim productum numerorum 5, 6, 7, ductus in productum istorum 1, 2, 3, 4, efficit productus horum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; et idem productus numerorum 5, 6, 7, ductus in productum numerorum 8, 9, 10,

---

Les produits de trois facteurs consécutifs formeront la *troisième espèce;* tel est 120, qui résulte de la multiplication des trois nombres 4, 5 et 6.

De même, la *quatrième espèce* renfermera les produits de quatre nombres continus, et ainsi de suite. L'espèce d'un produit sera donnée par le nombre des facteurs qui le composent. De même qu'il n'existe point de produits d'un seul facteur, de même il n'y a point de produits de première espèce.

Le premier théorème que nous démontrerons dans ce petit traité, est celui dont nous avons en passant noté l'énoncé dans le traité précédent. C'est en cherchant ce théorème que j'ai trouvé tous les autres et même le procédé général d'extraction des racines : tant les vérités sont enchaînées étroitement les unes aux autres!

Proposition I. — *Deux nombres quelconques étant donnés, le produit de tous les nombres naturels qui précèdent le premier est au produit d'un égal nombre de facteurs consécutifs commençant par le second, comme le produit de tous les nombres naturels qui précèdent le second est au produit d'un égal nombre de facteurs consécutifs commençant par le premier.*

Soient les deux nombres 5 et 8 : je dis que le produit 24 des quatre facteurs naturels 1, 2, 3, 4 qui précèdent 5 est au produit 7920 des quatre facteurs consécutifs 8, 9, 10, 11 dont le premier est 8, comme le produit 5640 des sept facteurs naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, qui précèdent 8, est au produit 1 663 200 des sept facteurs consécutifs 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, dont le premier est 5.

En effet, si l'on multiplie le premier des quatre produits énoncés successivement par les facteurs 5, 6, 7, on obtient le troisième, savoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. De même, si l'on multiplie le deuxième produit par les mêmes fac-

11, efficit productum horum 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; ergo, ut productus numerorum 1, 2, 3, 4, ad productum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 : ita productus numerorum 8, 9, 10, 11, ad productum numerorum 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Q. E. D.

PROPOSITIO II. — *Omnis productus a quotlibet numeris continuis, est multiplex producti a totidem numeris continuis quorum primus est unitas; et quotiens est numerus figuratus.*

Sit productus quilibet, a tribus, verbi gratia, numeris continuis 5, 6, 7, nempe 210, et productus totidem numerorum ab unitate incipientium 1, 2, 3, nempe 6 : dico ipsum 210 esse multiplicem ipsius 6, et quotientem esse numerum figuratum.

Etenim ipse 6, ductus in quintum numerum ordinis quarti, nempe 35, æquatur ipsi producto ex 5, 6, 7, ex demonstratis in *Tractatu de ordinibus numericis.*

PROPOSITIO III. — *Omnis productus a quotlibet numeris continuis est multiplex numeri cujusdam figurati, nempe ejus cujus radix est minimus ex his numeris, exponens vero ordinis est unitate major quam multitudo horum numerorum.*

Hoc patet ex præcedente. Et unica utrique convenit demonstratio.

Monitum. — Ambo divisores in his duabus propositionibus ostensi, tales sunt, ut alter alterius sit quotiens. Ita ut quilibet productus a quotlibet numeris continuis, divisus per productum totidem numerorum ab unitate incipientium, ut secunda propositio docet fieri posse, quotiens sit numerus figuratus in tertia propositione enuntiatus.

PROPOSITIO IV. — *Omnis productus a quotlibet numeris continuis ab*

---

teurs 5, 6, 7, on obtient le quatrième, savoir 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Donc le produit des nombres 1, 2, 3, 4 est à celui des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, comme le produit des facteurs 8, 9, 10, 11 est à celui des facteurs 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II. — *Le produit de tant de facteurs continus qu'on voudra est divisible par le produit d'un égal nombre de facteurs continus commençant par l'unité; et le quotient de la division est un nombre figuré.*

Soit pris pour exemple le produit des trois nombres 5, 6 et 7, savoir 210 je dis qu'il est divisible par le produit des facteurs 1, 2, 3, savoir 6, et que le quotient de la division est un nombre figuré.

Il a été démontré, en effet, dans le *Traité des ordres numériques*, qu'en multipliant 6 par le cinquième nombre du quatrième ordre, c'est-à-dire par 35, le produit obtenu est égal à celui des facteurs 5, 6, 7.

PROPOSITION III. — *Le produit de tant de facteurs continus qu'on voudra est divisible par le nombre figuré dont la racine est égale au moindre de ces facteurs, et dont l'exposant est supérieur d'une unité au nombre des facteurs considérés.*

C'est là une conséquence évidente de la proposition qui précède.

REMARQUE. — Les deux diviseurs dont il est question dans les deux propositions précédentes reproduisent le dividende quand on les multiplie entre eux. En d'autres termes, c'est le nombre figuré trouvé, dans la proposition II, comme quotient de la division du produit 210 par le produit 6, que l'on prend pour diviseur dans l'énoncé de la proposition III.

PROPOSITION IV. — *Tout produit d'un certain nombre de facteurs continus*

unitate incipientibus, est multiplex producti a quotlibet numeris continuis etiam ab unitate incipientibus, quorum multitudo minor est.

Sint quotlibet numeri continui ab unitate 1, 2, 3, 4, 5, quorum productus 120, quotlibet autem ex ipsis ab unitate incipientes 1, 2, 3, quorum productus 6 : dico 120 esse multiplicem 6.

Etenim productus numerorum 1, 2, 3, 4, 5, fit ex producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per productum numerorum 4, 5.

PROPOSITIO V. — *Omnis productus a quotlibet numeris continuis est multiplex producti a quotlibet numeris continuis ab unitate incipientibus, quorum multitudo minor est.*

Etenim productus continuorum quorumlibet est multiplex totidem continuorum ab unitate incipientium *ex secunda;* sed *ex quarta* productus continuorum ab unitate est multiplex producti continuorum ab unitate quorum multitudo minor est. Ergo, etc.

PROPOSITIO VI. — *Productus quotlibet continuorum, est ad productum totidem proxime majorum, ut minimus multiplicatorum ad maximum.*

Sint quotlibet numeri 4, 5, 6, 7, quorum productus 840; et totidem proxime majores 5, 6, 7, 8, quorum productus 1680. dico 840 esse ad 1680, ut 4 ad 8.

Etenim productus numerorum 4, 5, 6, 7, est factus ex producto continuorum 5, 6, 7, multiplicato per 4; productus vero continuorum 5, 6, 7, 8, factus est ex eodem producto continuorum 5, 6, 7, multiplicato per 8. Ergo, etc.

---

commençant par l'unité, est divisible par le produit d'un nombre moindre de pareils facteurs commençant également par l'unité.

Soient les facteurs continus 1, 2, 3, 4, 5, dont le produit est 120. Soient aussi les facteurs 1, 2, 3, dont le produit est 6. Je dis que 6 divise 120.

En effet, le produit des nombres 1, 2, 3, 4, 5 s'obtient en faisant d'abord celui des nombres 1, 2, 3, et le multipliant ensuite par celui des nombres 4 et 5.

PROPOSITION V. — *Le produit d'un nombre quelconque de facteurs continus est divisible par tout produit de facteurs continus commençant par l'unité, pourvu que le nombre des facteurs du deuxième produit soit moindre que celui des facteurs du premier.*

En effet, le produit d'un nombre quelconque de facteurs continus est divisible par le produit d'un égal nombre de facteurs continus commençant par l'unité (proposition II) ; et ce dernier produit est lui-même divisible par celui d'un moindre nombre de facteurs continus commençant aussi par l'unité (proposition IV). Donc, etc.

PROPOSITION VI. — *Le produit de plusieurs facteurs continus, commençant à un terme quelconque de la suite naturelle, est au produit d'un égal nombre de facteurs commençant au terme suivant, comme le moindre de tous les facteurs est au plus grand.*

Soient les facteurs 4, 5, 6, 7, dont le produit est 840 ; soient aussi les facteurs 5, 6, 7, 8, dont le produit est 1680; je dis que 840 est à 1680 comme 4 est à 8.

En effet, le produit des facteurs 4, 5, 6, 7 s'obtient en multipliant par 4 celui des facteurs 5, 6, 7. De même, le produit des facteurs 5, 6, 7, 8 s'obtient en multipliant par 8 celui des mêmes facteurs 5, 6, 7. Donc, etc.

Propositio VII. — *Minimus productus continuorum cujuslibet speciei, ille est cujus multiplicatores ab unitate incipiunt.*

Verbi gratia, minimus productus ex quatuor continuis factus, ille est qui producitur ex quatuor his continuis 1, 2, 3, 4, qui quidem multiplicatores 1, 2, 3, 4, ab unitate incipiunt. Hoc ex se et ex præcedentibus patet.

PRODUCTA CONTINUORUM RESOLVERE,

Seu resolutio numerorum qui ex numeris progressione naturali procedentibus producuntur.

Problema. — *Dato quocumque numero, invenire tot quot imperabitur, numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus, sit maximus ejus speciei qui in dato numero contineatur.*

Oportet autem datum numerum non esse minorem producto totidem numerorum ab unitate continuorum.

Datus sit numerus, verbi gratia, 4335, oporteatque reperire, verbi gratia, *quatuor* numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus sit maximus qui in dato 4335 contineatur, eorum omnium qui producuntur ex multiplicatione *quatuor* numerorum continuorum :

Sumantur ab unitate tot numeri continui quot sunt numeri inveniendi, nempe *quatuor* in hoc exemplo, 1, 2, 3, 4, quorum per productum 24, dividatur numerus datus; sitque quotiens 180. Ipsius quotientis inveniatur radix ordinis numerici non quidem *quarti*, sed sequentis, nempe *quinti*, sitque ea 6; ipse 6 est primus numerus, secundus 7, tertius 8, quartus 9.

Proposition VII. — *Le plus faible des produits d'une espèce quelconque est celui dont le premier facteur est l'unité.*

Le plus faible des produits de quatre facteurs continus, par exemple, est celui des nombres 1, 2, 3, 4, dont le premier est l'unité. Cette proposition, évidente par elle-même, ressort également des précédentes.

RÉSOLUTION DES PRODUITS DES NOMBRES CONTINUS,

ou résolution des nombres qui proviennent de la multiplication des termes consecutifs de la suite naturelle.

Problème. — *Un nombre quelconque étant donné, trouver le plus grand produit d'espèce déterminée qu'il renferme.*

Le problème n'est possible que si le nombre proposé est au moins égal au produit minimum de l'espèce assignée, c'est-à-dire à celui de cette espèce dont le premier facteur est l'unité.

Soit donné le nombre 4335. On propose de trouver les facteurs du plus grand produit de quatrième espèce renfermé dans ce nombre.

On prendra, à partir de l'unité, *quatre* facteurs continus, savoir 1, 2, 3, 4, et l'on divisera le nombre proposé 4335 par leur produit 24, ce qui donne 180 pour quotient. On déterminera ensuite le plus grand nombre 126 du *cinquième* ordre qui soit contenu dans ce quotient, ainsi que sa racine qui est 6. On aura de cette manière le premier des quatre facteurs cherchés. Ces facteurs seront donc 6, 7, 8 et 9

Dico itaque productum *quatuor* numerorum 6, 7, 8, 9, esse maximum numerum qui in dato contineatur, id est : dico productum *quatuor* numerorum 6, 7, 8, 9, nempe 3024, non esse majorem quam numerum datum 4335; productum vero *quatuor* proxime majorum numerorum 7, 8, 9, 10, nempe 5040, esse majorem numero dato 4335.

Etenim ex demonstratis in *Tractatu de ordinibus numericis*, constat productum numerorum 1, 2, 3, 4, seu 24, ductum in numerum quinti ordinis cujus radix est 6, nempe 126, efficere numerum æqualem producto numerorum 6, 7, 8, 9, nempe 3024; similiter et eumdem productum numerorum 1, 2, 3, 4, nempe 24, ductum in numerum ejusdem ordinis quinti cujus radix est 7, efficere numerum æqualem producto numerorum 7, 8, 9, 10, nempe 5040.

Jam vero numerus quinti ordinis cujus radix est 6, nempe 126, quum sit maximus ejus ordinis qui in 180 contineatur, ex constructione patet ipsum 126 non esse majorem quam 180, numerum vero quinti ordinis cujus radix est 7, nempe 210, esse majorem quam ipsum 180.

Quum vero numerus 4335 divisus per 24, dederit 180, quotientem patet 180 ductum in 24, seu 4320, non esse majorem quam 4335, sed aut æqualem esse, aut differre numero minore quam 24.

Itaque quum sit 210 major quam 180 ex constructione, patet 210 in 24, seu 5040, majorem esse quam 180 in 24 seu 4320, et excessum esse ad minimum 24; numerus vero datus 4335, aut non excedit ipsum 4320, aut excedit numero minore quam 24. Ergo numerus 5040, major est quam 4335; id est productus numerorum 7, 8, 9, 10, major est dato numero.

Jam numerus 126, non est major quam 180, ex constructione. Igitur 126 in 24, non est major quam 180 in 24; sed 180 in 24, non est major dato numero ex ostensis. Ergo 126 in 24, seu productus numerorum 6, 7, 8, 9, non est major numero dato; productus autem numerorum 7, 8, 9, 10, ipso major est. Ergo, etc. Q. E. F. E. D.

Sic ergo exprimi potest et enuntiatio, et generalis constructio.

Invenire tot quot imperabitur numeros progressione naturali conti-

---

Pour démontrer que leur produit, savoir 3024, est le plus grand de ceux de quatrième espèce que renferme le nombre donné 4335, je ferai voir qu'il est inférieur à 4335, tandis que le produit 5040 des quatre facteurs continus 7, 8, 9, 10, respectivement supérieurs d'une unité aux facteurs 6, 7, 8, 9, dépasse au contraire le nombre proposé.

Il résulte, en effet, de ce qui a été établi dans le *Traité des ordres numériques*, que le produit 24 des facteurs 1, 2, 3, 4, multiplié par le *sixième* nombre du *cinquième* ordre, c'est-à-dire par 126, donne un produit égal à celui des facteurs 6, 7, 8, 9, savoir 3024; et que le même produit 24 multiplié par le *septième* nombre du même ordre, c'est-à-dire par 210, donne un produit égal à celui des facteurs 7, 8, 9, 10, savoir 5040.

Mais, d'après ce qui précède, 126 est le plus grand nombre du cinquième ordre qui soit renfermé dans 180; 180 est donc compris entre 126 et 210; le produit 4320 de 180 par 24 sera par suite aussi compris entre le produit 3024 de 126 par 24 et le produit 5040 de 210 par 24. Or 210 excède 126 d'au moins une unité; donc 5040 excède 4320 d'au moins 24 unités; et comme 180 est le quotient de la division de 4335 par 24, le dividende 4335, s'il n'est

nuos, ex quorum multiplicatione ortus numerus, sit maximus ejus speciei qui in dato numero contineatur.

Dividatur numerus datus, per productum totidem numerorum ab unitate serie naturali procedentium quot sunt numeri inveniendi; inventoque quotiente, assumatur ipsius radix ordinis numerici cujus exponens est unitate major quam multitudo numerorum inveniendorum : ipsa radix est primus numerus, reliqui per incrementum unitatis in promptu habentur.

Monitum. — Hæc omnia ex natura rei demonstrari poterant, absque trianguli arithmetici aut ordinum numericorum auxilio; non tamen fugienda illa connexio mihi visa est, præsertim quum ea sit quæ lumen primum dedit. Et quod amplius est, alia demonstratio laboriosior esset, et prolixior.

NUMERICARUM POTESTATUM GENERALIS RESOLUTIO.

Generalem numericarum potestatum resolutionem inquirenti, hæc mihi venit in mentem observatio : nihil aliud esse quærere *radicem verbi gratia quadratam dati numeri*, quam quærere *duos numeros æquales quorum productus æquetur numero dato.* Sic et quærere *radicem cubicam* nihil aliud esse quam quærere *tres numeros æquales quorum productus sit datus*, et sic de cæteris.

Itaque potestatis cujuslibet resolutio, est indicatio totidem numerorum æqualium, quot exponens potestatis continet unitates, quorum productus æquetur dato numero; potestates enim ipsæ nihil aliud sunt quam æqualium numerorum producti.

---

pas égal au produit 4320 du diviseur par le quotient, ne le surpasse que d'un nombre inférieur à 24. Donc 4335 est lui-même compris entre 5040 et 3024, c'est-à-dire entre le produit des facteurs 7, 8, 9, 10 et celui des facteurs 6, 7, 8, 9.

Donc, enfin, le produit des facteurs 6, 7, 8, 9 est le plus grand produit de quatrième espèce qui soit renfermé dans 4335.

Remarque. — On pourrait démontrer tous les principes relatifs aux produits des nombres continus sans faire usage du triangle arithmétique ou de la considération des ordres numériques. Si j'ai préféré recourir à ces théories, c'est parce qu'elles m'ont éclairé au début de mes recherches; c'est surtout aussi parce que je voulais éviter les difficultés et les longueurs que les démonstrations directes auraient infailliblement occasionnées.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DES PUISSANCES NUMÉRIQUES.

En réfléchissant au problème général de la résolution des puissances numériques, j'observai que chercher une racine carrée, c'était en réalité chercher deux nombres égaux dont le produit fût égal à un nombre donné; que, de même, chercher une racine cubique, c'était chercher trois nombres égaux dont on connaît le produit; et ainsi de suite. En général, les puissances n'étant autre chose que des produits de facteurs égaux, la résolution d'une puissance quelconque revenait à la recherche d'autant de nombres égaux qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance, lesquels reproduisent un nombre donné par leur multiplication.

Sicut enim in præcedenti tractatu egimus de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum naturali progressione procedentium, sic et in hoc de potestatibus tractatu, agitur de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum æqualium.

Visum est itaque quam proximos esse ambos hos tractatus, et nihil esse vicinius, producto ex æqualibus, quam productum ex continuis solius unitatis incremento differentibus.

Quapropter potestatum resolutionem generalem, seu *productorum ex æqualibus* resolutionem, non mediocriter provectam esse censui, quum eam *productorum ex continuis* generalis resolutio præcesserit.

Dato enim numero, cujus radix cujusvis gradus quæritur, verbi gratia, *quarti*, quæruntur *quatuor* numeri æquales quorum productus æquetur dato; si ergo inveniantur ex præcedente tractatu *quatuor* continui quorum productus æquetur dato, quis non videt inventam esse radicem quæsitam, quum ea sit unus ex his *quatuor* continuis? minimus enim ex his *quatuor*, *quater* sumptus et toties multiplicatus, manifeste minor est producto continuorum; maximus vero ex his *quatuor*, *quater* sumptus ac toties multiplicatus, manifeste major est producto continuorum; radix ergo quæsita unus ex illis est.

Verum latet adhuc ipsa in multitudine; reliquum est igitur ut eligatur, et discernatur quis ex continuis satisfaciat quæstioni.

Huic perquisitioni nondum forte satis incubui; crudam tamen meditationem proferam, alias si digna videatur, diligentius elaborandam.

Postulatum. — Hoc autem prænotum esse postulo; quæ sit radix *quadrata* numeri 2, nempe 1; *etenim* 1 *est radix maximi quadrati in* 2

Dans le précédent traité nous nous sommes occupé de la résolution des produits d'un nombre déterminé de facteurs consécutifs de la suite naturelle; nous parlerons donc dans celui-ci de la résolution des produits d'un nombre déterminé de facteurs égaux.

L'analogie de ces deux questions est manifeste, et l'on ne peut se dissimuler que rien ne ressemble davantage à un produit de facteurs égaux qu'un produit de facteurs consécutifs dont chacun surpasse d'une unité celui qui le précède.

Je crois avoir fait un grand pas vers la solution générale du problème de l'extraction des racines, en découvrant la méthode de résolution des produits de facteurs continus, méthode que j'ai exposée dans le traité qui précède.

Rechercher, en effet, une racine quelconque d'un nombre donné, la quatrième par exemple, c'est chercher quatre facteurs égaux dont le produit soit égal au nombre proposé; or, si l'on est parvenu à trouver quatre facteurs continus dont le produit soit égal à ce nombre, n'est-il pas évident que l'un d'eux sera la racine cherchée? car le produit de quatre facteurs égaux au plus petit est nécessairement inférieur au nombre donné, tandis que celui de quatre facteurs égaux au plus grand lui est supérieur.

Ce qui reste à faire, c'est donc de découvrir quel est parmi les quatre facteurs continus trouvés, celui qui satisfait à la question.

Peut-être n'ai-je pas encore assez médité cette dernière partie de la solution; je la donnerai néanmoins telle que je l'ai trouvée, sauf à y revenir une autre fois avec plus de soin, si le problème semble digne d'intérêt.

Postulatum. — Je supposerai connues : la racine *carrée* du nombre 2,

contenti. Sic et quæ sit radix *cubica* numeri 6, *scilicet qui ex multiplicatione trium numerorum* 1, 2, 3, *oritur*, nempe 1. Sic et quæ sit radix *quarti* gradus numeri 24, *scilicet qui ex multiplicatione quatuor numerorum* 1, 2, 3, 4, *oritur*, nempe 2, et sic de cæteris gradibus. In unoquoque enim peto nosci radicem, istius gradus, numeri qui producitur ex multiplicatione tot numerorum continuorum ab unitate quot exponens gradus propositi continet unitates. Sic ergo in investigatione radicis, verbi gratia, *decimi* gradus, postulo notam esse radicem istius *decimi* gradus, numeri 3628800, qui producitur ex multiplicatione *decem* priorum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, nempe 5. Et hoc uno verbo dici potest. In unoquoque gradu, postulo notam esse radicem istius gradus minimi producti totidem continuorum quot exponens gradus continet unitates; minimus enim productus continuorum quotlibet, ille est cujus multiplicatores ab unitate sumunt exordium.

Nec sane molesta hæc petitio est; in unoquoque enim gradu *unius* tantum numeri radicem suppono, in vulgari autem methodo, multo gravius, in unoquoque gradu, *novem* priorum characterum potestates exiguntur.

Notum sit ergo :

Producti numerorum 1, 2, nempe	2 rad. quadr. esse	1
Producti numeror. 1, 2, 3, nempe	6 rad. cub. esse	1
Producti num. 1, 2, 3, 4, nempe	24 rad. 4 grad. esse	2
Prod. num. 1, 2, 3, 4, 5, nempe	120 rad. 5 grad. esse	2
Pr. num. 1, 2, 3, 4, 5, 6, nempe	720 rad. 6 grad. esse	2
Pr. n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, nempe	5040 rad. 7 grad. esse	3
etc.		

---

savoir 1, qui est la racine du plus grand carré contenu dans 2; la racine *cubique* du produit 6 des *trois* facteurs 1, 2, 3, savoir 1; la racine *quatrième* du produit 24 des *quatre* facteurs 1, 2, 3, 4, savoir 2, et ainsi de suite; j'admettrai, pour chaque degré, qu'on sache quelle est la racine du produit d'autant de facteurs continus commençant à l'unité, qu'il y a d'unités dans l'indice de la racine. Pour la recherche des racines *dixièmes*, par exemple, il faudra connaître la racine dixième 5 du nombre 3628800 qui provient de la multiplication des dix premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. En un mot, dans la recherche d'une racine d'un degré quelconque, je demande qu'on sache quelle est la racine du produit minimum d'autant de facteurs continus que l'indice de la racine contient d'unités; on sait d'ailleurs que le produit minimum d'un nombre déterminé de facteurs est celui qui commence à l'unité.

On remarquera que je ne réclame point ici la connaissance d'un grand nombre de racines; je n'en suppose connue qu'une seule de chaque espèce, tandis que la méthode ordinaire exige que l'on sache, dans chaque degré, quelles sont les puissances des neuf premiers nombres.

On se rappellera donc que :

La racine carrée du produit 2 des facteurs 1, 2 est...............	1.
La racine cubique du produit 6 des facteurs 1, 2, 3...............	1.
La racine quatrième du produit 24 des facteurs 1, 2, 3, 4........	2.
La racine cinquième du produit 120 des facteurs 1, 2, 3, 4, 5...	2.
La racine sixième du produit 720 des facteurs 1, 2, 3, 4, 5, 6...	2.
La racine septième du produit 5040 des facteurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.	3, etc.

PROBLEMA. — *Dato quolibet numero, invenire radicem propositæ potestatis maximæ quæ in dato contineatur.*

Sit datus numerus, verbi gratia 4335, et invenienda sit radix gradus, verbi gratia *quarti*, maximi numeri *quarti* gradus seu *quadrato-quadrati* qui in dato numero contineatur.

Inveniantur, ex præcedente tractatu, *quatuor* numeri continui (quia *quartus* gradus proponitur), quorum productus sit maximus ejus speciei qui in 4335 contineatur sintque ipsi 6, 7, 8, 9.

Radix quæsita est unus ex his numeris. Ut vero discernatur, sic procedendum est.

Sumatur ex postulato radix *quarti* gradus numeri qui producitur ex multiplicatione *quatuor* priorum numerorum 1, 2, 3, 4, nempe radix *quadrato-quadrata* numeri 24 quæ est 2; ipse 2 cum minimo continuorum inventorum 6 unitate minuto nempe 5 efficiet 7.

Hic 7 est minimus qui radix quæsita esse possit; omnes enim inferiores sunt necessario minores radice quæsita.

Jam triangulus *numeri* 4, qui exponens est propositi gradus *quarti*, nempe 10, dividatur per ipsum exponentem 4, sitque quotiens 2 (*superfluum divisionis non curo*) : ipse quotiens 2, cum minimo continuorum 6 junctus, efficit 8.

Ipse 8 est maximus qui radix esse possit, omnes enim superiores sunt necessario majores radice quæsita.

Denique constituantur *in quarto* gradu ipsi extremi numeri 7, 8, nempe 2401, 4096, necnon et omnes qui inter ipsos interjecti sunt, *quod ad generalem methodum dictum sit, hic enim nulli inter 7 et 8 interjacent, sed in remotissimis potestatibus quidam, quamvis perpauci, contingent.*

PROBLÈME. — *Un nombre quelconque étant donné, trouver la racine de la plus grande puissance d'un degré déterminé qu'il renferme.*

Soit proposé de trouver la racine quatrième de la plus grande quatrième puissance contenue dans le nombre 4335.

On cherchera, d'après la méthode indiquée dans le traité précédent, les facteurs du plus grand produit de *quatrième* espèce renfermé dans 4335. Ces facteurs sont 6, 7, 8, 9; l'un d'eux est la racine cherchée. Voici comment on la reconnaîtra :

A la racine quatrième (supposée comme d'après le postulatum) du produit des nombres 1, 2, 3, 4, laquelle est 2, on ajoute le plus petit des facteurs trouvés, préalablement diminué d'une unité, savoir 5, ce qui donne 7. On a ainsi une valeur minima de la racine; tout nombre moindre que 7 est inférieur à cette racine.

On prend ensuite le nombre triangulaire dont l'exposant du rang est égal à l'indice de la racine cherchée, c'est-à-dire le quatrième nombre triangulaire, lequel est 10; on le divise par cet indice, et l'on ajoute le quotient pris à moins d'une unité près, lequel est 2, au plus petit des facteurs continus trouvés, savoir à 6. La somme 8 ainsi obtenue est une valeur maxima de la racine cherchée; tout nombre supérieur à 8 est plus grand que cette racine.

Enfin on élèvera à la quatrième puissance les valeurs maxima et minima obtenues, ce qui donne les nombres 2401 et 4096, ainsi que les nombres compris entre elles lorsqu'il y a lieu; ce cas ne se présente pas dans l'exemple que nous traitons, mais il se rencontre quelquefois, bien que rarement, dans l'extraction des racines de degrés élevés.

Harum potestatum, illa quæ æqualis erit dato numero, *si ita eveniat*, aut saltem quæ proxime minor erit dato numero, nempe 4096, satisfaciet problemati. Radix enim 8 unde orta est, ea est quæ quæritur.

Sic ergo institui potest et enuntiatio et generalis constructio.

Invenire numerum qui in gradu proposito constitutus maximus sit ejus gradus qui in dato numero contineatur.

Inveniantur, ex tractatu præcedenti, tot numeri continui, quot sunt unitates in exponente gradus propositi, quorum productus sit maximus ejus speciei qui in dato numero contineatur. Et assumpto producto totidem continuorum ab unitate, inveniatur ejus radix gradus propositi; *ex postulato* ipsa radix jungatur cum minimo continuorum inventorum unitate minuto: *hic erit minimus extremus.*

Jam triangulus exponentis ordinis per ipsum exponentem divisus quemlibet præbeat quotientem, qui cum minimo continuorum inventorum jungatur : *hic erit maximus extremus.*

Ambo hi extremi ac numeri inter eos interpositi in gradu proposito constituantur.

Harum potestatum, ea quæ dato numero erit aut æqualis aut proxime minor, satisfacit problemati; radix enim unde orta est, radix quæsita est.

Horum demonstrationem, paratam quidem, sed prolixam etsi facilem, ac magis tædiosam quam utilem supprimimus, ad illa, quæ plus afferunt fructus quam laboris, vergentes.

Parmi ces puissances, celle qui est égale ou immédiatement inférieure au nombre proposé, savoir 4096, satisfait à la question. Sa racine 8 est la racine demandée.

Nous pouvons donc formuler comme il suit l'énoncé et la solution de ce problème.

Trouver le plus grand nombre qui, élevé à une puissance de degré déterminé, soit contenu dans un nombre donné.

On cherchera, d'après la règle donnée dans le traité précédent, parmi les produits contenus dans le nombre donné, le produit maximum d'autant de facteurs consécutifs qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance. On fera ensuite le produit d'un pareil nombre de termes de la suite naturelle, à commencer par l'unité, et l'on en prendra la racine, d'après le *postulatum*. Cette racine, ajoutée au plus petit des facteurs consécutifs trouvés, préalablement diminué d'une unité, fournit une *valeur minima* de la racine cherchée.

D'autre part, on prendra le nombre triangulaire dont l'exposant du rang est égal au degré de la puissance proposée, et on le divisera par cet exposant; la somme faite du quotient obtenu et du plus petit des facteurs consécutifs trouvés, donne une *valeur maxima* de la racine.

On élèvera ensuite à la puissance proposée les deux limites et les nombres qu'elles comprennent.

Parmi les résultats ainsi obtenus, celui qui est égal ou immédiatement inférieur au nombre donné satisfait à la question, et sa racine est la racine demandée.

Je supprime à dessein la démonstration que j'ai trouvée de cette règle; quoique facile, elle est fort longue et plus ennuyeuse qu'utile; je préfère passer immédiatement à des sujets dont l'étude promet de rapporter plus de fruits qu'elle n'exigera d'efforts.

COMBINATIONES.

Definitiones[1]. — Combinationis nomen diverse a diversis usurpatur; dicam itaque quo sensu intelligam.

Si exponatur multitudo quævis rerum quarumlibet, ex quibus liceat aliquam multitudinem assumere, verbi gratia, si ex *quatuor* rebus per litteras A, B, C, D expressis, liceat *duas* quasvis ad libitum assumere : singuli modi quibus possunt eligi *duæ* differentes ex his *quatuor* oblatis, vocantur hic *combinationes*.

Experimento igitur patebit, *duas* posse assumi, inter *quatuor*, *sex* modis; potest enim assumi A et B, vel A et C, vel A et D, vel B et C, vel B et D, vel C et D.

Non constituo A et A inter modos eligendi duas, non enim essent differentes; nec constituo A et B, et deinde B et A, tanquam differentes modos, ordine enim solummodo differunt, *ad ordinem autem non attendo :* ita ut uno verbo dixisse poteram, combinationes hic considerari quæ nec mutato ordine procedunt.

Similiter experimento patebit, *tria* inter *quatuor*, *quatuor* modis assumi posse, nempe ABC, ABD, ACD, BCD.

Sic et *quatuor* in *quatuor*, *unico* modo assumi posse, nempe ABCD.

His igitur verbis utar :

1 in 4 combinatur 4 modis seu combinationibus.
2 in 4 combinatur 6 modis seu combinationibus.
3 in 4 combinatur 4 modis seu combinationibus.
4 in 4 combinatur 1 modo seu combinatione.

Summa autem omnium combinationum quæ fieri possunt in 4 est 15; summa enim combinationum 1 in 4, et 2 in 4 et 3 in 4, et 4 in 4, est 15.

Lemma I. — *Numerus quilibet non combinatur in minore.*

Verbi gratia, 4 non combinatur in 2.

Lemma II. *1 in 1 combinatur 1 combinatione.*
2 in 2 combinatur 1 combinatione.
3 in 3 combinatur 1 combinatione.

Et sic generaliter omnis numerus semel tantum in æquali combinatur.

Lemma III. *1 in 1 combinatur 1 combinatione.*
1 in 2 combinatur 2 combinationibus.
1 in 3 combinatur 3 combinationibus.

Et generaliter unitas in quovis numero toties combinatur quoties ipse continet unitatem.

Lemma IV. *Si sint quatuor numeri, primus ad libitum, secundus*

[1] Les définitions et les premières propositions de ce traité ayant été publiées en français par Pascal lui-même, sous le titre : *Usage du triangle arithmétique pour les combinaisons* (ci-dessus, p. 425), nous devons nous abstenir d'en donner ici une nouvelle traduction. Nous ne reprenons, en conséquence, qu'à partir de la *proposition* I, p. 464.

unitate major quam primus, tertius ad libitum modo non sit minor secundo. quartus unitate major quam tertius; multitudo combinationum primi in tertio, plus multitudine combinationum secundi in tertio, æquatur multitudini combinationum secundi in quarto.

Sint quatuor numeri ut dictum est :

Primus ad libitum, verbi gratia...........................	1
Secundus unitate major nempe..............................	2
Tertius ad libitum modo non sit minor quam secundus, verbi gratia	3
Quartus unitate major quam tertius, nempe...................	4

Dico multitudinem combinationum 1 in 3, plus multitudine combinationum 2 in 3, æquari multitudini combinationum 2 in 4. *Quod ut paradigmate fiat evidentius :*

Assumantur *tres* characteres, nempe B, C, D, jam vero assumantur iidem *tres* characteres et *unus* præterea, A, B, C, D; deinde assumantur combinationes *unius* litteræ in *tribus*, B, C, D, nempe B, C, D; assumantur quoque omnes combinationes *duarum* litterarum in *tribus* B, C, D, nempe BC, BD, CD; denique assumantur omnes combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, nempe AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Dico itaque, tot esse combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, quot sunt *duarum* in *tribus* B, C, D, et insuper quot *unius* in *tribus* B, C, D.

Hoc manifestum est ex generatione combinationum; combinationes enim *duarum* in *quatuor* formantur, partim ex combinationibus *duarum* in *tribus*, partim ex combinationibus *unius* in *tribus;* quod ita evidens fiet.

Ex combinationibus *duarum* in *quatuor*, nempe AB, AC, AD, BC, BD, CD, quædam sunt in quibus ipsa littera A usurpatur, ut istæ AB, AC, AD; quædam quæ ipsa A carent, ut istæ BC, BD, CD.

Porro, combinationes illæ BC, BD, CD, *duarum* in *quatuor* A, B, C, D, quæ ipso A carent, constant ex residuis *tribus* B, C, D; sunt ergo combinationes *duarum* in *tribus* B, C, D; igitur combinationes *duarum* in *tribus* B, C, D, sunt quoque combinationes *duarum* in *quatuor* A, B, C, D, nempe illæ quæ carent ipso A.

Illæ vero combinationes AB, AC, AD, *duarum* in *quatuor* A, B, C, D, in quibus A usurpatur, si ipso A spolientur, relinquent residuas litteras B, C, D, quæ sunt ex *tribus* litteris B, C, D, suntque combinationes *unius* litteræ in *tribus* B, C, D; igitur combinationes *unius* litteræ in *tribus* B, C, D, nempe B, C, D, adscito A, efficiunt AB, AC, AD, quæ constituunt combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, in quibus A usurpatur.

Igitur combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* A, B, C, D, formantur partim ex combinationibus *unius* in *tribus* B, C, D, partim ex combinationibus *duarum* in *tribus* B, C, D; quare multitudo primarum æquatur multitudini reliquarum. Q. E. D.

Eodem prorsus modo in reliquis ostendetur exemplis; verbi gratia :

Tot esse combinationes numeri...............	29 in 40
quot sunt combinationes numeri	29 in 39
et insuper quot sunt combinationes numeri....	28 in 39

Quatuor enim numeri 28, 29, 39, 40, conditionem requisitam habent.

Sic tot sunt combinationes numeri........... 16 in 56
quot sunt combinationes numeri.... .... 16 in 55
ac insuper quot sunt combinationes numeri.... 15 in 55

etc.

Lemma V. — *In omni triangulo arithmetico summa cellularum seriei cujuslibet æquatur multitudini combinationum exponentis seriei, in exponente trianguli.*

Sit triangulus quilibet, verbi gratia, *quartus* GDλ : dico summam cellularum seriei cujusvis, verbi gratia, *secundæ* $\varphi+\psi+\theta$, æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis secundæ seriei*, in numero 4, *exponente quarti trianguli.*

Sic dico summam cellularum seriei, verbi gratia, *quintæ* trianguli, verbi gratia, *octavi*, æquari multitudini combinationum numeri 5 in numero 8, etc.

Quamvis infiniti sint hujus propositionis casus, sunt enim infiniti trianguli, breviter tamen demonstrabo, positis duobus assumptis.

Primo, quod ex se patet, *in primo triangulo eam proportionem contingere :* summa enim cellularum unicæ suæ seriei, nempe numerus primæ cellulæ G, id est unitas, æquatur multitudini combinationum exponentis seriei, in exponente trianguli; hi enim exponentes sunt unitates; unitas vero in unitate unico modo ex lemmate II hujus combinatur.

Secundo, *si ea proportio in aliquo triangulo contingat; id est si summa cellularum uniuscujuscumque seriei trianguli cujusdam, æquetur multitudini combinationum exponentis seriei in exponente trianguli : dico et eamdem proportionem in triangulo proxime sequenti contingere.*

His assumptis, facile ostendetur in singulis triangulis eam proportionem contingere; contingit enim in primo, *ex primo assumpto ;* immo et manifesta quoque ipsa est in secundo triangulo; ergo *ex secundo assumpto* et in sequenti triangulo contingit, quare et in sequenti et in infinitum.

Totum ergo negotium in secundi assumpti demonstratione consistit, quod ita expedietur.

Sit triangulus quilibet, verbi gratia, *tertius*, in quo supponitur hæc proportio, id est, summam cellularum seriei *primæ* $G+\sigma+\pi$ æquari multitudini combinationum numeri 1, *exponentis seriei*, in numero 3, *exponente trianguli;* summam vero cellularum *secundæ seriei* $\varphi+\psi$ æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis seriei*, in numero 3, *exponente trianguli;* summam vero cellularum *tertiæ seriei*, nempe cellulam A, æquari combinationibus numeri 3, *exponentis seriei*, in 3, *exponente trianguli :* dico et eamdem proportionem contingere et in sequenti triangulo *quarto*, id est, summam cellularum, verbi gratia, *secundæ seriei* $\varphi+\psi+\theta$, æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis seriei*, in numero 4, *exponente trianguli.*

Etenim $\varphi+\psi$ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 3 *ex hypothesi;* cellula vero θ æquatur, *ex generatione trianguli arithmetici*, cellulis $G+\sigma+\pi$; hæ vero cellulæ æquantur *ex hypothesi* multitudini

combinationum numeri 1 in 3. Ergo cellulæ $\varphi + \psi + \theta$ æquantur multitudini combinationum numeri 2 in 3, plus multitudine combinationum numeri 1 in 3; hæ autem multitudines æquantur, ex quarto lemmate hujus, multitudini combinationum numeri 2 in 4. Ergo summa cellularum $\varphi + \psi + \theta$ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 4. Q. E. D.

Idem lemma V problematice enuntiatum.

Datis duobus numeris inæqualibus, invenire in triangulo arithmetico *quot modis minor in majore combinetur.*

Propositi sint duo numeri, verbi gratia, 4 et 6, oportet reperire in triangulo arithmetico quot modis 4 combinetur in 6.

Prima methodus. — Summa cellularum *quartæ* seriei *sexti* trianguli, satisfacit, *ex præcedente, nempe cellulæ* D + E + F.

Hoc est numeri 1 + 4 + 10, seu 15; ergo 4 in 6 combinatur 15 modis.

Secunda methodus. — Cellula *quinta*, basis *septimæ* K, satisfacit: *illi numeri* 5, 7, *sunt proxime majores his* 4, 6.

Etenim illa cellula, nempe K, seu 15, æquatur summæ cellularum *quartæ* seriei *sexti* trianguli D + E + F, ex generatione.

Monitum. — In basi *septima* sunt septem cellulæ, nempe V, Q, K, ρ, ξ, N, ζ, ex quibus *quinta* assumenda est; potest autem ipsa duplici modo assumi, sunt enim duæ basis extremitates V ζ : si ergo ab extremo V inchoaveris, erit V prima, Q secunda, K tertia, ρ quarta, ξ quinta quæsita. Si vero a ζ incipias, erit ζ prima, N secunda, ξ tertia, ρ quarta, K quinta quæsita : sunt igitur duæ quæ possunt dici *quintæ;* sed quoniam ipsæ sunt æque ab extremis remotæ, ideoque reciprocæ, sunt ipsæ eædem; quare indifferenter assumi alterutra potest, et ab alterutra basis extremitate inchoari.

Monitum. — Jam satis patet, quam bene conveniant combinationes et triangulus arithmeticus, et ideo, proportiones inter series, aut inter cellulas trianguli observatas, ad combinationum rationes protendi, ut in sequentibus videre est.

Propositio I. — *Duo quilibet numeri æque combinantur in eo quod amborum aggregatum est.*

Sint duo numeri quilibet 2, 4, quorum aggregatum 6 : dico numerum 2 toties combinari in 6, quoties ipse 4 in eodem 6 combinatur, *nempe singulos, modis* 15.

Hoc nihil aliud est quam consectatio V trianguli arithmetici, et potest hoc uno verbo demonstrari; *cellulæ enim reciprocæ sunt eædem.* Si vero ampliori demonstratione egere videatur, hæc satisfaciet.

Proposition I. — *Deux nombres quelconques se combinent le même nombre de fois dans un troisième nombre égal à leur somme.*

Soient les deux nombres 2 et 4, dont la somme est 6 ; je dis que le nombre des combinaisons de 2 dans 6 est égal au nombre des combinaisons de 4 dans 6.

Cette proposition résulte immédiatement de la conséquence V du *Traité du triangle arithmétique,* savoir que *chaque cellule est égale à sa réciproque.* En voici d'ailleurs une démonstration plus développée.

Multitudo combinationum numeri 2 in 6 æquatur, ex V lemmate, seriei *secundæ* trianguli *sexti*, nempe cellulis $\varphi + \psi + \theta + R + S$, seu cellulæ ξ; sic multitudo quoque combinationum numeri 4 in 6 æquatur, ex eodem, seriei *quartæ* trianguli *sexti*, nempe cellulis $D + E + F$, seu cellulæ K; ipsa vero K, est reciproca ipsius ξ, ideoque ipsi æqualis; quare et multitudo combinationum numeri 2 in 6, æquatur multitudini combinationum numeri 4 in 6. Q. E. D.

Corollarium. — Ergo omnis numerus toties combinatur in proxime majori, quot sunt unitates in ipso majori.

Verbi gratia, numerus 6 in 7 combinatur *septies*, et 4 in 5 *quinquies*, etc. Ambo enim numeri 1, 6, æque combinantur in aggregato eorum 7, ex propositione hac I; sed 1 in 7 combinatur septies, ex lemmate III. Igitur 6 in 7 combinatur quoque septies.

Propositio II. — *Si duo numeri combinentur in numero quod amborum aggregatum est unitate minuto, multitudines combinationum erunt inter se, ut ipsi numeri reciproce.*

Hoc nihil aliud est quam consectatio XVIII trianguli arithmetici.

Sint duo quilibet numeri 3, 5, quorum summa 8, unitate minuta, est 7 : dico multitudinem combinationum numeri 3 in 7, esse ad multitudinem combinationum numeri 5 in 7, ut 5 ad 3.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 7, æquatur, ex V lemmate, *tertiæ* seriei *septimi* trianguli arithmetici, nempe $A + B + C + \omega + \xi$, seu 35. Multitudo autem combinationum numeri 5 in 7, æquatur,

---

Le nombre des combinaisons de 2 dans 6 est égal, d'après le lemme V, à la somme des cellules de la *seconde* série du *sixième* triangle, savoir $\varphi + \psi + \theta + R + S$, ou à la cellule ξ; par la même raison le nombre des combinaisons de 4 dans 6 est égal à la somme des cellules de la *quatrième* série du *sixième* triangle, savoir $D + E + F$, ou à la cellule K. Mais les cellules K et ξ sont réciproques, et par suite égales; donc enfin le nombre des combinaisons de 2 dans 6 est égal au nombre des combinaisons de 4 dans 6.

Corollaire. — Tout nombre se combine dans le nombre immédiatement supérieur, autant de fois qu'il y a d'unités dans ce dernier.

Par exemple 6 se combine *sept* fois dans 7, et 4 se combine *cinq* fois dans 5. Car, d'après la première proposition, les deux nombres 6 et 1 se combinent le même nombre de fois dans 7 ; mais 1 se combine sept fois dans 7, d'après le lemme III, donc 6 s'y combine aussi sept fois.

Proposition II. — *Deux nombres étant donnés, la multitude des combinaisons du premier dans leur somme diminuée d'une unité est à la multitude des combinaisons du second dans cette même somme diminuée d'une unite, comme le second nombre est au premier.*

Cette proposition découle de la conséquence XVIII du *Traité du triangle arithmétique.*

Soient les nombres 3 et 5; leur somme, diminuée d'une unité est 7. Je dis que la multitude des combinaisons de 3 dans 7 est à la multitude des combinaisons de 5 dans 7, comme 5 est à 3.

En effet, la multitude des combinaisons de 3 dans 7 est égale, d'après le lemme V, à la somme des cellules de la *troisième* série du *septième* triangle arithmétique, savoir $A + B + C + \omega + \xi$, ou 35 ; de même la multitude

ex eodem, *quintæ* seriei ejusdem *septimi* trianguli, nempe H + M + K, seu 21; in triangulo autem *septimo*, series *quinta* et *tertia* sunt inter se ut 3 ad 5, ex consectatione XVIII trianguli arithmetici; aggregatum enim exponentium serierum 5, 3, nempe 8, æquatur exponenti trianguli 7 unitate aucto.

Propositio III. — *Si numerus combinetur primo in numero qui sui duplus est, deinde in ipsomet numero* duplo *unitate minuto, prima combinationum multitudo secundæ dupla erit.*

Hoc nihil aliud est quam consectatio XI trianguli arithmetici.

Sit numerus quilibet 3, cujus duplus 6, qui unitate minutus, est 5 : dico multitudinem combinationum numeri 3 in 6 duplam esse multitudinis combinationum numeri 3 in 5.

Possem uno verbo dicere *omnis enim cellula dividentis dupla est præcedentis coradicalis :* sic autem demonstro.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6 æquatur, ex V lemmate, cellulæ 4 basis 7, nempe ρ, *seu* 20; quæ quidem ρ medium basis occupat locum, *quod inde procedit quod 3 sit dimidium* 6, *unde fit ut* 4, *proxime major quam* 3, *medium occupet locum in numero* 7 *proxime majori quam* 6. Igitur ipsa cellula *quarta* ρ est in dividente; quare dupla est cellulæ F seu ω, ex XI consectatione trianguli arithmetici, quæ quidem ω est quoque *quarta* cellula basis *sextæ;* ideoque ex lemmate V, ipsa ω seu F æquatur multitudini combinationum numeri 3 in 5; ergo multitudo combinationum 3 in 6 dupla est multitudinis combinationum 3 in 5. Q. E. D.

---

des combinaisons de 5 dans 7 est égale à la somme des cellules de la *cinquième* série du *septième* triangle, savoir H + M + K, ou 21. Mais, dans ce *septième* triangle, la somme des nombres de la *cinquième* série est à celle des nombres de la *troisième*, comme 3 est à 5, d'après la conséquence XVIII du *Traité du triangle arithmétique*, car la somme des exposants 3 et 5, savoir 8, est égale au rang du triangle augmenté d'une unité. Donc, etc.

Proposition III. — *La multitude des combinaisons d'un nombre quelconque dans deux fois ce nombre est double de la multitude des combinaisons du même nombre dans deux fois ce nombre moins une unité.*

C'est ce qui résulte de la conséquence XI du *Traité du triangle arithmétique.*

Soit le nombre 3, dont le double est 6. Je dis que la multitude des combinaisons de 3 dans 6 est égale à deux fois la multitude des combinaisons de 3 dans 5.

Il suffirait, pour établir ce principe, de rappeler que *chaque cellule de la dividente est double de celle qui la précède dans son rang parallèle au perpendiculaire.*

En effet, d'après le lemme V, la multitude des combinaisons de 3 dans 6 est égale au nombre de la quatrième cellule de la septième base, savoir ρ ou 20; mais cette quatrième cellule se trouve sur la dividente, parce que la septième base renferme sept cellules; le nombre ρ est donc double de celui de la cellule qui le précède dans son rang parallèle ou perpendiculaire, savoir F ou ω. Mais ω lui-même se trouve dans la quatrième cellule de la sixième base; donc, d'après le lemme V, ω ou F représente la multitude des combinaisons de 3 dans 5. Donc enfin, la multitude des combinaisons de 3 dans 6 est double de la multitude des combinaisons de 3 dans 5.

Propositio IV. — *Si sint duo numeri proximi, et alius quilibet in utroque combinetur, multitudo combinationum quæ fiunt in majore erit ad alteram multitudinem, ut major numerus ad ipsummet majorem, dempto eo qui combinatus est.*

Sint duo numeri unitate differentes 5, 6; et alius quilibet 2 combinetur in 5, et deinde in 6 : dico multitudinem combinationum ipsius 2 in 6 esse ad multitudinem combinationum ipsius 2 in 5, ut 6 ad 6 — 2.

Hoc ex XIV consectatione trianguli arithmetici est manifestum et sic ostendetur.

Multitudo enim combinationum ipsius 2 in 6 æquatur summæ cellularum seriei 2 trianguli 6, nempe $\varphi + \psi + \theta + R + S$, ex lemmate V, hoc est cellulæ ξ, seu 15. Sed, ex eodem, multitudo combinationum ejusdem 2 in 5 æquatur summæ cellularum seriei 2 trianguli 5, nempe $\varphi + \psi + \theta + R$, seu cellulæ ω, seu 10; est autem cellula ξ ad ω ut 6 ad 4, hoc est ut 6 ad 6 — 2, ex XIV consectatione trianguli arithmetici.

Propositio V. — *Si duo numeri proximi in alio quolibet combinentur, erit multitudo combinationum minoris ad alteram, ut major numerus combinatus ad numerum in quo ambo combinati sunt, dempto minore numero combinato.*

Sint duo quilibet numeri proximi 3, 4, et alius quilibet 6 : dico multitudinem combinationum *minoris* 3 in 6 esse ad multitudinem combinationum *majoris* 4 in 6, ut 4 ad 6 — 3.

Proposition IV. — *Deux nombres étant donnés qui diffèrent l'un de l'autre d'une unité, ainsi qu'un troisième, inférieur à chacun des précédents, la multitude des combinaisons de celui-ci dans le plus grand des deux premiers est à la multitude de ses combinaisons dans le plus petit, comme le plus grand des deux nombres proposés est à son excès sur le troisième nombre.*

Soient deux nombres consécutifs 5 et 6, et un troisième nombre 2; je dis que la multitude des combinaisons de 2 dans 6 est à la multitude des combinaisons de 2 dans 5, comme 6 est à 6 — 2.

Cette proposition découle de la conséquence XIV du *Traité du triangle arithmétique*. En effet, la multitude des combinaisons de 2 dans 6 est égale à la somme des nombres des cellules de la seconde série dans le sixième triangle, savoir $\varphi + \psi + \theta + R + S$, ou au nombre 15 de la cellule ξ. De même, la multitude des combinaisons de 2 dans 5 est égale à la somme des nombres des cellules de la seconde série du cinquième triangle, savoir $\varphi + \psi + \theta + R$, ou au nombre 10 de la cellule ω. Mais les nombres contenus dans les cellules ξ et ω sont entre eux comme 6 est à 4, ou comme 6 est à 6 — 2, d'après la conséquence XIV du *Traité du triangle arithmétique*. Donc, etc.

Proposition V. — *Deux nombres consécutifs étant donnés, ainsi qu'un troisième nombre, supérieur à chacun des precedents, la multitude des combinaisons du plus petit des deux premiers dans le troisième est à la multitude des combinaisons du plus grand dans ce même troisième, comme le plus grand des deux nombres proposés est à l'excès du troisième sur le plus petit.*

Soient les deux nombres consécutifs 3 et 4 et un troisième nombre 6; je dis que la multitude des combinaisons de 3 dans 6 est à la multitude des combinaisons de 4 dans 6 comme 4 est à 6 — 3

Hæc cum XII consectatione trianguli arithmetici convenit et sic ostendetur.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6 æquatur, ex lemmate V, summæ cellularum seriei 3 trianguli 6, nempe $A+B+C+\omega$ seu cellulæ ρ, seu 20. Multitudo vero combinationum numeri 4 in 6 æquatur, ex eodem, summæ cellularum seriei 4 trianguli 6, nempe $D+E+F$, seu cellulæ K, seu 15; est autem ρ ad K ut 4 ad 3, seu ut 4 ad $6-3$, ex consectatione XII trianguli arithmetici.

Propositio VI. — *Si sint duo numeri quilibet quorum minor in majore combinetur, sint autem et alii duo his proxime majores quorum minor in majore quoque combinetur : erunt multitudines combinationum inter se, ut hi ambo ultimi numeri.*

Sint duo quilibet numeri 2, 4, alii vero his proxime majores 3, 5 : dico multitudinem combinationum numeri 2 in 4, esse ad multitudinem combinationum numeri 3 in 5, ut 3 ad 5.

Consectatio XIII trianguli arithmetici hanc continet et sic demonstratur.

Multitudo enim combinationum ipsius 2 in 4 æquatur, ex lemmate V, summæ cellularum seriei 2 trianguli 4, nempe $\varphi+\psi+\theta$, seu cellulæ C, seu 6. Multitudo vero combinationum numeri 3 in 5 æquatur, ex eodem, summæ cellularum seriei 3 trianguli 5, nempe $A+B+C$, seu cellulæ F, seu 10; est autem C ad F ut 3 ad 5, ex XIII consectatione trianguli arithmetici.

Lemma VI. — *Summa omnium cellularum basis trianguli cujuslibet*

C'est ce qui résulte de la conséquence XII du *Traité du triangle arithmétique*. En effet, la multitude des combinaisons de 3 dans 6 est égale à la somme des nombres des cellules de la troisème série dans le sixième triangle, ou au nombre 20 de la cellule ρ. De même, la multitude des combinaisons de 4 dans 6 est égale à la somme des nombres des cellules de la quatrième série dans ce même triangle, ou au nombre 15 de la cellule K. Mais les nombres contenus dans les cellules ρ et K sont entre eux comme 4 est à 3 ou comme 4 est à $6-3$, d'après la conséquence XII du *Traité du triangle arithmetique*. Donc, etc.

Proposition VI. — *Deux nombres quelconques étant donnés, on détermine la multitude des combinaisons du plus petit dans le plus grand; on fait de même sur deux autres nombres respectivement supérieurs d'une unite aux precédents; les resultats trouves seront entre eux comme les deux derniers nombres.*

Soient d'une part les nombres 2 et 4, d'autre part les nombres 3 et 5 qui les surpassent respectivement d'une unité; je dis que la multitude des combinaisons de 2 dans 4 est à la multitude des combinaisons de 3 dans 5, comme 3 est à 5.

Cette proposition résulte de la conséquence XIII du *Traité du triangle arithmetique*. En effet, la multitude des combinaisons de 2 dans 4 est égale à la somme des nombres des cellules de la deuxième série dans le quatrième triangle, ou au nombre 6 de la cellule C. Pareillement, la multitude des combinaisons de 3 dans 5 est égale à la somme des nombres des cellules de la troisième série dans le cinquième triangle, ou au nombre 10 de la cellule F. Mais les nombres contenus dans les cellules C et F, d'après la conséquence XIII, sont entre eux comme 3 est à 5. Donc, etc.

Lemme VI. — *En tout triangle arithmétique, la somme diminuée d'une unité*

arithmetici unitate minuta æquatur summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero qui proxime minor est quam exponens basis.

Sit triangulus quilibet arithmeticus, verbi gratia, *quintus* $GH\mu$: dico summam cellularum suæ basis $H+E+C+R+\mu$, minus unitate *seu minus una ex extremis* H *vel* μ, æquari summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero 4 qui proxime minor est quam exponens basis 5. Id est : dico summam cellularum $R+C+E+H$ (*supprimo enim extremam* μ) id est $4+6+4+1$, seu 15, æquari multitudini combinationum numeri 1 in 4, nempe 4; plus multitudine combinationum numeri 2 in 4, nempe 6; plus multitudine combinationum numeri 3 in 4, nempe 4; plus multitudine combinationum numeri 4 in 4, nempe 1. *Quæ quidem sunt omnes combinationes quæ fieri possunt in* 4; *superiores enim numeri* 5, 6, 7, *etc.*, *non combinantur in numero* 4 : *major enim numerus in minore non combinatur.*

Multitudo enim combinationum numeri 1 in 4 æquatur, ex V lemmate, cellulæ 2 basis 5, nempe R, seu 4. Multitudo vero combinationum numeri 2 in 4 æquatur cellulæ 3 basis 5, nempe C, seu 6. Multitudo quoque combinationum numeri 3 in 4 æquatur cellulæ 4 basis 5, nempe E, seu 4. Multitudo denique combinationum numeri 4 in 4 æquatur cellulæ 5 basis 5, nempe H, seu 1. Igitur summa cellularum basis *quintæ*, dempta extrema seu unitate, æquatur summæ omnium combinationum quæ possunt fieri in 4.

Propositio VII. — *Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet, unitate aucta, est numerus progressionis duplæ*

---

de toutes les cellules de la base est égale au nombre total de combinaisons qu'on peut faire dans l'exposant de la base diminué d'une unité.

Prenons pour exemple le *cinquième* triangle arithmétique $GH\mu$. Je dis que la somme des cellules de sa base, savoir $H+E+C+R+\mu$, diminuée d'une unité, ou, ce qui revient au même, diminuée de l'une des cellules extrêmes H ou μ, est égale au nombre total des combinaisons qu'on peut faire dans le nombre 4, qui est inférieur d'une unité à l'exposant de la base du triangle. Pour préciser davantage, je dirai que la somme des cellules $H+E+C+R$ (je supprime la cellule extrême μ) est égale à la multitude des combinaisons de 1 dans 4, savoir 4, plus la multitude des combinaisons de 2 dans 4, savoir 6, plus la multitude des combinaisons de 3 dans 4, savoir 4, plus enfin la multitude des combinaisons de 4 dans 4, savoir 1.

En effet, la multitude des combinaisons de 1 dans 4 équivaut, d'après le lemme V, à la deuxième cellule de la cinquième base, c'est à dire à R, ou à 4; celle des combinaisons de 2 dans 4, à la troisième cellule de la même base, c'est-à-dire à C, ou à 6; celle des combinaisons de 3 dans 4, à la quatrième cellule de la même base, savoir à E, ou à 4; enfin, celle des combinaisons de 4 dans 4, à la cinquième cellule de la même base, savoir à H, ou à 1. Donc la somme des cellules de la cinquième base, l'une des deux extrêmes égale à l'unité étant laissée de côté, équivaut à la somme de toutes les combinaisons qu'on peut faire dans 4.

Proposition VII. — *La multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans un nombre quelconque est inférieure d'une unité au terme qui, dans la*

quæ ab unitate sumit exordium, quippe ille cujus exponens est numerus proxime major quam datus.

Sit numerus quilibet, verbi gratia, 4 : dico summam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15, unitate auctam, nempe 16, esse numerum *quintum* (nempe proxime majorem quam *quartum*) progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium.

Hoc nihil aliud est quam VIII consectatio trianguli arithmetici, et sic uno verbo demonstrari posset, *omnis enim basis est numerus progressionis duplæ :* sic tamen demonstro.

Summa enim combinationum omnium quæ fieri possunt in 4, unitate aucta, æquatur, ex lemmate VI, summæ cellularum basis *quintæ;* ipsa vero basis est *quintus* numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium, ex VIII consectatione trianguli arithmetici.

Propositio VIII. — *Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet, unitate aucta, dupla est summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero proxime minore, unitate auctæ.*

Hoc convenit cum VII consectatione trianguli arithmetici, nempe *omnis basis dupla est præcedentis :* sic autem ostendemus.

Sint duo numeri proximi 4, 5 : dico summam combinationum quæ fieri possunt in 5, nempe 31, unitate auctam, nempe 32, esse duplam summæ combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15, unitate auctæ, nempe 16.

Summa enim combinationum quæ fieri possunt in 5, unitate aucta,

---

progression double commençant par 1, occupe un rang marqué par le nombre immédiatement supérieur au nombre proposé.

Soit donné le nombre 4 : je dis que la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans 4, savoir 16, est inférieure d'une unité au *cinquième* terme de la progression double commençant par 1.

La démonstration de ce principe découle de la conséquence VIII du *Traité du triangle arithmétique*, d'après laquelle *la somme des cellules de chaque base est un nombre de la progression double qui commence par l'unité, dont l'exposant est le même que celui de la base.*

En effet, la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans 4, augmentée d'une unité, est égale, d'après le lemme VI, à la somme des cellules de la *cinquième base;* or cette somme, d'après la conséquence citée, équivaut elle-même au *cinquième* nombre de la progression double qui commence par l'unité. Donc, etc.

Proposition VIII. — *La multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans un nombre quelconque, étant augmentée d'une unité, donne une somme égale au double de la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans le nombre immédiatement inférieur, augmentée elle-même d'une unité.*

Cette proposition résulte de la conséquence VII du *Traite du triangle arithmétique,* d'après laquelle *la somme des cellules de chaque base est double de celles de la precedente.* Soient, en effet, les deux nombres 4 et 5; je dis que le nombre total des combinaisons qu'on peut faire dans 5, savoir 31, étant augmenté d'une unité, donne une somme 32, égale au double de la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans 4, augmentée elle-même d'une unité.

En effet, d'après la proposition précédente, le nombre total des combinai-

æquatur, ex præcedente, *sexto* numero progressionis duplæ. Summa vero combinationum quæ fieri possunt in 4, unitate aucta, æquatur, ex eadem, *quinto* numero progressionis duplæ. *Sextus* autem numerus progressionis duplæ duplus est proxime præcedentis, nempe *quinti*.

Propositio IX. — *Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in quovis numero, unitate minuta, dupla est summæ combinationum quæ fieri possunt in numero proxime minori.*

Hæc cum præcedente omnino convenit.

Sint duo numeri proximi 4, 5 : dico summam omnium combinationum quæ fieri possunt in 5, nempe 31, unitate minutam, nempe 30, esse duplam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15.

Etenim, ex præcedente, summa combinationum quæ fiunt in 4, unitate aucta, dupla est summæ combinationum quæ fiunt in 4, unitate auctæ : si ergo ex *minori* summa auferatur unitas, et ex *dupla* summa auferantur duæ unitates, reliquum summæ *duplæ*, nempe *summa combinationum quæ fiunt in* 5, *unitate minuta*, remanebit *dupla* residui alterius summæ, nempe *summæ combinationum quæ fiunt in* 4.

Propositio X. — *Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in quolibet numero, minuta ipsomet numero, æquatur summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in singulis numeris proposito minoribus.*

Hæc cum IX consectatione trianguli arithmetici concurrit, quæ sic ha-

---

sons qu'on peut faire dans 5, étant augmenté d'une unité, équivaut au *sixième* terme de la progression double. Pareillement, le nombre total des combinaisons qu'on peut faire dans 4, étant augmenté d'une unité, équivaut au *cinquième* terme de la progression double. Or le sixième terme de cette progression est évidemment égal au double du cinquième. Donc, etc.

Proposition IX. — *La multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans un nombre quelconque, étant diminué d'une unité, donne un reste égal au double de la multitude des combinaisons qu'on peut faire dans le nombre immédiatement inférieur au premier.*

Cette proposition ne diffère de la précédente que par l'énoncé.

Soient deux nombres consécutifs 4 et 5 ; je dis que le nombre total des combinaisons qu'on peut faire dans 5, savoir 31, étant diminué d'une unité, donne un reste 30, égal au double du nombre total des combinaisons qu'on peut faire dans 4, savoir 15.

En effet, il résulte de la proposition VIII, que le nombre total des combinaisons qu'on peut faire dans 5, étant augmenté d'une unité, donne une somme égale au double de la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans 4, augmentée elle-même d'une unité. Si donc de la première somme on retranche deux unités, et de la seconde, avant de la doubler, une unité seulement, les restes seront encore égaux; en d'autres termes, le nombre total des combinaisons qu'on peut faire dans 5, diminué d'une unité, est égal au double du nombre total des combinaisons qu'on peut faire dans 4.

Proposition X. — *La multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans un nombre quelconque, étant diminuée de ce nombre, donne un reste égal à la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans tous les nombres inférieurs au nombre proposé.*

La démonstration résulte de la conséquence IX du *Traité du triangle arith-*

bet, *basis quælibet unitate minuta æquatur summæ omnium præcedentium.* Sic autem ostendo.

Sit numerus quilibet 5 : dico summam omnium combinationum quæ possunt fieri in 5, nempe 31, ipso 5 minutam, nempe 26, æquari summæ omnium combinationum quæ possunt fieri in 4, nempe 15; plus summa omnium quæ possunt fieri in 3, nempe 7; plus summa omnium quæ possunt fieri in 2, nempe 3; plus ea quæ potest fieri in 1, nempe 1; quorum aggregatus est 26.

Etenim proprium numerorum hujus progressionis duplæ illud est, ut quilibet ex ipsis, verbi gratia, sextus 32, exponente suo minutus, nempe 6, id est 26, æquetur summæ inferiorum numerorum hujus progressionis, nempe $16+8+4+2+1$, unitate minutorum, nempe $15+7+3+1+0$, nempe 26. Unde facilis est demonstratio hujus propositionis.

Problema I. — *Dato quovis numero, invenire summam omnium combinationum quæ in ipso fieri possunt.* Absque triangulo arithmetico.

Numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium, cujus exponens proxime major est quam numerus datus, satisfaciet problemati, modo unitate minuatur.

Sit numerus datus, verbi gratia 5, quæritur summa omnium combinationum quæ in 5 fieri possunt.

Numerus *sextus* progressionis duplæ quæ ab unitate incipit, nempe 32, unitate minutus, nempe 31, satisfacit, ex lemmate VI; ergo possunt fieri 31 combinationes in numero 5.

---

métique, d'après laquelle chaque base diminuée d'une unité est égale à la somme de toutes les précédentes.

Soit le nombre 5; je dis que la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans ce nombre, savoir 31, étant diminuée de 5 lui-même, ce qui donne 26, équivaut à la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans 4, savoir 15, plus celle des combinaisons qu'on peut faire dans 3, savoir 7, plus celle des combinaisons qu'on peut faire dans 2, savoir 3, plus enfin celle des combinaisons qu'on peut faire dans 1, savoir 1.

Il suffira de rappeler ici qu'un terme quelconque de la progression double qui commence par l'unité, par exemple 32, étant diminué du nombre 6 qui marque son rang dans la progression, ce qui donne 26, fournit un reste égal à la somme de tous les termes précédents, savoir $16+8+4+2+1$, diminués chacun d'une unité, ce qui donne $15+7+3+1+0$ ou 26. On achèvera facilement la démonstration.

Problème I. — *Un nombre quelconque étant donné, trouver, sans avoir recours au triangle arithmétique, la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans ce nombre.*

On prendra, dans la progression double commençant par l'unité, le terme dont le rang surpasse d'une unité le nombre proposé. Ce terme, diminué d'une unité, satisfait au problème.

Soit demandé de trouver la multitude totale des combinaisons qu'on peut faire dans le nombre 5.

Le *sixième* terme 32 de la progression double, étant diminué d'une unité, ce qui donne 31, satisfait à la question, d'après le lemme VI. Ainsi la multitude des combinaisons possibles dans 5 est 31.

Problema II. — *Datis duobus numeris inæqualibus, invenire quot modis minor in majore combinetur.* Absque triangulo arithmetico.

Hoc est proprie ultimum problema *Tractatus trianguli arithmetici*, quod sic resolvo.

Productus numerorum qui præcedunt differentiam datorum unitate auctam dividat productum totidem numerorum continuorum, quorum primus sit minor datorum unitate auctus : quotiens est quæsitus.

Sint dati numeri 2, 6 : oportet invenire quot modis 2 combinetur in 6.

Assumatur eorum differentia 4, quæ unitate aucta est 5. Jam assumantur omnes numeri qui præcedunt ipsum 5, nempe 1, 2, 3, 4, quorum productus sit 24. Assumantur totidem numeri continui quorum primus sit 3, *nempe proxime major quam 2 qui minor est ex ambobus datis*, nempe 3, 4, 5, 6, quorum productus 360 dividatur per præcedentum productum 24 : quotiens 15 est numerus quæsitus. *Ita ut numerus 2 combinetur in 6 modis 15 differentibus.*

Nec difficilis demonstratio. Si enim quæratur in triangulo arithmetico quot modis 2 combinetur in 6, assumenda est cellula 3 basis 7, ex lemmate V, nempe cellula ξ, et ipsius numerus exponet multitudinem combinationum numeri 2 in 6. Ut autem inveniatur numerus cellulæ ξ cujus radix est 5, et exponens seriei 3, oportet, ex problemate trianguli arithmetici, *ut productus numerorum qui præcedunt 5 dividat productum totidem numerorum continuorum quorum primus sit 3, et quotiens erit numerus cellulæ ξ*; sed idem divisor ac idem dividendus in constructione hujus propositus est, quare et eumdem quotientem sortita

---

Problème II. — *Étant donnés deux nombres inégaux, trouver, sans faire usage du triangle arithmétique, combien de fois le plus petit se combine dans le plus grand.*

Cette question revient en réalité au dernier problème dont on a donné la solution dans le *Traité du triangle arithmétique* (voy. p. 423).

On forme le produit de tous les nombres naturels qui précèdent la différence des nombres proposés, préalablement augmentée d'une unité ; puis le produit d'un égal nombre de facteurs continus commençant au nombre immédiatement supérieur au plus petit des deux nombres donnés. Le quotient du deuxième produit par le premier satisfait au problème.

Soient les nombres 2 et 6 ; on demande combien de fois 2 se combine dans 6.

La différence 4 de ces deux nombres, étant augmentée d'une unité, donne 5. Le produit des facteurs 1, 2, 3, 4 qui précèdent 5 dans la série des nombres naturels est 24 ; celui de quatre facteurs continus dont le premier 3 surpasse d'une unité le plus petit des nombres proposés, savoir 3, 4, 5, 6 est 360. Le quotient 15 de 360 par 24 est le nombre demandé. Ainsi le nombre des combinaisons de 2 dans 6 est 15.

En effet, pour obtenir à l'aide du triangle arithmétique la multitude des combinaisons de 2 dans 6, il suffit, d'après le lemme V, de prendre le nombre contenu dans la troisième cellule ξ de la septième base. Mais pour trouver ce nombre, dont on connaît la racine 5 et l'exposant 3, il faut, d'après la règle donnée au dernier problème du *Traité du triangle arithmétique*, faire le produit de tous les nombres naturels qui précèdent 5, puis le produit d'autant de nombres naturels à commencer par 3, et diviser le

est divisio; ergo in hac constructione repertus est numerus cellulæ ξ, quare et exponens multitudinis combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. F. E. D.

Monitum. — Hoc problemate tractatum hunc absolvere constitueram, non tamen omnino sine molestia, quum multa alia parata habeam; sed ubi tanta ubertas, vi moderanda est fames : his ergo pauca hæc subjiciam.

Eruditissimus ac mihi charissimus D. D. de Ganières, circa combinationes, assiduo ac perutili labore, more suo, incumbens, ac indigens facili constructione ad inveniendum quoties numerus datus in alio dato combinetur, hanc ipse sibi praxim instituit.

Datis numeris, verbi gratia 2, 6, invenire quot modis 2 combinetur in 6.

Assumatur, inquit, progressio *duorum* terminorum *quia minor numerus est* 2, inchoando a majore 6, ac retrogrediendo, seu detrahendo unitatem ex unoquoque termino, hoc modo 6, 5; deinde assumatur altera progressio inchoando ab ipso minore 2 ac similiter retrogrediendo hoc modo 2, 1. Multiplicentur invicem numeri primæ progressionis 6, 5, sitque productus 30. Multiplicentur et numeri secundæ progressionis 2, 1, sitque productus 2. Dividatur major productus per minorem : quotiens est quæsitus.

Excellentem hanc solutionem ipse mihi ostendit, ac etiam demonstrandam proposuit, ipsam ego sane miratus sum, sed difficultate territus vix opus suscepi, et ipsi auctori relinquendum existimavi; attamen trianguli arithmetici auxilio, sic proclivis facta est via.

In V lemmate hujus, ostendi numerum cellulæ ξ, exponere multitudinem combinationum numeri 2 in 6; quare ipsius reciproca cellula K

---

deuxième produit par le premier. L'ensemble des opérations à effectuer pour avoir le nombre des combinaisons de 2 dans 6 est donc précisément celui que j'indiquais plus haut.

Remarque. — Je termine ici un traité auquel j'aurais désiré pouvoir donner plus d'extension, eu égard à l'abondance des matériaux que je tiens encore en réserve; mais cette abondance elle-même m'oblige à m'arrêter.

Je ne passerai toutefois point sous silence une règle trouvée par un de mes amis, le savant M. de Ganières, pour déterminer combien de fois un nombre donné se combine dans un autre.

Pour trouver, par exemple, combien de fois 2 se combine dans 6, il prescrit de multiplier entre eux *deux* facteurs consécutifs décroissant à partir de 6, savoir 6, 5, et de diviser leur produit 30 par le produit 2 de *deux* facteurs consécutifs décroissant à partir de 2, savoir 2, 1. Le nombre des facteurs de chaque produit est ici déterminé par le plus petit des nombres proposés. Le quotient obtenu satisfait à la question.

M. de Ganières me communiqua cette excellente solution, dont j'admirai la simplicité, et me proposa d'en chercher une démonstration. La difficulté m'effraya d'abord, et je pensais devoir abandonner à l'auteur le soin de la résoudre, quand je fus mis sur la voie par l'étude du triangle arithmétique.

J'ai fait voir, au lemme V du présent traité, que le nombre de la cellule ξ exprime la multitude des combinaisons de 2 dans 6; d'autre part on sait que

eumdem numerum continebit. *Verum cellula ipsa K est quotiens divisionis in qua productus numerorum* 1, 2, *qui præcedunt* 3 *radicem cellulæ K, dividit productum totidem numerorum continuorum quorum primus est* 5 *exponens seriei cellulæ K, nempe numerorum* 5, 6. Sed ille divisor ac dividendus sunt iidem ac illi qui in constructione amici sunt propositi; igitur eumdem quotientem sortitur divisio, quare ipse exponit multitudinem combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. D.

Hac demonstratione assecuta, jam reliqua quæ invitus supprimebam libenter omitto, adeo dulce est amicorum memorari.

POTESTATUM NUMERICARUM SUMMA.

Monitum. — Datis, ab unitate, quotcumque numeris continuis, verbi gratia 1, 2, 3, 4, invenire summam quadratorum eorum, nempe 1+4+9+16, id est 30, tradiderunt veteres; imo etiam et summam cuborum eorumdem; ad reliquas vero potestates non protraxerunt suas methodos, his solummodo gradibus proprias. Hic autem exhibetur, non solum summa quadratorum, et cuborum, sed et quadrato-quadratorum, et reliquarum in infinitum potestatum. Et non solum a radicibus ab unitate continuis, sed a quolibet numero initium sumentibus, verbi gratia, numerorum 8, 9, 10, etc. Et non solum numerorum qui progressione naturali procedunt, sed et eorum omnium qui progressione, verbi gratia, cujus differentia est 2, aut 3, aut 4, aut alius quilibet numerus, formantur, ut istorum 1, 3, 5, 7, etc., vel horum 2, 4, 6, 8, qui per incrementum binarii augentur, aut horum 1, 4, 7, etc. qui per incrementum ternarii, et sic de cæteris; sed, et quod amplius est, a quolibet numero exordium sumat illa progressio; sive incipiat ab unitate, ut isti 1, 4, 7, 10, 13, etc. qui sunt ejus pro-

---

la cellule K, réciproque de ξ, renferme le même nombre que celle-ci. Mais le nombre de la cellule K est le quotient obtenu en divisant le produit de deux facteurs consécutifs 5 et 6 croissant à partir de l'exposant 5 de l'ordre de la cellule, par le produit des nombres naturels 1 et 2 qui précèdent sa racine. On se trouve donc conduit ainsi à effectuer exactement les mêmes opérations qu'en suivant la règle proposée par mon ami, et le résultat final sera le même, quel que soit le principe sur lequel on s'appuie pour y parvenir.

Il m'était doux de pouvoir rappeler ici le travail d'un ami; et je renonce volontiers maintenant à publier des recherches personnelles dont le sacrifice m'eût tout d'abord semblé pénible.

SOMMATION DES PUISSANCES NUMÉRIQUES.

Remarques préliminaires. — Étant donnés, à partir de l'unité, plusieurs termes de la suite naturelle des nombres, on sait trouver, par les méthodes que les anciens nous ont fait connaître, la somme de leurs carrés et même celle de leurs cubes; mais ces méthodes ne sont plus applicables à la sommation des puissances de degré supérieur au troisième.

Je montrerai, dans ce traité, comment on trouve la somme des carrés, des cubes, des quatrièmes puissances, en général des puissances semblables quelconques d'un certain nombre de termes, non-seulement de la suite natu-

gressionis quæ per incrementum ternarii procedit, et ab unitate sumit exordium; sive ab aliquo hujus progressionis numero incipiat ut isti 7, 10, 13, 16, 19; sive, quod ultimum est, a numero qui non sit ejus progressionis, ut isti 5, 8, 11, 14, quorum progressio per ternarii differentiam procedit, et a numero 5, *ipsi progressioni extraneo*, exordium sumit. Et quod sane feliciter inventum est, tam multos differentes casus, *unica ac generalissima* resolvit *methodus; adeo simplex*, ut absque litterarum auxilio, quibus difficiliores egent enuntiationes, paucis lineis contineatur : ut ad finem problematis sequentis patebit.

Definitio. — Si binomium, cujus alterum nomen sit A, alterum vero numerus quilibet ut 3, nempe A + 3, ad quamlibet constituatur potestatem ut ad quartum gradum, cujus hæc sit expositio :

$$A^4 + 12.A^3 + 54.A^2 + 108.A + 81;$$

ipsi numeri 12, 54, 108, per quod ipse A multiplicatur in singulis gradibus quique partim ex numeris figuratis, partim ex numero 3, qui binomii est secundum nomen, formantur, vocabuntur *coefficientes* ipsius A.

Erit ergo *in hoc exemplo* 12 *coefficiens* A cubi, et 54 *coefficiens* A quadrati, et 108 *coefficiens* A *radicis*.

Numerus vero 81 *numerus absolutus* dicetur.

Lemma. — Sit radix quælibet 14; altera vero sit binomium 14 + 3 cujus primum nomen sit 14, alterum vero alius quilibet numerus 3, ita ut harum radicum 14, et 14 + 3, differentia sit 3. Constituantur ipsæ in quolibet gradu ut in quarto : ergo quartus gradus radicis 14 est 14^4; quartus vero gradus binomii 14 + 3 est $14^4 + 12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81$. *Cujus quidem binomii primum nomen* 14, *eosdem coefficientes sortitur*

---

relle, mais encore de toute autre progression par différence commençant à l'unité ou à tel nombre qu'on voudra. Une seule et même règle générale dont l'énoncé, débarrassé de toute notation algébrique, sera contenu dans un petit nombre de lignes, suffira pour résoudre les nombreux cas différents qui pourront se présenter.

Définition. — Soit un binôme A + 3, dont le premier terme est littéral et le second numérique; si l'on effectue le développement d'une puissance quelconque de ce binôme, de la quatrième par exemple, ce qui donne

$$A^4 + 12.A^3 + 54.A^2 + 108.A + 81,$$

les nombres 12, 54, 108, qui multiplient les diverses puissances de A seront appelés les *coefficients* de cette lettre; ils résultent de la combinaison des nombres figurés avec le second terme 3 du binôme.

Dans l'exemple cité, 12 sera le coefficient du cube de A; 54, celui du carré et 108 celui de la première puissance de A.

Enfin, le dernier terme du développement, savoir 81, sera dit un *nombre absolu*.

Lemme. — Soit pris un nombre quelconque 14, puis un deuxième nombre qui le surpasse de 3 unités, et qu'on peut en conséquence représenter par le binôme 14 + 3. En élevant ces deux nombres à une même puissance, à la quatrième par exemple, on a, d'une part 14^4, d'autre part le développement

$$14^4 + 12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81,$$

dans lequel les coefficients des puissances du premier terme 14 sont évidem-

in singulis gradibus, quos A sortitus est in similibus gradibus in expositione ejusdem gradus binomii A + 3, quod rationi consentaneum est; harum vero potestatum, nempe hujus 14^4 et hujus $14^4+12.\,14^3+54.\,14^2+108.\,14+81$, differentia est $12.\,14^3+54.\,14^2+108.\,14+81$: quæ quidem constat primo, ex radice 14 constituta in singulis gradibus proposito gradui *quarto* inferioribus, nempe in *tertio*, in *secundo* et in *primo*, et in unoquoque multiplicata per *coefficientes* quos A sortitur in similibus gradibus, in expositione ejusdem gradus binomii A + 3; deinde ex ipso numero 3, *qui est differentia radicum*, constituto in proposito *quarto* gradu, *numerus enim absolutus* 81, *est quartus gradus radicis* 3. Hinc igitur elicietur *canon iste :*

Duarum similium potestatum differentia æquatur *differentiæ radicum constitutæ in eodem gradu in quo sunt potestates propositæ*, plus *minori radice constituta in singulis gradibus proposito gradui inferioribus ac in unoquoque multiplicata per coefficientes quos A sortiretur in similibus gradibus, si binomium cujus primum nomen esset A, alterum vero esset differentia radicum, constitueretur in eadem potestate proposita.*

Sic ergo differentia inter 14^4 et 11^4, erit

$$12.\,11^3+54.\,11^2+108.\,11+81.$$

Differentia enim radicum est 3. Et sic de cæteris.

Ad summam potestatum cujuslibet progressionis inveniendam unica ac generalis methodus. — *Datis quotcumque numeris, in qualibet progressione, a quovis numero inchoante, invenire quarumvis potestatum eorum summam.*

Quilibet numerus 5 sit initium progressionis quæ per incrementum

---

ment égaux à ceux des mêmes puissances de A dans le développement de la quatrième puissance du binôme A + 3. La différence entre la quatrième puissance de 14 + 3 et la quatrième puissance de 14 est donc $12.\,14^3+54.\,14^2+108.\,14+81$; elle se compose premièrement de la somme des puissances de 14 inférieures à la quatrième, multipliées respectivement par les coefficients des mêmes puissances de A dans le développement de la quatrième puissance de la différence 3 entre les nombres proposés. De là cette *règle :*

La différence des mêmes puissances de deux nombres se compose : de la différence de ces nombres élevée à la puissance proposée; plus de la somme de toutes les puissances inférieures à celle-ci du plus petit des deux nombres, respectivement multipliées par les coefficients *des mêmes puissances de A dans le développement d'un binôme ayant pour premier terme A et pour second terme la différence des deux nombres donnés.*

La différence des quatrièmes puissances des nombres 14 et 11, par exemple, dont le premier surpasse le second de 3 unités, sera donc, d'après cette règle ;

$$12.\,11^3+54.\,11^2+108.\,11+81.$$

Méthode unique et générale pour trouver la somme des puissances semblables des termes d'une progression quelconque. — *Trouver la somme des puissances semblables d'un degré donné d'autant de termes consécutifs qu'on voudra, pris dans une progression dont la différence et le premier terme sont quelconques.*

Soient donnés les termes 5, 8, 11, 14, dans une progression dont le pre-

cujusvis numeri, verbi gratia *ternarii*, procedat, et in ea progressione dati sint quotlibet numeri, verbi gratia isti 5, 8, 11, 14, qui omnes in quacumque potestate constituantur, ut in tertio gradu seu cubo. Oportet invenire summam horum cuborum, nempe $5^3+8^3+11^3+14^3$.

Cubi illi sunt $125+512+1331+2744$, quorum summa est 4712 quæ quæritur et sic invenitur.

Exponatur binomium $A+3$ cujus primum nomen sit A, alterum vero sit numerus 3 qui est differentia progressionis.

Constituatur binomium hoc $A+3$ in gradu *quarto* qui proxime superior est proposito *tertio*, sitque hæc ejus expositio

$$A^4+12.A^3+54.A^2+108.A+81.$$

Jam assumatur numerus 17 qui in progressione proposita proxime sequitur ultimum progressionis terminum datum 14. Et constituto ipso 17 in eodem gradu *quarto*, nempe 83521, auferantur ab eo hæc:

Primo, summa numerorum propositorum $5+8+11+14$, nempe 38, multiplicata per numerum 108, qui est coefficiens ipsius A radicis;

Secundo, summa quadratorum eorumdem numerorum 5, 8, 11, 14, multiplicata per numerum 54, qui est coefficiens A quadrati.

Et sic deinceps procedendum esset si superessent gradus alii inferiores ipsi gradui tertio qui propositus est.

Deinde auferatur primus terminus propositus 5 in *quarto* gradu constitutus.

Denique auferatur numerus 3 qui est differentia progressionis *in* eodem gradu *quarto* constitutus, ac *toties* sumptus, quot sunt numeri propositi, nempe *quater* in hoc exemplo.

---

mier terme est 5 et la différence 3, et soit proposé de trouver la somme de leurs cubes, $4^3+8^3+11^3+14^3$.

Ces cubes sont 125, 512, 1331, 2744; leur somme est 4712; voici comment on parvient à la déterminer :

On forme le binôme $A+3$, dont le second terme est égal à la différence de la progression, puis on en développe la *quatrième* puissance, c'est-à-dire celle dont l'exposant est supérieur d'une unité à l'exposant de la puissance proposée; on obtient ainsi : $A^4+12.A^3+54.A^2+108.A+81$.

On élève pareillement à la quatrième puissance le nombre 17 qui, dans la progression, suit immédiatement le dernier des termes donnés, savoir 14; et du résultat, qui est 83521, on retranche successivement :

La somme des termes proposés $5+8+11+14$, ou 38, multipliée par le coefficient 108 de la première puissance de A dans le développement du binôme;

La somme des carrés des mêmes termes, multipliée par le coefficient 54 de la seconde puissance de A;

Et l'on continuerait de même s'il y avait encore des puissances inférieures à la puissance proposée.

Du reste obtenu on retranche ensuite :

La quatrième puissance du premier terme 5;

Enfin, la quatrième puissance de la différence 3, prise autant de fois qu'il y a de termes donnés dans la progression, savoir quatre fois dans l'exemple que nous traitons.

Residuum erit multiplex summæ quæsitæ, eamque *toties* continebit, *quoties* numerus 12 qui est coefficiens ipsius A cubi, seu A in gradu *tertio* proposito, continet unitatem.

Si ergo ad praxim methodus reducatur, numerus 17 constituendus est in 4 gradu, nempe 83521, et ab eo hæc auferenda sunt :

Primo, summa numerorum propositorum $5+8+11+14$, nempe 38, multiplicata per 108, unde oritur productus 4104;

Deinde, summa quadratorum numerorum propositorum, id est, $5^2+8^2+11^2+14^2$, nempe $25+64+121+196$, quorum summa est 406, quæ multiplicata per 54 efficit 21924.

Deinceps auferendus est numerus 5 in *quarto* gradu, nempe 625.

Denique auferendus est numerus 3 in *quarto* gradu, nempe 81, *quater* sumptus, nempe 324. Numeri ergo auferendi illi sunt, 4104, 21924, 625, 324; quorum summa est 26977, qua ablata a numero 83521, superest 56544.

Hoc ergo residuum continebit summam quæsitam, nempe 4712, multiplicatam per 12; et profecto 4712 per 12 multiplicata efficit 56544.

Paradigma facile est construere; hoc autem sic demonstrabitur.

Etenim numerus 17 in *quarto* gradu constitutus qui quidem sic exprimitur 17^4 æquatur $17^4-14^4+14^4-11^4+11^4-8^4+8^4-5^4+5^4$.

Solus enim 17^4 signum affirmationis solum sortitur, reliqui autem affirmantur ac negantur.

Sed differentia radicum 17, 14, est 3, eademque est differentia radicum 14, 11, eademque radicum 11, 8, ac etiam radicum 8, 5. Igitur ex præmisso lemmate :

17^4-14^4 æquatur $12.\ 14^3+54.\ 14^2+108.\ 14+81.$
Sic 14^4-11^4 æquatur $12.\ 11^3+54.\ 11^2+108.\ 11+81.$

Le reste final est égal à la somme demandée multipliée par le coefficient 12 de la *troisième* puissance de A, c'est-à-dire de la puissance proposée, dans le développement du binôme.

Ainsi, dans la pratique, on forme la quatrième puissance de 17, savoir 83521; on en retranche :

Le produit 4104 de la somme $5+8+11+14$ ou 38 par 108;

Le produit 21924 de la somme $5^2+8^2+11^2+14^2$ ou 406 par 54;

La quatrième puissance de 5, savoir 625;

Enfin le quadruple de la quatrième puissance de 3, savoir 324.

La somme des nombres 4104, 21924, 625, 324 est 26977; ôtée de 83521, elle donne pour reste 56544.

Ce reste est égal à 12 fois la somme demandée.

Voici maintenant la démonstration.

La quatrième puissance de 17 peut être ainsi représentée :

$$17^4-14^4+14^4-11^4+11^4-8^4+8^4-5^4+5^4;$$

car tous les termes de cette expression, sauf le premier 17^4, étant affectés tour à tour du signe positif et du signe négatif, s'annulent entre eux.

Mais entre 17 et 14, de même qu'entre 14 et 11, entre 11 et 8, entre 8 et 5, la différence est constamment de 3 unités; donc, d'après le lemme précédent :

$$17^4-14^4=12.14^3+54.14^2+108.14+81.$$
$$14^4-11^4=12.11^3+54.11^2+108.11+81.$$

Sic $11^4 - 8^4$ æquatur $12.\ 8^3 + 54.\ 8^2 + 108.\ 8 + 81$.
Sic $8^4 - 5^4$ æquatur $12.\ 5^3 + 54.\ 5^2 + 108.\ 5 + 81$.

Non interpretor 5^4.

Igitur 17^4 æquatur his omnibus :

$$\begin{aligned} &12.14^3 + 54.11^2 + 108.14 + 81 \\ &+ 12.11^3 + 54.11^2 + 108.11 + 81 \\ &+ 12.\ 8^3 + 54.\ 8^2 + 108.\ 8 + 81 \\ &+ 12.\ 5^3 + 54.\ 5^2 + 108.\ 5 + 81 \\ &+ 5^4. \end{aligned}$$

Hoc est, mutato ordine, 17^4 æquatur his

$$\begin{aligned} &5 + 8 + 11 + 14 \text{ multiplicatis per } 108; \\ &+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 \text{ multiplicatis per } 54; \\ &+ 5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3 \text{ multiplicatis per } 12; \\ &+ 81 + 81 + 81 + 81; \\ &5^4; \end{aligned}$$

Ablatis undique his

$$\begin{aligned} &5 + 8 + 11 + 14 \text{ multiplicatis per } 108; \\ &+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 \text{ multiplicatis per } 54; \\ &+ 81 + 81 + 81 + 81; \\ &+ 5^4; \end{aligned}$$

Remanet 17^4 minus his, nempe

$$\begin{aligned} &5 - 8 - 11 - 14 \text{ multiplicatis per } 108, \\ &- 5^2 - 8^2 - 11^2 - 14^2 \text{ multiplicatis per } 54; \\ &- 81 - 81 - 81 - 81; \\ &- 5^4; \end{aligned}$$

æqualis $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$ multiplicatis per 12. Q. E. D.

$11^4 - 8^4 = 12.\ 8^3 + 54.\ 8^2 + 108.\ 8 + 81$.
$8^4 - 5^4 = 12.\ 5^3 + 54.\ 5^2 + 108.\ 5 + 81$.

Ajoutant, on trouve pour 17^4 la valeur suivante :

$$\begin{aligned} &12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81 \\ &+ 12.11^3 + 54.11^2 + 108.11 + 81 \\ &+ 12.\ 8^3 + 54.\ 8^2 + 108.\ 8 + 81 \\ &+ 12.\ 5^3 + 54.\ 5^2 + 108.\ 5 + 81 \\ &+ 5^4, \end{aligned}$$

ou, en intervertissant l'ordre des termes :

$$\begin{aligned} &5 + 8 + 11 + 14, \text{ somme multipliée par } 108; \\ &+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2, \text{ somme multipliée par } 54; \\ &+ 5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3, \text{ somme multipliée par } 12; \\ &+ 81 + 81 + 81 + 81 \\ &+ 5^4. \end{aligned}$$

Si donc on retranche de part et d'autre :

$$\begin{aligned} &5 + 8 + 11 + 14, \text{ somme multipliée par } 12; \\ &+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2, \text{ somme multipliée par } 54; \\ &+ 81 + 81 + 81 + 81 \\ &+ 5^4; \end{aligned}$$

Il reste d'une part 17^4 diminué des quantités précédentes, et d'autre part la somme demandée $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$ multipliée par 12; ce qu'il fallait démontrer.

Sic ergo potest institui enuntiatio et generalis constructio.

SUMMA POTESTATUM. — *Datis quotcumque numeris, in qualibet progressione, a quovis numero initium sumente, invenire summam quarumvis potestatum eorum.*

Exponatur binomium, cujus primum nomen sit A, alterum vero sit numerus qui differentia progressionis est, et constituatur hoc binomium in *gradu qui proxime superior* est gradui proposito, et in expositione potestatis ejus notentur *coefficientes* quos A sortitur in singulis gradibus.

Constituatur et in eodem *gradu superiori numerus qui* in eadem progressione proposita *proxime sequitur ultimum* progressionis terminum propositum. Et ab eo *auferantur* hæc :

Primo, primus terminus *progressionis datus seu minimus numerus datorum in eodem* superiori gradu *constitutus;*

Secundo, *numerus qui* differentia est progressionis *in eodem* superiori gradu *constitutus, ac* toties *sumptus* quot *sunt termini dati;*

Tertio, *auferantur* singuli numeri *dati, in* singulis gradibus *proposito gradui* inferioribus *constituti, ac in unoquoque gradu multiplicati per* jam notatos coefficientes *quos A sortitur in iisdem gradibus in expositione hujus* superioris *gradus binomii primo assumpti.*

Reliquum *est multiplex summæ quæsitæ,* eamque toties *continet* quoties coefficiens *quem A in gradu* proposito *sortitur continet unitatem.*

Monitum. — Praxes jam particulares sibi quisque pro genio suppeditabit : verbi gratia, si quæris summam quotlibet numerorum progres-

---

On peut donc présenter comme il suit l'énoncé et la solution générale du problème proposé.

SOMMATION DES PUISSANCES. — *Trouver la somme des puissances semblables d'un degré donné d'autant de termes consécutifs qu'on voudra pris dans une progression dont la différence et le premier terme sont quelconques.*

On compose un binôme ayant pour premier terme une quantité littérale A et pour second terme la différence de la progression donnée; on élève ce binôme à une puissance dont l'exposant est supérieur d'une unité à celui de la puissance proposée, et l'on note les coefficients des puissances successives de A dans le développement obtenu.

On élève à la même puissance que le binôme, le nombre qui dans la progression suit immédiatement le dernier des termes donnés, et l'on retranche du résultat obtenu :

1° Le premier des termes donnés, préalablement élevé à la même puissance que le nombre dont il vient d'être question.

2° La différence de la progression élevée à cette même puissance, puis multipliée par le nombre des termes donnés.

3° Les sommes des puissances semblables de degrés inférieurs au degré proposé, respectivement multipliées par les coefficients des mêmes puissances de A dans le développement.

Le reste trouvé est un multiple de la somme cherchée, et renferme cette somme autant de fois que l'unité est contenue dans le coefficient de la puissance de A dont l'exposant est égal au degré de la puissance proposée.

Remarque. — Il est aisé de déduire de ce qui précède la règle qui devra être appliquée dans chaque cas particulier. Si, par exemple on demande de

sionis naturalis a quolibet inchoantis, hic, ex methodo generali, elicietur canon :

In progressione naturali a quovis numero inchoante, differentia inter quadratum minimi termini et quadratum numeri qui proxime major est ultimo termino, minuta numero qui exponit multitudinem, dupla est aggregati ex omnibus.

Sint quotlibet numeri naturali progressione continui, quorum primus sit ad libitum, verbi gratia, *quatuor* isti 5, 6, 7, 8 : dico $9^2 - 5^2 - 4$ æquari duplo $5+6+7+8$.

Similes canones et reliquarum potestatum summis inveniendis et reliquis progressionibus facile aptabuntur, quos quisque sibi comparet.

Conclusio. — Quantum hæc notitia ad spatiorum curvilineorum dimensiones conferat, satis norunt qui in *indivisibilium* doctrina tantisper versati sunt. Omnes enim omnium generum parabolæ illico quadrantur, et alia innumera facillime mensurantur.

Si ergo illa, quæ hac methodo in numeris reperimus, ad quantitatem continuam applicare libet, hi possunt institui canones.

Canones ad naturalem progressionem quæ ab unitate sumit exordium.

Summa linearum est ad quadratum maximæ, ut.......... 1 ad 2.
Summa quadratorum est ad cubum maximæ, ut.......... 1 ad 3.
Summa cuborum est ad gradum maximæ, ut............ 1 ad 4.

---

trouver la somme d'un certain nombre de termes de la suite naturelle, pris à partir d'un nombre donné quelconque, on opérera de la manière suivante :

Du carré du nombre immédiatement supérieur au plus grand des termes proposés on retranchera le carré du plus petit de ces termes et le nombre même des termes proposés; le reste sera double de la somme cherchée.

Pour obtenir, d'après cette règle, la somme des nombres 5, 6, 7, 8, on retranchera de 9^2 successivement 5^2 et 4; le reste $9^2 - 5^2 - 4$ sera égal au double de la somme demandée.

On formulera sans difficulté des règles analogues dans tous les cas particuliers qui pourront se présenter.

Conclusion. — Toutes les personnes quelque peu familiarisées avec la *doctrine des indivisibles* apercevront au premier coup d'œil le parti qu'on peut tirer de ce qui précède pour la détermination des aires curvilignes. Rien ne sera plus facile, en effet, que d'obtenir immédiatement les quadratures de tous les genres de paraboles et les mesures d'une infinité d'autres grandeurs.

Si donc nous étendons aux quantités continues les résultats trouvés pour les nombres, nous pourrons poser les règles suivantes.

Règles relatives à la progression naturelle qui commence à l'unité.

La somme d'un certain nombre de lignes [1] est au carré de la plus grande, comme.. 1 est à 2.

La somme des carrés est au cube de la plus grande, comme.. 1 est à 3.

La somme des cubes est à la quatrième puissance de la plus grande, comme.. 1 est à 4.

1. Voir plus loin, p. 536, dans la *Lettre de Dettonville à de Carcavi*, le sens que Pascal attache à ces termes : *somme d'un certain nombre de lignes, de surfaces, de solides.*

Canon generalis ad progressionem naturalem quæ ab unitate sumit exordium.

Summa omnium in quolibet gradu, est ad maximam in proxime superiori gradu, ut unitas ad exponentem superioris gradus.

Non de reliquis disseram, quia hic locus non est : hæc obiter notavi; reliqua facili negotio penetrantur, eo posito principio, *in continua quantitate, quotlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas, nihil ei superaddere.* Sic puncta lineis, lineæ superficiebus, superficies solidis, nihil adjiciunt : seu ut numericis, in numerico tractatu, verbis utar, radices quadratis, quadrata cubis, cubi quadrato-quadratis, etc., nihil apponunt. Quare, inferiores gradus nullius valoris existentes, non considerandi sunt. Hæc, quæ indivisibilium studiosis familiaria sunt, subjungere placuit, ut nunquam satis mirata connexio, qua ea etiam quæ remotissima videntur, in unum addicat unitatis amatrix natura, ex hoc exemplo prodeat, in quo, *quantitatis continuæ dimensionem*, cum *numericarum potestatum summa*, conjunctam contemplari licet.

DE NUMERIS MULTIPLICIBUS EX SOLA CHARACTERUM NUMERICORUM ADDITIONE AGNOSCENDIS.

Monitum. — Nihil tritius est apud arithmeticos, quam numeros numeri 9 multiplices, constare characteribus, quorum aggregatum est

---

Règle générale relative à la progression naturelle qui commence à l'unité.

La somme des mêmes puissances d'un certain nombre de lignes est à la puissance de degré immédiatement supérieur de la plus grande d'entre elles, comme l'unité est à l'exposant de cette dernière puissance.

Ce n'est point ici le lieu de m'étendre davantage sur les conséquences qu'on peut tirer de ce qui précède, et que chacun découvrirait sans difficulté, s'il a soin de se rappeler ce principe : *qu'une grandeur continue d'un certain ordre n'augmente pas si on lui ajoute des quantités d'un ordre inférieur en tel nombre qu'on voudra.* Ainsi par exemple une somme de lignes n'augmente pas plus par l'addition d'une somme de points, qu'une somme de surfaces n'augmente par l'addition d'une somme de lignes ou une somme de solides par l'addition d'une somme de surfaces; autrement dit, et pour employer le langage des nombres dans un traité relatif aux nombres, la première puissance est négligeable par rapport au carré, le carré par rapport au cube, et ainsi de suite : en sorte qu'on peut toujours négliger les quantités d'ordre inférieur à côté des quantités d'ordre plus élevé.

J'ai pris plaisir à rapprocher ces vérités, familières à tous ceux qui étudient les indivisibles, et à rattacher au problème de la *sommation des puissances numériques* les questions relatives aux *dimensions des grandeurs continues*, afin de montrer par cet exemple l'admirable liaison que la nature, qui tend toujours à l'unité, a établie entre les choses en apparence les plus éloignées.

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ DES NOMBRES, DÉDUITS DE LA CONNAISSANCE DE LA SOMME DE LEURS CHIFFRES.

Remarque préliminaire. — Le caractère de divisibilité d'un nombre par 9, fondé sur la divisibilité de la somme de ses chiffres, est très-fréquemment

quoque ipsius 9 multiplex. Si enim ipsius, verbi gratia, dupli 18, characteres numericos 1 + 8, jungas, aggregatum erit 9. Ita ut ex sola additione characterum numericorum numeri cujuslibet, liceat agnoscere, utrum sit ipsius 9 multiplex : verbi gratia, si numeri 1719 characteres numericos jungas 1 + 7 + 1 + 9, aggregatum 18 est ipsius 9 multiplex; unde certo colligitur, et ipsum 1719 ejusdem 9 esse multiplicem. Vulgata sane illa observatio est; verum ejus demonstratio a nemine quod sciam data est, nec ipsa notio ulterius provecta. In hoc autem tractatulo non solum istius, sed et variarum aliarum observationum generalissimam demonstrationem dedi, ac methodum universalem agnoscendi ex sola additione characterum numericorum propositi cujusvis numeri, utrum ille sit alterius propositi numeri multiplex; et non solum in progressione denaria, qua numeratio nostra procedit (denaria enim ex instituto hominum, non ex necessitate naturæ ut vulgus arbitratur, et sane satis inepte, posita est); sed in quacumque progressione instituatur numeratio, non fallet hic tradita methodus, ut in paucis mox videbitur paginis.

Propositio unica. — *Agnoscere ex sola additione characterum dati cujuslibet numeri, an ipse sit alterius dati numeri multiplex.*

Ut hæc solutio fiat generalis, litteris utemur vice numerorum. Sit ergo divisor, numerus quilibet expressus per litteram A; dividendus autem numerus expressus per litteras TVNM, quarum ultima M exprimit numerum quemlibet in unitatum columna collocatum; N vero, numerum quemlibet in denariorum columna; V numerum quemlibet in columna centenariorum; T autem numerum quemlibet in columna millenariorum, et sic deinceps in infinitum : ita ut, si litteras in numeros convertere velis, assumere possis loco ipsius M quemlibet ex novem

---

employé en arithmétique. A l'aide de ce caractère on reconnaît que 18 est un multiple de 9 parce que la somme 1 + 8 de ses chiffres est égale à 9; que 1719 est également un multiple de 9, parce que la somme 1 + 7 + 1 + 9 ou 18 de tous ses chiffres est elle-même divisible par 9, et ainsi de suite. Bien que cette règle soit d'un usage général, je ne crois pas que personne jusqu'à présent en ait donné une démonstration, ni cherché à étendre davantage le principe qui en est le point de départ. Je justifierai, dans ce petit traité, le caractère de divisibilité par 9 et plusieurs autres analogues; j'y exposerai aussi une méthode générale qui permet de reconnaître tous les diviseurs d'un nombre donné, à la simple inspection de la somme de ses chiffres, et qui s'applique non-seulement à notre système décimal de numération (système dont la base est de pure convention, contrairement à ce que le vulgaire pense sans raison aucune) mais encore à tout système de numération ayant pour base tel nombre qu'on voudra.

Proposition unique. — *Reconnaître, à la seule inspection de la somme de ses chiffres, si un nombre donne est divisible par un autre nombre donné.*

Pour plus de généralité nous représenterons ici les nombres par des lettres. Soit donc A un diviseur quelconque, et TVNM un dividende dans lequel les lettres M, N, V, T représentent respectivement les chiffres des unités simples, des dizaines, des centaines, des unités de mille, et ainsi de suite; de telle sorte que, pour passer des quantités littérales aux quantités numériques, il suffirait de remplacer chacune des lettres par un chiffre

primis characteribus, verbi gratia, 4, loco N quemlibet numerum, ut 3, loco V quemlibet numerum, ut 5; et loco T, quemlibet numerum, ut 6; et collocando singulos illos characteres numericos in propria columna, prout collocatæ sunt litteræ quæ illos exprimunt, proveniet hic numerus 6534, divisor autem A erit numerus quilibet, ut 7. Missis autem peculiaribus his exemplis generali ista enuntiatione omnia amplectimur.

Dato quocumque dividendo TVNM, et quocumque divisore A, agnoscere ex sola additione characterum numericorum TVNM, utrum ipse numerus TVNM exacte dividatur per ipsum numerum.

Ponantur seorsim numeri serie naturali continui 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, et cæteri a dextra ad sinistram sic.

etc. 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
etc. K I H G F E D C B 1.

Jam ipsi primo numero 1, subscribatur unitas.

Ex ipsa unitate *decies* sumpta, seu ex 10 auferatur A quoties fieri poterit, et supersit B qui sub 2 subscribatur.

Ex B *decies* sumpto seu ex 10 B, auferatur A quoties poterit, et supersit C qui ipsi 3 subscribatur.

Ex 10 C, auferatur A quoties poterit, et supersit D qui ipsi 4 subscribatur.

Ex 10 D, auferatur A, etc. in continuum.

---

par exemple M par 4, N par 3, V par 5, T par 6, ce qui donnerait pour dividende 6534, le diviseur A étant un nombre quelconque tel que 7. Pour le moment toutefois nous laisserons de côté les exemples particuliers, afin de comprendre tous les cas possibles dans une même solution générale.

Étant donc donné le nombre T V M N, il s'agit de reconnaître, à la seule inspection de la somme de ses chiffres, s'il est exactement divisible par le nombre A.

On écrit sur une même ligne, et dans l'ordre décroissant, les nombres de la suite naturelle :

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Au-dessous de l'unité on place l'unité.

De celle-ci prise *dix fois*, c'est-à-dire du nombre 10, on retranche le diviseur A autant de fois que possible, et l'on écrit le reste B sous le nombre 2.

De B pris *dix fois* on retranche de même le diviseur A autant de fois que possible, et l'on écrit le reste C sous le nombre 3.

De 10 C on retranche encore le diviseur A autant de fois que possible, et l'on écrit le nouveau reste D sous le nombre 4.

Et ainsi de suite.

On forme de cette manière le tableau suivant :

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
K	I	H	G	F	E	D	C	B	1.

Prenant maintenant, de droite à gauche, les chiffres dont se compose le nombre donné TVNM, on les multiplie respectivement par les restes inscrits

Nunc sumatur ultimus character dividendi M, qui quidem et primus est a dextra ad sinistram, scribaturque seorsim semel; *primo enim numero* 1, *subjacet unitas*.

M
N in B
V in C
T in D

Jam sumatur secundus character N, et toties repetatur quot sunt unitates in B *qui secundo numero subjacet*, hoc est multiplicetur N per B, et sub M ponatur productus.

Jam sumatur tertius character V, et toties repetatur quot sunt unitates in C, *sub tertio numero subjecto*, seu multiplicetur V per C, et productus sub primis ponatur.

Sic denique multiplicetur quartus T per D, et sub aliis scribatur. Et sic in infinitum.

Dico prout summa horum numerorum M + N in B + V in C + T in D, est ipsius A multiplex aut non, et quoque ipsum numerum TVNM esse ejusdem multiplicem, vel non.

Etenim si propositus dividendus *unicum* haberet characterem M, sane prout ipse esset multiplex ipsius A, numerus quoque M esset ejusdem A multiplex, cum sit ipse numerus totus.

Si vero constet *duobus* characteribus NM : dico quoque, prout M + N in B est multiplex A, et ipsum numerum NM ejusdem multiplicem esse.

Etenim character N in columna denarii æquatur 10 N.

Verum ex constructione, est..........	10 — B multiplex A
Quare ducendo 10 — B in N est.......	10 N — B in N multiplex A.
Si ergo contingit et esse.............	M + B in N multiplicem A.
Ergo ambo ultimi multiplices juncti..	10 N + M erunt mult. A.
Id est N in columna denarii et M in columna unitatis, seu numerus........	N M est multiplex A.

Q. E. D.

---

dans la seconde ligne de ce tableau, pris eux-mêmes de droite à gauche, et l'on écrit les produits obtenus les uns au-dessous des autres, savoir :

Le produit de M par l'unité, c'est-à-dire..	M;
Le produit de N par B, c'est-à-dire.......	N × B;
Le produit de V par C, c'est-à-dire.......	V × C;
Le produit de T par D, c'est-à-dire.......	T × D.

Et ainsi de suite.

Or je dis que, pour que le nombre proposé TVNM soit divisible par A, il faut et il suffit que la somme des produits M, N × B, V × C, T × D, etc., soit elle-même divisible par A.

La chose est évidente si le nombre proposé n'a qu'un seul chiffre.

Soit donc un nombre de deux chiffres, représenté par NM; je dis que pour qu'il soit divisible par A il faut et il suffit que la somme M + N × B le soit.

En effet, le chiffre N, placé au rang des dizaines, équivaut à 10 N; or :

D'après le calcul..........................	10 — B est un multiple de A;
Multipliant par N.............	10 N — B × N sera aussi un multiple de A;
Si donc il arrive que.................	M + B × N soit un multiple de A,
La somme de ces deux dernières quantités, savoir..........	10 N + M sera elle-même un multiple de A.

Mais 10 N + M c'est le nombre proposé, donc, etc.

Si numerus dividendus constet *tribus* characteribus VNM : dico quoque ipsum esse aut non esse multiplicem A, prout M + N in B + V in C, erit ipsius A multiplex, vel non.

Etenim character V, in columna centenarii, æquatur 100 V.

At ex constructione est.................... 10 — B, multiplex A.
Quare multiplicando 10 — B per 10.......... 100 — 10 B, mult. A
Et ducendo ipsos in V.............. 100 V — 10 B in V, mult. A.
Sed est etiam ex constructione.............. 10 B — C, mult. A
Quare ducendo in V............... 10 B in V — C in V, mult. A.
Sed ex ostensis...................... 100 V — 10 B in V, mult. A.
Ergo juncti duo ultimi................. 100 V — C in V, mult. A.
Jam vero ostendemus ut in secundo casu. 10 N — B in N, mult. A.
Ergo juncti duo ultimi, 100 V + 10 N — C in V - B in N, mult. A.
Ergo si contingat hos numeros. C in V + B in B + M, esse mult. A.
Ambo ultimi juncti, nempe....... 100 V + 10 N + M, est mult. A.

Seu V, in columna centenarii, N denarii et M unitatis, hoc est numerus VNM, est multiplex A. Q. E. D.

Non secus demonstrabitur de numeris ex *pluribus* characteribus compositis. Quare prout, etc. Q. E. D.

Exemplis gaudeamus. — Quæro qui sint numeri multiplices numeri 7. Scriptis continuis 1, 2, 3, 4, 5, etc. subscribo 1 sub 1.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1

Ex unitate decies sumpta, seu ex 10 aufero 7 quoties potest, superest 3 quem pono sub 2.

Soit encore un nombre de trois chiffres VNM; pour qu'il soit divisible par A, je dis qu'il faut et suffit que la somme M + N × B + V × C soit elle-même divisible par A.

En effet, le chiffre V, placé au rang des centaines, équivaut à 100 V; or :

D'après le calcul.......................... 10 — B est un multiple de A;
Multipliant par 10.............. 100 — 10 B sera aussi un multiple de A :
Multipliant encore par V........ 100 V — 10 B × V sera un multiple de A;
Mais d'après le calcul...................... 10 B — C est un multiple de A;
Multipliant par V............... 10 B × V — C × V sera un multiple de A;
Et comme on vient d'établir que.. 100 V — 10 B × V est un multiple de A,
La somme de ces deux dernières quantités, savoir : 100 V — C × V sera elle-même un multiple de A;
Si donc il arrive que.......... C × V + N × B + M soit un multiple de A,
La somme de ces deux dernières quantités, savoir : 100 V + 10 N + M sera encore un multiple de A.

Mais 100 V + 10 N + M, c'est le nombre proposé VNM; donc, etc.

Et de même si le nombre donné se composait de plus de trois chiffres.

Exemples. — Un nombre quelconque etant donné, reconnaître s'il est divisible par 7.

Soit proposé de reconnaître si le nombre 287542178 est divisible par 7.

Les nombres naturels étant rangés sur une même ligne horizontale, et dans l'ordre décroissant de gauche à droite, j'écris l'unité sous l'unité.

De l'unité, prise 10 fois, je retranche 7 autant de fois que possible, et je place le reste 3 sous le chiffre 2.

Ex 3 decies sumpto, seu ex 30 aufero 7 quoties potest, superest 2 quem pono sub 3.

Ex 20 aufero 7 quoties potest, superest 6 et pono sub 4.
Ex 60 aufero 7 quoties potest, superest 4 et pono sub 5.
Ex 40 aufero 7 quoties potest, superest 5 et pono sub 6.
Ex 50 aufero 7 quoties potest, superest 1 et pono sub 7.
Ex 10 aufero 7 quoties potest, et redit 3 et pono sub 8.
Ex 30 aufero 7 quoties potest, et redit 2 et pono sub 9.

Et sic redit series numerorum 1, 3, 2, 6, 4, 5, in infinitum.

Jam proponatur numerus quilibet 287542178, de quo quæritur utrum exacte dividatur per 7; hoc sic agnoscetur.

Sumatur *semel* ejus character qui primus est a dextra ad sinistram, nempe 8, *primo enim numero seriei continuæ subjacet unitas*, quare ponatur ille 8, primus character *semel*.......................... 8.

Secundus, qui est 7, *ter* sumatur, seu per 3 multiplicetur, *secundo enim numero seriei subjacet* 3, sitque productus......... 21.

Tertius *bis* sumatur, *subjacet enim* 2 *ipsi* 3, quare tertius character qui est 1, per 2 multiplicatus sit.......................... 2.

Quartus eadem ratione per 6 multiplicatus...................... 12.

Quintus per 4 multiplicatus.................................. 16.

A reporter....... 59.

Je multiplie le reste par 10 et du produit 30 je retranche 7 autant de fois que possible; je place le nouveau reste 2 sous le chiffre 3.

De 20 je retranche 7 autant de fois que possible et j'écris le reste 6 sous 4.

De 60 je retranche 7 autant de fois que possible; il reste 4 que j'écris sous 5.

De 40 je retranche 7 autant de fois que possible; le reste est 5; je l'écris sous 6.

De 50 je retranche 7 autant de fois que possible, et je place le reste 1 sous 7.

De 10 je retranche 7 autant de fois que possible, ce qui me fait retomber sur le premier reste obtenu, savoir 3; je l'écris sous 8.

De 30 je retranche 7 autant de fois que possible; je retrouve le second reste obtenu, savoir 2, que j'écris sous 9.

Les restes déjà obtenus, savoir : 1, 3, 2, 6, 4, 5, se retrouveront à l'avenir indéfiniment dans le même ordre. Je formerai donc le tableau suivant :

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1.

Je multiplie actuellement les chiffres successifs du nombre proposé, en partant de celui des unités simples, respectivement par les restes de même rang pris à partir de la droite, dans la seconde ligne de ce tableau; j'écris les produits obtenus les uns au-dessous des autres, savoir :

Le produit de 8 par l'unité, c'est-à-dire.... 8
Le produit de 7 par 3.................... 21
Le produit de 1 par 2.................... 2
Le produit de 2 par 6.................... 12
Le produit de 4 par 4.................... 16

A reporter........ 59

Report... ...	59.
Sextus per 5 multiplicatus..	25.
Septimus *semel*, *septimo enim subajcet* 1....................	7.
Octavus ter sumptus..	24.
Nonus bis sumptus...	4.
Et sic deinceps si superessent. Jungantur hi numeri..............	119.

Si ipse aggregatus 119 est multiplex ipsius 7, numerus quoque propositus 287542178, ejusdem 7 multiplex erit.

Potest autem dignosci eadem methodo, utrum ipse 119, sit multiplex 7, scilicet sumendo semel primum characterem.............. 9.
secundum characterem ter.. 3.
et præcedentem bis.. 2.

14.

Si enim summa 14 est multiplex 7, erit et 119 ejusdem multiplex.

Sed et si curiositate potius quam necessitate moti, velimus agnoscere utrum 14 sit multiplex 7, sumatur character ultimus semel........ 4.
et præcedens ter.. 3.

7.

Si summa est multiplex ipsius 7, erit et 14 multiplex 7, quare et 14, et 119, et 287542178.

Vis agnoscere quinam numeri dividantur per 6. Scriptis, ut sæ-

---

Report.........	59
Le produit de 5 par 5....................	25
Le produit de 7 par 1....................	7
Le produit de 8 par 3....................	24
Le produit de 2 par 2....................	4
et j'en fais la somme..............................	119

Si 119 est divisible par 7, le nombre proposé 287542178 le sera aussi.

La même méthode peut encore servir à reconnaître si 119 est un multiple de 7.

On multipliera 9 par l'unité, ce qui donne...	9
Puis 1 par 3..............................	3
Et enfin 1 par 2..........................	2
Et l'on fera la somme....................	14

Si cette somme est divisible par 7, 119 le sera également.

Enfin, et par curiosité plutôt que par nécessité, on pourra traiter encore le nombre 14 comme on a traité 119, c'est-à-dire

Multiplier 4 par l'unité, ce qui donne.......	4
Puis 1 par 3..............................	3
Et faire la somme........................	7

Celle-ci étant évidemment divisible par 7, le nombre 14 le sera aussi; partant 119 le sera, et par suite, enfin, le nombre proposé 287542178 sera lui-même un multiple de 7.

Un nombre quelconque étant donné, reconnaître s'il est divisible par 6.

Soit donné le nombre 248742.

Les nombres naturels étant encore écrits les uns à côté des autres dans

prius dictum est, numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, etc., et 1 sub 1 posito,

etc. 4 3 2 1
etc. 4 4 4 1

Ex 10 aufer 6, reliquum 4 sub 2 ponito.
Ex 40 aufer 6, reliquum 4 sub 3 ponito.
Ex 40 aufer 6, reliquum 4 sub 4 ponito.

Et sic semper redibit 4, quod agnosci potuit ubi semel rediit.

Ergo, si proponatur numerus quilibet, de quo quærebatur utrum sit dividendus per 6, nempe 248742, sume ultimam ejus figuram semel. 2,
præcedentem quater.......... 16,
præcedentem quater, etc.......... 28,
et uno verbo, primam semel, reliquarum vero.......... 32,
summam quater.......... 16.
8.
102.

Si summa 102 dividatur per 6, dividetur et ipse numerus propositus 248742 per eumdem 6.

Vis agnoscere utrum numerus dividatur per 3. Scriptus ut prius numeris naturalibus, et 1 sub 1 posito

5 4 3 2 1
1 1 1 1 1

Ex 10 aufer 3 quoties potest, reliquum 1 sub 2 ponito.
Ex 10 aufer 3 quantum potest, reliquum 1 sub 3 ponito, et sic in infinitum.

Ergo si proponatur numerus quilibet 2451, ut scias utrum dividatur per 3,
sume semel ultimam figuram.......... 1,
præcedentem semel.......... 5,
et semel singulas.......... 4,
2.
12.

---

l'ordre décroissant, je pose l'unité sous l'unité; je retranche 6 de 10, et je place le reste 4 sous 2; je retranche ensuite 6 de 40 autant de fois que possible, et je place le reste 4 sous 3; le reste 4 se reproduit donc indéfiniment Je forme donc le tableau qui suit :

4 3 2 1
4 4 4 1

Au chiffre des unités du nombre proposé j'ajoute maintenant les produits de tous les autres chiffres multipliés chacun par 4, et si la somme $2 + 4 \times 4 + 7 \times 4 + 8 \times 4 + 4 \times 4 + 2 \times 4$, c'est-à-dire 102, est divisible par 6, le nombre 248742 sera lui-même divisible par 6.

Un nombre quelconque étant donné, reconnaître s'il est divisible par 3.

On construira le tableau des restes successifs comme dans les exemples précédents :

5 4 3 2 1
1 1 1 1 1.

Et l'on reconnaîtra sans peine que le reste 1 se répète indéfiniment. D'où

Si summa dividatur per 3, dividetur et numerus propositus per 3.

Vis agnoscere utrum numerus dividatur per 9. Scriptis numeris 1, 2, 3, etc., et 1 sub 1 posito,

Ex 10 aufer 9, et quoniam superest 1, patet *unitatem* contingere singulis numeris. Ergo, si numeri propositi singuli characteres simul sumpti dividantur per 9, dividetur et ipse.

Vis agnoscere utrum numerus dividatur per 4. Scriptis numeris naturalibus ut mos est, et posito 1 sub 1,

4	3	2	1
0	0	2	1

Ex 10 aufer 4 quantum potest, reliquum 2 pone sub 2.
Ex 20 aufer 4 quantum potest, reliquum 0 pone sub 3.
Ex 00 aufer 4, superest semper 0.
Quare si proponatur numerus dividendus 2486, pono ultimum characterem semel.. 6,
præcedentem bis, *subjacet enim 2 sub 2*........................ 16.
22.

Præcedens per 0 multiplicatus facit zero et sic de reliquis; quare ad ipsos non attendito; et si summa priorum, nempe 22, per 4 dividatur, dividetur et ipse, secus autem, non.

Sic numeri quorum ultimus character semel, præcedens bis, præcedens quater (*reliquis neglectis*, *zero enim sortiuntur*), simul juncti numerum efficiunt multiplicem 8, sunt ipsi et ejusdem 8 multiplices, secus autem, non.

In exemplum autem dabimus et illud

---

résulte qu'un nombre donné, 2451 par exemple, sera divisible par 3, si la somme 2 + 4 + 5 + 1 de ses chiffres est elle-même divisible par 3.

Un nombre étant donné, reconnaître s'il est divisible par 9.

Ici encore le reste 1 se répète indéfiniment. Donc, pour qu'un nombre quelconque soit divisible par 9, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres le soit.

Un nombre étant donné, reconnaître s'il est divisible par 4.

Voici le tableau des restes, construit comme dans les exemples précédents.

4	3	2	1
0	0	2	1

Ayant posé le reste 2 sous le nombre 2, on le multiplie par 10, ce qui donne 20; retranchant 4 autant de fois que possible, il reste 0 qu'on place sous 3. A partir de ce moment le reste 0 se reproduit indéfiniment. Si donc la somme faite du chiffre des unités et du double de celui des dizaines est un multiple de 4, le nombre proposé sera lui-même divisible par 4.

On trouvera de même que, pour qu'un nombre soit divisible par 8, il faut et il suffit que la somme faite du chiffre des unités, du double de celui des dizaines et du quadruple de celui des centaines, soit un multiple de 8.

Prenons un dernier exemple.

***Agnoscere qui numeri dividantur per* 16.** Scriptis, ut dictum est, numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., et 1 sub 1 posito

7	6	5	4	3	2	1
0	0	0	8	4	10	1

Ex 10 aufer 16 quantum potest, superest ipse 10. *Ex minore enim numero major numerus subtrahi non potest; quare ipsemet numerus* 10 *ponatur sub* 2.

Ex ipso 10 decies sumpto, ut mos est, seu ex 100, aufero 16 quantum potest; superest 4 quem pono sub 3.

Ex 40 aufero 16 quantum potest, reliquum 8 pono sub 4.

Ex 80 aufero 16 quantum potest, superest 0.

Ideo omnis numerus cujus ultimus character semel sumptus, penultimus decies, præcedens quater, et præcedens octies, efficiunt numerum multiplicem 16, erit et ipse ipsius 16 multiplex.

Sic reperies omnes numeros, quorum penultimus character decies. reliqui autem omnes, scilicet ultimus, ante penultimus, præante penultimus, et reliqui semel sumpti, efficiunt numerum divisibilem per 45, vel 18, vel 15, vel 30, vel 90, et uno verbo omnes divisores numeri 90, duobus constantes characteribus, dividi quoque et ipsos per hos divisores.

Non difficilis inde ad alia progressus; sed intentatam huc usque materiam aperuisse, et satis obscuram lucidissima demonstratione illustravisse, sufficit. Ars etenim illa, qua ex additione characterum numeri noscitur per quos sit divisibilis, ex ima numerorum natura, et ex

---

***Un nombre étant donné, reconnaître s'il est divisible par* 16.**

Voici le tableau des restes :

7	6	5	4	3	2	1
0	0	0	8	4	10	1.

Ayant écrit l'unité sous l'unité, on la multiplie par 10. Le diviseur 16 ne pouvant se retrancher de 10, on écrit ce dernier nombre lui-même sous 2. On le multiplie ensuite par 10, ce qui donne 100, et de ce produit on retranche 16 autant de fois que possible; il reste 4, qu'on écrit sous 3. Le reste suivant est 8, et, à partir de celui-ci, on retrouve indéfiniment le reste 0.

Donc, pour qu'un nombre soit divisible par 16, il faut et il suffit qu'en ajoutant ensemble le chiffre des unités, 10 fois celui des dizaines, 4 fois celui des centaines et 8 fois celui des unités de mille, la somme obtenue soit elle-même divisible par 16.

On reconnaîtra de même que tous les nombres pour lesquels le décuple des chiffres des dizaines, ajouté à tous les autres chiffres pris une fois chacun, donne une somme divisible par l'un quelconque des diviseurs à deux chiffres de 90, savoir 45, 18, 15, 30, 90, seront eux-mêmes des multiples de ce diviseur.

Il serait facile d'étendre encore ces notions; mais je me contenterai d'avoir ouvert la route et jeté quelque lumière sur ce sujet nouveau et assez obscur. Les caractères de divisibilité que j'ai fait connaître exigent, pour être applicables, que les nombres soient écrits dans notre système ordinaire de numé-

eorum denaria progressione vim suam sortitur : si enim alia progressione procederent, verbi gratia, duodenaria (quod sane gratum foret) et sic ultra primas novem figuras, aliæ duæ institutæ essent, quarum altera denarium, altera undenarium exhiberet; tunc non amplius contingeret, numeros quorum omnes characteres simul sumpti efficiunt numerum multiplicem 9, esse et ipsos ejusdem 9 multiplices.

Sed methodus nostra, necnon et demonstratio, et huic progressioni, et omnibus possibilibus convenit.

Si enim in hac duodenaria progressione, proponitur agnoscere an numerus dividatur per 9,

Instituemus, ut antea, numeros naturali serie continuos 1, 2, 3, 4, 5, etc., et 1 sub 1 posito

	4	3	2	1
.	0	0	3	1

Ex unitate jam duodecies sumpta seu ex 10 (qui jam potest *duodecim*, non autem *decem*) auferendo 9 quantum potest, superest 3, quem pono sub 2.

Ex 30 (qui jam potest *triginta sex*, scilicet *ter duodecim*) aufer 9 quantum potest, et superest nihil, continetur enim 9 quater exacte in *triginta sex;* pono igitur 0 sub 3.

Et ideo, zero sub reliquis characteribus continget.

Unde colligo, omnes numeros, quorum ultimus character semel sumptus, penultimus vero ter (*de cæteris non curo quales sint, zero enim sortiuntur*) efficiunt numerum divisibilem per 9, dividi quoque per 9, in duodenaria progressione.

---

ration décimale; dans tout autre système, dans celui par exemple dont la base est 12 (et qui serait sans doute d'un usage fort commode), il en faudrait changer les énoncés. Le système duodécimal emploie, outre les neuf premiers caractères, deux figures nouvelles pour désigner, l'une le nombre dix, l'autre le nombre onze; dans ce mode de numération, il ne serait plus exact de dire que tout nombre dont la somme des chiffres est un multiple de 9 est lui-même divisible par 9.

Mais la méthode que j'ai fait connaître, et la démonstration que j'en ai donnée, conviennent encore à ce système ainsi qu'à tout autre.

Pour trouver le caractère de divisibilité par 9, on écrit, comme on l'a fait plus haut, la suite des nombres naturels, et l'on place l'unité sous l'unité. De celle-ci, prise *douze* et non *dix* fois, on retranche le diviseur 9 et l'on écrit le reste 3 sous le nombre 2. On multiplie ce reste par douze et du produit 30 (lisez trente-six) on retranche encore 9 autant de fois que possible, ce qui donne pour reste zéro, car trente-six contient quatre fois exactement le nombre 9. Les restes suivants seront nuls. On forme de cette manière le tableau que voici :

....	4	3	2	1
....	0	0	3	1

D'où l'on conclut que tous les nombres, écrits dans le système duodécimal, pour lesquels la somme du premier chiffre de droite et du triple du second (il n'est pas besoin de s'occuper des autres) sera divisible par 9, seront eux-mêmes des multiples de 9.

Sic in hac progressione duodenaria omnes numeri quorum singuli characteres simul sumpti efficiunt numerum divisibilem per 11, sunt et divisibiles per eumdem.

In nostra vero progressione denaria, contingit omnes numeros divisibiles per 11, ita se habere, ut ultimus semel sumptus, penultimus decies, præcedens semel, præcedens decies, præcedens semel, præcedens decies, et sic in infinitum, conflare numerum multiplicem 11.

Hæc et alia facili studio, ex ista methodo quisque colliget; tetigimus quidem quoniam intentata placent, relinquimus vero ne nimia perscrutatio tædium pariat.

PROBLEMATA DE CYCLOIDE,

PROPOSITA MENSE JUNII 1658.

Quum ab aliquot mensibus, quædam circa cycloidem[1], ejusque centra gravitatis, meditaremur, in propositiones satis arduas ac difficiles, ut nobis visum est, incidimus, quarum solutionem a præstantissimis toto orbe geometris supplices postulamus, proposito ipsis præmio, non mercedis gratia (quod absit!) sed in obsequii nostri, aut potius meriti eorum qui hæc invenerint, publicum argumentum.

Quæ vero proponimus sunt ejus modi. Dato puncto quolibet Z (fig. 53)

On reconnaîtrait aussi que, dans le même système de numération, tous les nombres dont la somme des chiffres est divisible par onze, sont eux-mêmes des multiples de onze.

Dans le système décimal ordinaire, pour qu'un nombre fût divisible par 11, il faudrait que la somme de ses chiffres de rang impair, ajoutée à celle de ses chiffres de rang pair chacun pris dix fois, donnât un multiple de 11.

Il serait facile de justifier ces deux règles et d'en ajouter d'autres encore aux précédentes. Si j'en ai dit quelques mots, c'est parce que je cédais volontiers à l'attrait de la nouveauté; toutefois je quitte maintenant ce sujet; de plus longues explications fatigueraient infailliblement le lecteur.

PROBLÈMES SUR LA CYCLOÏDE,

PROPOSÉS EN JUIN 1658.

Nous étant occupé, il y a quelques mois, de diverses questions touchant la cycloïde[1] et son centre de gravité, plusieurs problèmes, dont la résolution nous semble devoir exiger quelques efforts, vinrent se présenter à notre esprit. Nous en demandons instamment la solution à tous les géomètres de l'univers, offrant à ceux qui l'auront trouvée un prix, non pour rémunérer leurs efforts, (loin de nous cette pensée!) mais pour leur témoigner notre déférence et rendre publiquement hommage à leur mérite.

Voici ces problèmes :

Par un point Z (fig. 53), pris sur une cycloïde quelconque, on trace parallè-

1. Cycloidis definitio ad finem hujus scripti habetur.

in quacumque cycloide ABCD, ex quo ducta sit ZY basi AD parallela quæ axem CF secet in puncto Y; quæruntur:

Dimensio spatii CZY; ejusdemque centrum gravitatis; solida genita ex circumvolutione dicti spatii CZY, tam circa ZY quam circa CY; et horum solidorum centra gravitatis.

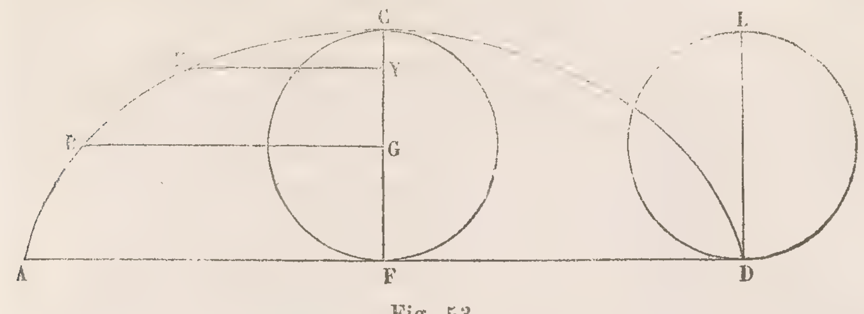


Fig. 53.

Quod si eadem solida plano per axem ducto secentur; et sic fiant utrinque duo solida, duo scilicet ex solido circa basim ZY, et duo ex solido circa axem CY genito, cujusque horum solidorum quærimus etiam centra gravitatis.

Quia vero quæsitorum demonstratio forsan adeo prolixa evadet, ut vix intra præstitutum tempus exsequi satis commode possit, genio et otio doctissimorum geometrarum consulentes, ab his tantum postulamus, ut demonstrent, vel more antiquorum, vel certe per doctrinam indivisibilium (hanc enim demonstrandi viam amplectimur) omnia quæ quæsita sunt, data esse : ita ut facile ex demonstratis, quælibet puncta quæsita ex datis in hypothesibus, possint inveniri.

Et ut apertius mentem meam explicem, nec subsit aliquid ambiguum, exemplo rem illustro. Proponatur, verbi gratia, parabola ABC (fig. 54),

---

lement à la base AD une droite ZY qui coupe l'axe CF au point Y. On propose de trouver :

L'aire CZY et son centre de gravité; les volumes des solides engendrés par la révolution de CZY autour de ZY et autour de CY, ainsi que les centres de gravité de ces solides; enfin les centres de gravité des quatre solides partiels obtenus en coupant chacun des deux précédents, savoir celui qui est de révolution autour de la base ZY et celui qui est de révolution autour de l'axe CY, par un plan conduit suivant cet axe.

La rédaction complète des solutions pouvant devenir fort longue, et par suite difficile à terminer dans le délai fixé, nous nous bornerons, pour ne point contrarier les géomètres dans leurs occupations ou dans leurs loisirs, à leur demander de faire voir, soit à la manière des anciens, soit par la méthode des indivisibles dont nous faisons nous-même usage, que les données suffisent pour déterminer toutes les choses demandées; en sorte qu'il soit facile, d'après leurs indications, de déduire l'une quelconque de ces choses de celles qui sont renfermées dans l'énoncé.

L'exemple suivant fera savoir plus complétement notre pensée et préviendra toute équivoque. Soit ABC une parabole, AB son axe, AC sa base et BD une

cujus axis AB, basis AC, tangens BD, perpendicularis axi AB. Inveniendum sit centrum gravitatis trilinei DCB. Satis factum esse problemati censerem, si demonstretur, datum esse centrum gravitatis parabolæ ABC, necnon et centrum gravitatis rectanguli CDBA, et proportionem hujus rectanguli cum parabola CBA; ideoque datum esse centrum gravitatis quæsitum trilinei CDB. Nam etsi præcise punctum in quo reperitur centrum gravitatis non exhibeatur, demonstratum tamen est datum esse, quum ea ex quibus invenitur data sint; resque eo deducta erit ut nihil aliud supersit præter calculum, in quo nec vis ingenii nec peritia artificis requiruntur: ideoque non is a nobis calculus exigitur, cur enim in iis immoraremur? Sed tantummodo petimus demonstrari res quæ proponuntur datas esse.

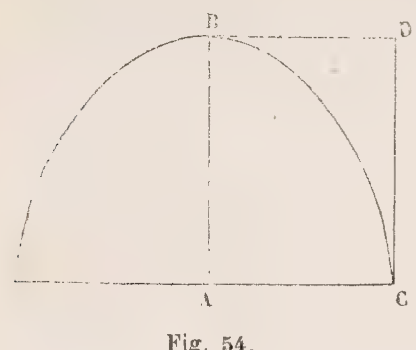


Fig. 54.

Verum doctissimi geometræ prorsus necessarium judicabunt, et ab his postulamus, duarum propositionum, vel duorum casuum integram constructionem, seu integrum calculum.

Primus casus est quum punctum Z constituitur in A.

Secundus, quum idem punctum Z datur in B, in quo transit parallela GB ducta a puncto G, centro circuli genitoris cycloidis.

Quod si aliquis error calculi in his duobus casibus subrepserit, eum libenter condonamus, et veniam quam ipsi peteremus facile promerebuntur.

---

tangente perpendiculaire à l'axe AB; on demande le centre de gravité du triligne DCB. Nous regarderions ce problème comme résolu par quiconque aurait démontré que les donnés suffisent pour déterminer le centre de gravité de la parabole ABC, celui du rectangle CDBA et le rapport entre l'aire de ce rectangle et l'aire de la parabole CBA; ces choses étant connues, il n'y aurait plus aucune difficulté à trouver la position du centre de gravité du triligne; pour en achever la détermination numérique il ne resterait, en effet, qu'à terminer les calculs, ce qui ne réclame ni une grande pénétration d'esprit, ni l'habileté d'un maître. N'ayant donc aucune raison pour exiger ces calculs, nous nous contenterons de toute solution établissant que les données suffisent pour déterminer toutes les choses demandées.

Toutefois, et sur ce point les géomètres partageront sans doute notre avis, il nous semble nécessaire de réclamer, soit la démonstration complète, soit le calcul complet de deux propositions ou cas particuliers, à savoir :

Premièrement, du cas où le point Z se confondrait avec A;

Deuxièmement, de celui où ce même point Z se trouverait en B, sur la parallèle GB menée à la base de la cycloïde par le centre G du cercle générateur.

Si quelque erreur de calcul venait à se glisser dans les solutions de ces deux cas particuliers, nous la pardonnerions de grand cœur, excusant volontiers chez les autres ce que nous désirerions qu'on excusât chez nous-même.

Quisquis superius proposita, intra primam diem mensis octobris anni 1658, solverit et demonstraverit, magnus erit nobis Apollo.

Et primus quidem consequetur valorem quadraginta duplorum aureorum Hispanicorum quos ipsi Hispani *doblones*, et Galli *pistoles* vocant; vel certe, si mavult, ipsos duplos aureos.

Secundus vero viginti ejusmodi duplos aureos. Si unus tantum solverit, sexaginta solus habebit.

Et quia serio rem agimus, dictos sexaginta duplos aureos illustrissimo domino de Carcavi, regio consiliario Parisiis commoranti apud celsissimum dominum ducem de Liancourt deponi curavimus, qui eos exsolvet statim ac demonstrationes quæ ad ipsum mittentur, veræ ac geometricæ, a viris ab ipso ad id deputatis, judicabuntur. Et quum illustrissimum consiliarium, jam a multis annis virum probum, et matheseos amantissimum agnoverimus, audacter pollicemur rem sincere et absque fallacia exsequendam.

Quod si his circiter tribus elapsis mensibus nullus inveniatur qui quæsita nostra solverit, non denegabimus quæ ipsi invenimus, nec aliis invidebimus unde majora jam inventis nanciscantur, et ex quibus forsan apud posteros gratiam inibimus.

Hoc unum restat ut lineæ cycloidis descriptionem exhibeamus, a qua brevitatis causa abstinendum arbitrabamur, quum hæc linea jam pridem Galileo, Toricellio, et aliis innotuerit; sed quia eorum libri omnibus non sunt obnoxii, ideo hanc ex Toricellio damus.

Les prix seront décernés à ceux qui, avant le 1er octobre 1658, auront résolu et démontré les questions proposées.

A l'auteur de la solution qui se trouvera la première en date, il sera accordé un prix d'une valeur de quarante doubles d'or espagnols, qu'on nomme *doublons* en Espagne et *pistoles* en France ; ce prix pourra d'ailleurs être donné en espèces si on le préfère.

A l'auteur de la seconde solution, il sera remis un prix de vingt doubles d'or. Enfin, si une seule solution nous parvient dans la limite des délais assignés, celui qui en sera l'auteur recevra seul les soixante doubles d'or.

Et pour donner à chacun toutes les garanties désirables, nous avons eu soin de faire déposer cette somme entre les mains de M. de Carcavi, conseiller du roi, demeurant à Paris chez M. le duc de Liancourt, lequel délivrera les prix aussitôt que les solutions reçues auront été jugées vraies et géométriques par les personnes qu'il lui aura plu de s'adjoindre à cet effet. L'éminent conseiller nous étant connu depuis longues années comme un homme de la plus haute honorabilité et comme un grand ami des sciences, nous pouvons affirmer avec une entière certitude que les choses seront faites en conscience, et que toute fraude sera écartée.

Enfin, le 1er octobre venu, si personne n'a résolu nos problèmes, nous publierons les solutions que nous avons trouvées nous-même, laissant ensuite à chacun le droit de s'en servir pour arriver à des résultats plus importants; peut-être la postérité nous saura-t-elle quelque gré de les avoir fait connaître.

Il ne nous reste plus qu'à donner la description de la cycloïde, description que, pour abréger, nous avions cru devoir omettre, parce qu'elle a été donnée il y a longtemps déjà par Galilée, par Toricelli et par d'autres encore. Toutefois, les ouvrages de ces géomètres n'étant pas à la portée de tous, j'emprunterai à Toricelli la définition suivante.

DESCRIPTIO CYCLOIDIS. — Concipiatur super manente recta linea DA (fig. 53), circulus DL, contingens rectam DA, in puncto D, noteturque punctum D, tanquam fixum in peripheria circuli DL : tum intelligatur super manente recta DA converti circulum DL motu circulari simul et progressivo versus partes A, ita ut subinde aliquo sui puncto rectam lineam DA semper contingat, quousque fixum punctum D iterum ad contactum revertatur, puta in A. Certum est quod punctum D fixum in peripheria circuli rotantis DL, aliquam lineam describet, surgentem primo a subjecta linea DA, deinde culminantem versus C, postremo pronam descendentemque versus punctum A : et talis linea vocata est cyclois.

DE EODEM ARGUMENTO ADDITAMENTUM.

Quum circa ea quæ de cycloide proposuimus, duo orta esse dubia, nobis illustrissimus D. de Carcavi significaverit, his statim occurrendum duximus, et ita occurrimus.

Prius inde oritur, quod in proponendis nostris de cycloide problematis hac voce usi fuerimus, *in quacumque cycloide:* quum tamen unius tantum speciei cycloidis definitionem attulerimus. Verum nihil aliud intelleximus præter solam illam simplicem, naturalem ac primariam cycloidem, cujus ex Toricellio descriptionem dedimus; quum enim quæ de illa resolvuntur facile sit ad omnes alias species protrahere, qui nostra problemata de hac sola solverit, nobis omnino satisfecerit.

Posterius in eo consistit, quod a nobis non sit præcise positum an

---

DESCRIPTION DE LA CYCLOÏDE. — Concevez sur une ligne droite immobile DA (fig. 53) un cercle DL tangent à cette droite en un point D que vous regarderez comme fixé à la circonférence du cercle; imaginez ensuite que ce cercle, roulant sur DA et restant toujours en contact avec cette droite par un de ses points, s'avance vers l'extrémité A jusqu'à ce que le point fixe D revienne une seconde fois en contact, ce qui arrivera par exemple en A. Le point D aura décrit dans ce trajet une ligne courbe qui, s'élevant d'abord de plus en plus au-dessus de la base DA, atteindra son point culminant en C, pour redescendre ensuite vers le point A : cette ligne courbe a reçu le nom de cycloïde.

ADDITION AU PROGRAMME PRÉCÉDENT.

M. de Carcavi nous ayant fait savoir que certaines personnes avaient élevé des difficultés au sujet des problèmes que nous avons proposés concernant la cycloïde, nous avons cru devoir leur faire réponse sans tarder.

On nous fait observer, premièrement, que dans les énoncés de nos problèmes nous nous sommes servi des mots, *dans une cycloïde quelconque* (*in quacumque cycloide*), tandis que nous ne définissions qu'une seule espèce de cycloïde. Nous n'avons entendu parler en effet que de cette cycloïde simple, naturelle et première, dont nous avons donné la description d'après Toricelli; et comme il est facile d'étendre à toute autre espèce ce qui est démontré pour celle-ci, nous nous regarderons comme entièrement satisfait par quiconque aura résolu sur cette dernière les problèmes que nous avons proposés.

On objecte en second lieu que nous n'avons pas spécifié explicitement si

supponamus datam esse rationem basis cycloidis AD (fig. 53) cum sua altitudine, seu cum diametro circuli genitoris FC; sed ipsam datam esse rationem pro concesso usurpandum arbitrabamur, et, ut omnino æquum est, datam esse supponimus.

Nihil ergo jam superest obscuritatis. Unum tamen restare videtur, ut doctissimos geometras ad propositiones nostras commodius et libentius investigandas invitemus; scilicet ea omnia removere quæ a perspicacitate ingenii, quam solam magni facimus, et explorare ac coronare instituimus, sunt aliena, qualia sunt tam calculus integer multorum casuum quem postulabamus, quam absoluta solutionum conscriptio; quum ea non a viribus ingenii, sed ab aliis circumstantiis pendeant. Hoc itaque tantummodo jam instituimus, ut sola problematum difficultas remaneat superanda. Nempe :

Qui publico instrumento, intra præstitutum tempus, illustrissimo domino de Carcavi significaverit se eorum quæ quæsita sunt demonstrationem penes se habere; et aut ipsammet demonstrationem quantumvis compendiosam ad ipsum miserit : aut si cartæ mandare nondum per otium licuerit, saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem, casus quem mox designabimus calculum dederit, seque paratum esse professus fuerit omnia omnino demonstrare ad ipsius D. de Carcavi nutum, hunc nobis satisfecisse declaramus; et consentimus, primum qui hæc fecerit primo, secundum secundo, præmio donandum, si sua solutio ab ipso D. de Carcavi virisque ad id secum adhibitis, quum ipsi visum

---

nous supposions donné ou non le rapport entre la base AD de la cycloïde et sa hauteur, laquelle est égale au diamètre FC du cercle générateur. Nous pensions que chacun se croirait en droit de traiter ce rapport comme donné; nous le supposerons tel, ce qui est de toute justice.

Toute obscurité se trouve ainsi dissipée. Une chose cependant nous reste à faire encore, afin de rendre plus commode et plus agréable aux géomètres l'invitation que nous leur avons adressée de résoudre nos propositions; c'est d'écarter de notre programme tous les choses, telles que développement complet des calculs dans les cas particuliers ou rédaction entière des solutions qui ne réclament aucune pénétration d'esprit; cette dernière qualité étant la seule dont nous fassions cas, la seule que nous recherchions et que nous désirions couronner. Quant au surplus, l'exécution en dépend plutôt des circonstances étrangères que des savants eux-mêmes. Afin donc de ne laisser subsister d'autre difficulté que celle qui dépend du fond même de la question, nous nous bornerons à poser en ces termes les conditions du concours :

Celui qui, par acte public et dans le délai fixé, aura fait savoir à M. de Carcavi qu'il possède la solution des questions proposées; qui lui en aura envoyé, soit une démonstration abrégée, soit au moins, pour prouver la vérité de son assertion, si le temps nécessaire pour achever la rédaction lui avait fait défaut, le calcul d'un cas particulier que nous indiquerons plus bas, et se sera fait fort de donner l'entière démonstration de tous les autres cas sur l'invitation de M. de Carcavi; celui-là, disons-nous, aura satisfait aux conditions du concours. Le premier prix sera accordé à celui qui les aura remplies le premier; le second prix, à celui qui sera le second en date, si toutefois les solutions produites sont reconnues géométriques et vraies par M. de Carcavi et par les juges qu'il se sera adjoints à cet effet.

fuerit, exhibita, geometrica ac vera judicetur, salvo semper erroris calculo.

Casus autem, cujus solius sufficiet calculus, ille est. Si semicyclois ACF circa basim AF convertatur, et solidum inde genitum secetur plano per ipsam AF (quæ jam hujus solidi axis est) ducto, quod quidem solidum dividet in duo semisolida paria : alterutrius horum semisolidorum centrum gravitatis assignari postulamus.

Voici maintenant le cas particulier dont le calcul sera regardé comme suffisant.

Une demi-cycloïde ACF, tournant autour de sa base AF, engendre un solide que l'on coupe en deux moitiés égales par un plan conduit suivant l'axe de révolution AF ; on demande de déterminer le centre de gravité de chacune de ces moitiés.

RÉFLEXIONS

Sur les conditions des prix attachés à la solution des problèmes concernant la cycloïde.

Le 1er octobre étant arrivé, auquel expiroit le temps destiné pour recevoir les solutions de ceux qui prétendroient aux prix des problèmes de la roulette, appelée en latin *cyclois*, ou *trochois*, nous en ouvririons dès à présent l'examen, si l'absence de M. de Carcavi, qui a eu la bonté d'envoyer nos écrits et d'en recevoir les réponses, ne nous obligeoit à retarder jusqu'à son retour, qui doit être dans peu de temps. Mais nous avons jugé à propos de répondre cependant à deux sortes de personnes, qui s'efforcent de traverser cet examen par des interprétations ridicules qu'ils font de mes paroles, qu'ils tournent entièrement contre leur sens naturel et contre celui que j'ai : essayant, par ces chicaneries, de frustrer ceux qui auroient envoyé les véritables solutions, des prix qu'ils auroient mérités.

Les premiers sont des gens qui, écrivant de pays fort éloignés, mandent, par leurs lettres du mois d'août, qu'ayant reçu les écrits que nous leur envoyâmes au mois de juin, ils vont travailler à cette recherche; mais que, pour ouvrir l'examen à Paris, on doit attendre non-seulement le 1er octobre 1658, mais encore trois ou quatre mois après, et même huit, ou peut-être un an : n'étant pas impossible, disent-ils, que leurs lettres, quoique écrites le 1er octobre, soient très-longtemps en chemin, soit par les incommodités de la saison, soit par celles de la guerre, soit enfin par les tempêtes de mer qui peuvent arrêter, ou même faire périr les vaisseaux qui les portent, auquel cas ils seroient recevables d'envoyer de secondes lettres, pourvu qu'ils eussent de bonnes attestations de leurs officiers publics, qu'elles fussent conformes aux premières, écrites avant le 1er octobre.

Certainement, si mon intention avoit été telle, et si les paroles de mon écrit le marquoient, je serois bien suspect d'avoir proposé une chimère, en proposant les prix, puisque j'aurois pu ne jamais les donner ; et que

quiconque se fût présenté au 1er octobre avec ses solutions, j'aurois toujours pu le remettre, dans l'attente de quelque vaisseau qui, ayant eu le vent favorable en portant mes écrits, pouvoit l'avoir contraire, ou même être péri, en rapportant les réponses. Et même ceux qui auroient gagné les prix en se trouvant les premiers entre ceux dont on auroit reçu les solutions au 1er octobre, ne seroient jamais en assurance d'en pouvoir jouir, puisqu'ils pourroient toujours leur être contestés par d'autres solutions qui pourroient arriver tous les jours, premières en date, et qui les excluroient sur la foi des signatures des bourgmestres et officiers de quelque ville à peine connue, du fond de la Moscovie, de la Tartarie, de la Cochinchine ou du Japon. D'ailleurs on auroit eu trop de tromperies à craindre sur cet article; il n'y eût eu aucune sûreté à produire ses résolutions à l'examen, puisque des plagiaires auroient pu les déguiser et les dater d'auparavant, en les faisant ainsi venir de quelque île bien éloignée.

J'ai voulu agir avec bien plus de clarté, de sûreté et de promptitude; et c'est pourquoi j'ai établi un jour et un lieu fixe : le lieu est Paris; le jour est le 1er octobre, auquel, le temps étant expiré, l'ouverture de l'examen des solutions reçues jusqu'alors, doit commencer sans attendre davantage, et le prix accordé au premier qui se trouvera alors en date, sans qu'il puisse être troublé en sa possession par ceux qui viendront après, lesquels seroient toujours, ou suspects, ou au moins trop tard arrivés, et ne sont plus recevables pour le prix.

Je sais bien qu'en cela il y a quelque avantage pour les François, et surtout pour ceux de Paris; mais en faisant faveur aux uns, je n'ai pas fait d'injustice aux autres. Je laisse à tous ceux qui viendront l'honneur de leur invention; je ne dispose pas de la gloire; le mérite la donne; je n'y touche pas : je ne règle autre chose que la dispensation des prix, lesquels venant de ma pure libéralité, j'ai pu disposer des conditions avec une entière liberté. Or je les ai établies de cette sorte; personne n'a sujet de s'en plaindre; je ne devois rien aux Allemands, ni aux Moscovites; je pouvois ne les avoir offerts qu'aux seuls François; je puis en proposer d'autres pour les seuls Flamands, ou pour qui je voudrois. J'y ai néanmoins agi le plus également que j'ai pu; et si les conditions sont plus favorables aux François qu'aux autres, ce n'a été que pour éviter de plus grandes difficultés, et des injustices toutes évidentes comme celle que je viens de représenter. Et ainsi ayant été nécessaire, pour les éviter, de déterminer un temps et un lieu, j'ai cru que trois mois et demi suffisoient, et que Paris étoit le lieu le plus propre pour avoir réponse de toutes parts. C'est pourquoi en faisant mes écrits au mois de juin, j'ai donné jusqu'au 1er octobre, *intra primam diem octobris;* et j'ai déclaré que si dans ce temps, d'environ trois mois et demi, il ne se trouvoit personne qui eût résolu mes questions, je les résoudrois alors moi-même, sans attendre davantage : *quod si his circiter tribus elapsis mensibus, nullus inveniatur qui quæsita nostra solverit, non denegabimus quæ ipse invenimus.* Par où il est si visible que je ne voulois laisser passer que le temps de ces trois mois pour attendre les solutions, qu'il est ridicule de m'imputer cet autre sens, qui, comme j'ai dit, eû-

rendu les promesses des prix vaines et chimériques : et mon second écrit le marque encore trop clairement; car voici les règles que j'y ai établies : que ceux-là seuls seront admis, qui dans le temps prescrit auront fait signifier à M. de Carcavi, par un acte public, qu'ils ont les solutions, en lui en envoyant, ou une démonstration abrégée, ou au moins le calcul d'un certain cas par où il parût qu'ils ont tout résolu. *Qui publico instrumento intra præstitutum tempus illustrissimo domino de Carcavi significaverit se eorum quæ quæsita sunt solutionem penes se habere, et aut demonstrationem quantumvis compendiosam ad ipsum miserit; aut.... saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem casus quem mox designabimus calculum dederit, hunc nobis satisfecisse declaramus.*

Voilà mes termes, qui assurément ne souffrent aucune équivoque, et par lesquels j'ai établi les conditions les plus équitables que j'ai pu imaginer; car ayant établi qu'on prendroit date du jour qu'on auroit signifié et délivré à M. de Carcavi même la démonstration ou le calcul proposé, j'ai retranché toutes les disputes sur la primauté, qui seroient nées, si on avoit pris date du jour de l'envoi, ce qui les auroit fait demeurer indécises durant plusieurs mois ou plusieurs années, comme il a été déjà dit. En exigeant qu'on fît cette signification par un acte public, j'ai arrêté de même les soupçons et les disputes qui auroient pu naître entre les prétendans, sur des écrits de mains privées : chacun ayant intérêt d'être non-seulement premier, mais encore seul; et ayant sujet de demander des preuves plus authentiques que des écrits de mains privées, pour croire qu'il en est venu d'autres dans le temps, soit devant, soit après soi. Aussi M. de Carcavi, ni moi, ne voulant pas qu'on nous en crût sur notre parole, nous avons averti de prendre des actes publics. Et enfin, en me contentant, ou d'une démonstration abrégée, ou au moins du calcul d'un seul cas pour donner date, en attendant qu'on envoyât la démonstration entière avec plus de loisir, j'ai soulagé les géomètres autant qu'il étoit possible de le faire, puisqu'on ne pouvoit pas moins leur demander, et que néanmoins ce que j'ai demandé est à peu près suffisant : ce calcul étant si difficile et dépendant tellement du fond de la question, qu'on peut juger que qui l'aura trouvé a tout résolu en soi-même, et ne manque plus que de loisir pour l'écrire et l'achever. En quoi je crois avoir gardé un assez juste tempérament : car, d'une part, il n'étoit pas juste d'exiger une démonstration entière et écrite au long, et de faire dépendre la primauté du loisir qu'il faut pour cela; et de l'autre côté, il eût été bien plus injuste de ne pas exiger des preuves certaines qui marquassent qu'on a résolu les questions, et d'accorder le premier rang à ceux qui n'auroient donné aucune marque de les avoir résolues; de sorte que j'ai satisfait à tout, en demandant le véritable calcul de ce cas.

Et c'est pourquoi je ne puis assez admirer la vaine imagination de quelques autres, qui ont cru qu'il leur suffiroit d'envoyer un calcul faux et fabriqué au hasard, pour prendre date du jour qu'ils l'auroient donné, sans avoir produit d'autre marque qui fasse connoître qu'ils ont résolu les problèmes : ce qui est une imagination si ridicule, que j'ai

honte de m'amuser à la réfuter. Cependant, encore qu'ils sachent fort bien que leur calcul est faux (car cela est visible à l'œil même); qu'ils l'aient mandé eux-mêmes par leurs lettres, et qu'ils n'en aient envoyé aucun autre, ils ne laissent pas, par la plus plaisante imagination du monde, de se croire en état d'être mis en ordre depuis le jour qu'ils ont produit ce faux calcul : prétendant que ce que j'ai dit en d'autres occasions, toutes différentes, du peu d'égard qu'on doit avoir aux erreurs de calcul (savoir quand la démonstration entière et géométrique est envoyée en même temps; car alors la chose est sans doute), doit aussi avoir lieu lorsqu'on n'envoie autre chose qu'un faux calcul, en laquelle occasion je n'ai jamais dit un seul mot de pardonner ces erreurs. En effet, il faudroit avoir perdu le sens pour le dire; car il n'est pas difficile d'entendre quelle différence il y a entre deux personnes qui veulent montrer qu'ils ont résolu une question, dont l'une apporte, pour preuve de son discours, une démonstration parfaite et géométrique sans aucun défaut, à quoi il ajoute encore quelques calculs, tandis que l'autre ne produit autre chose qu'un seul calcul sans aucune sorte de preuve. Qui ne voit la différence qui se trouve entre les conditions de ces deux hommes, en ce qui regarde les erreurs de calcul? Il est toujours juste de pardonner ces erreurs à celui qui donne en même temps les démonstrations entières et parfaites qui rendent le calcul superflu, qui enseignent l'art de le bien faire, qui apprennent à en reconnoître et corriger les défauts, et qui enfin toutes seules convainquent invinciblement qu'on a résolu les questions; mais la condition de l'autre est toute différente, puisque, n'ayant donné pour toute marque de ses solutions qu'un seul calcul pour laisser à juger, selon qu'il sera vrai ou faux, qu'il a résolu les questions ou non, s'il se trouve faux en toutes ses parties, que restera-t-il par où on puisse connoître qu'il a trouvé la vérité? Y a-t-il rien de si foible, que de vouloir qu'on lui pardonne toutes les erreurs qui s'y trouveront, et qu'encore qu'il soit faux en tout, et qu'il ne contienne rien de vrai, au lieu d'en conclure que l'auteur n'a pas trouvé la vérité, on en conclue au contraire qu'il possédoit la vérité depuis le jour qu'il a produit la fausseté? C'est assurément ce qu'on ne peut non plus conclure d'un faux calcul, que d'une fausse démonstration; car ce que les paralogismes sont en démonstration, les erreurs de calcul le sont quand le calcul est seul. Il n'y a que deux manières de montrer qu'on a résolu des questions : savoir, de donner, ou la solution sans paralogisme, ou le calcul sans erreur; et c'est aussi une de ces deux choses que j'ai exigée, pour pouvoir prendre date. Mais n'est-ce pas une plaisante prétention, de vouloir passer pour avoir découvert la vérité, par cette seule raison qu'on a produit une fausseté, et de se faire préférer aux autres qui auroient produit les véritables calculs, parce qu'on auroit donné une fausseté avant eux, et que la règle que j'aurois établie pour reconnoître qui seroit le premier qui auroit résolu les questions, fût de voir qui seroit le premier qui eût fabriqué une fausseté? Si cela étoit ainsi, il eût été bien facile à toutes sortes de personnes d'en fabriquer au hasard et à sa fantaisie, et en les envoyant à M. de Carcavi, prendre date dès lors; en quoi sans courir aucun risque, puisqu'ils pouvoient se ré-

tracter à leur volonté, ils se fussent acquis cet avantage, que s'ils avoient pu ensuite découvrir la vérité et même après le temps expiré, ou bien avoir quelques lumières des solutions déjà données quand on les examineroit, ils auroient été assurés d'être les premiers en date, en vertu de la fausseté qu'ils auroient les premiers produite : et de cette manière il seroit arrivé que l'honneur de la première invention, qui est la principale chose qu'on considère en ces matières, n'auroit pas dépendu de la première production de la vérité, mais de la première production qu'on auroit faite à sa fantaisie d'une fausseté; ce qui est la chose du monde la plus extravagante.

Je serois bien fâché qu'on me crût capable d'avoir donné pour loi une condition si injuste et si impertinente. Mais elle est aussi éloignée de mon sens que de mes paroles. Quand j'ai dit qu'il suffiroit, pour passer pour premier, d'envoyer une démonstration abrégée, ou au moins le calcul d'un seul cas, je n'ai pas dit une seule parole de pardonner les erreurs de calcul, comme mes paroles, que j'ai déjà rapportées, le témoignent : *aut saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem calculum unius casus miserit.* Et c'est être ridicule de rapporter à ce lieu, où je n'en parle en aucune sorte, ce que je dis sur un autre sujet, savoir quand le reste des démonstrations et les solutions entières sont à loisir apportées à l'examen, auquel cas si les juges les trouvent toutes véritables et géométriques, on y pardonnera sans doute les erreurs de calcul (quoique ce soit toujours une grâce) : *si solutio exhibita domino de Carcavi virisque secum ad hoc adhibitis geometrica ac vera judicetur, salvo semper errore calculi :* lesquelles, comme j'ai déjà dit, il est toujours aussi juste de pardonner en n'agissant pas à la rigueur, quand la démonstration est présente, qu'il est hors de raison d'y penser quand on ne produit qu'un seul calcul, faux en toutes ses parties.

Il n'est donc que trop visible que ceux qui ont produit ces calculs faux, ne l'ont fait que pour gagner par là le temps de chercher à loisir ce qu'ils n'avoient pas encore trouvé, et ce qu'ils veulent être réputés avoir trouvé depuis le jour qu'ils avoient envoyé leur fausseté, s'ils peuvent y arriver ensuite par quelque voie, en quelque temps que ce soit. Mais c'est en vain qu'ils ont tenté cette finesse; car la règle est écrite : il falloit envoyer le calcul dans le temps, s'ils l'eussent eu; et un calcul faux en toutes ses parties n'est en aucune sorte un calcul; et ainsi quand ils l'auroient envoyé, même signé par un notaire, ce ne seroit que des erreurs signées par notaire, et ils seront réputés comme n'ayant rien envoyé.

Leurs calculs sont donc justement réputés nuls, puisqu'il n'y avoit que deux mesures à désigner, et qu'ils les ont données toutes deux fausses, et chacune d'environ de la moitié. Cependant quelques-uns de ceux-là qui déclarent franchement qu'ils savent bien qu'elles sont fausses, mais en ne laissant pas de prétendre d'en avoir acquis leur rang, disent aussi qu'ils en ont maintenant un autre calcul qu'ils assurent être le véritable, mais ils ne l'envoient pas : ce qui ne fait que trop paroître leur finesse; car s'ils l'avoient en effet, que ne l'envoyoient-ils en même temps? vu même qu'il ne falloit pas quatre lignes pour l'écrire, et qu'au

lieu de cela, ils emploient des pages entières à dire qu'ils l'enverront si on le leur demande; mais ce n'étoit pas cela qu'il falloit faire, il falloit l'envoyer s'ils l'avoient : la règle n'étant pas de le promettre dans le temps, mais de l'envoyer réellement. C'est cela qui fait foi; mais pour les simples promesses qu'ils font, on n'est pas plus obligé de les croire, qu'en ce qu'ils promettent avec une pareille certitude dans les mêmes lettres, qu'ils enverront aussi dans peu de temps la quadrature du cercle, et même en deux manières différentes : de toutes lesquelles choses il sera cependant fort permis de douter, jusqu'à ce qu'il en paroisse d'autres preuves que des paroles. Et ainsi, puisqu'ils ont laissé passer le temps sans envoyer ni le vrai calcul demandé, ni aucune solution, ni aucune autre chose, et qu'ils nous ont ainsi laissés entièrement dans le doute, s'ils ont en effet résolu nos questions, ou en quel temps ils les ont résolues; leurs faux calculs ne nous en donnant aucune marque, nous leur déclarons sans les nommer, ni les marquer en aucune manière, qu'ils ne sont plus recevables quant aux prix; que le temps en est passé à leur égard; que nous allons examiner les calculs et les solutions des autres qui ont été reçus dans le temps; et que pour eux, qui ne peuvent plus prétendre ni aux prix, ni à l'honneur de la première invention, il leur reste au moins celui de corriger leurs erreurs après l'avertissement qu'on leur en donne; ce qui leur sera d'autant plus facile, que le véritable calcul commence maintenant d'être divulgué. Car comme je m'étois engagé, par mon premier écrit, de le publier aussitôt que le temps seroit expiré, j'ai commencé à le faire dans le commencement d'octobre; et parce que je ne sais pas encore si entre tous ceux qui ont déjà envoyé les leurs à M. de Carcavi, il y en a qui l'aient rencontré, et que, s'il s'en trouve, il est juste que je le laisse publier sous leur nom, je n'ai pas encore voulu l'imprimer sous le mien; mais parce qu'il n'est pas juste aussi que d'autres s'en attribuent désormais l'invention, le temps où je me suis obligé de le laisser chercher étant fini, je l'ai donné écrit à la main à plusieurs personnes dignes de foi, et entre autres à M. de Carcavi, à M. de Roberval, professeur royal de mathématiques, à M. Galois, notaire royal à Paris, et à plusieurs personnes de France, et d'ailleurs très-considérables par leurs qualités et par leur science, afin que, comme j'ai déjà dit, si ceux dont on a reçu les solutions l'ont trouvé, je leur en quitte la gloire, sinon, qu'on sache qui en est le premier inventeur.

Voilà ce que nous avions à dire généralement pour tous ceux dont les calculs et les solutions qu'on a reçues dans le temps se trouveront évidemment fausses dans l'examen, et pour tous ceux qui prétendroient qu'on devroit désormais en recevoir de nouvelles.

Ce 7 octobre 1658.

J'espère donner dans peu de jours la manière dont on est venu à la connoissance de cette ligne, et qui est le premier qui en a examiné la nature; c'est ce que j'appellerai l'*Histoire de la Roulette.*

ANNOTATA

IN QUASDAM SOLUTIONES PROBLEMATUM DE CYCLOIDE[1].

Elapso tempore præmiis comparandis destinato, et ad kalendas octobris terminato, verum calculum casus a me propositi hucusque latentem novissime evulgare cœpi, ut si in examinandis solutionibus quæ a diversis geometris intra præstitutum tempus missæ sunt, quædam reperiatur quæ eodem inciderit; ejus auctor præmio et gloria inventionis potiatur : sin vero, ego meo nomine publici tunc juris faciam illum quem interim manuscriptum ad plurimos jam undequaque misi; et inter cæteros ad illustrissimum D. de Carcavi, ad clarissimum ac insignissimum geometram D. de Roberval, regium mathematicorum professorem, ad integerrimum virum D. Gallois, notarium regium, ac ad diversos alios tum dignitate, tum scientia præcellentissimos viros, qui rogati sunt diem quo eum receperunt annotare et subsignare.

Deinde solutiones apud D. de Carcavi missas ab eo tempore quo Lutetiam deseruit, examinare aggressus sum (quæ enim ante abscessum suum receperat in arculis clausas reliquit, nec ante suum reditum poterunt perpendi). Ab ea ergo, ex iis quas apud eum reperi, incipere visum est, quæ gravissima est, quippe quæ absque ulla demonstratione in solo calculo consistit casus quem designaveram; quem quidem calculum postulaveram, ut ex eo, prout verus aut falsus esset, dignosci possit, an ejus auctor absolvisset necne, quæ se absolvisse profiteretur problemata. Sic enim locutus eram : *Qui quæstiones resolverit, significabit intra præstitutum tempus D. de Carcavi, et quidem instrumento publico, se solutiones habere.* Et quia simplex illa assertio, omni probatione destituta, vana prorsus fuisset et jus nullum auctori suo dedisset cur aliis præferretur, subjunxi : *Et ad confirmandam suæ assertionis veritatem, aut demonstrationem compendiosam miserit, aut saltem calculum istius casus*, ex cujus nempe veritate, de veritate assertionis judicaretur.

Hic igitur auctor calculum suum hujus casus misit in indicium veritatis a se repertæ. At vero calculus iste suus nimium falsus est, et nihil prorsus veri continet. Duas enim solum mensuras profert, et ambas falsas, et, ut dictum est, nimium falsas : ita ut calculus ille quem auctor *ad confirmandam suæ assertionis veritatem* juxta præscriptam legem misit, nihil aliud confirmet, nisi ipsum vane asseruisse se demonstrationem penes se habere. Falsus enim calculus, in indicium solutionis adductus, falsitatem potius quam veritatem solutionis indicat. Adeoque miror hunc auctorem, ea quæ de calculi erroribus condonandis in illa omnino occasione diximus, ad istam trahere voluisse : non intelligens quanta sit differentia inter eum qui asserens se cujusvis

[1]. Nous avons cru inutile de donner une traduction de cet écrit; tout ce qu'il contient se retrouve dans les *Réflexions sur les conditions des prix*, etc. Voy. p. 500.

quæstionis solutionem habere, nullam demonstrationem affert, sed solummodo calculum, ex quo solo suadere nititur se vere rem absolvisse, et eum qui totius quæstionis solutionem omni ex parte geometrice demonstratam profert, et simul cum hac solida demonstratione, etiam superaddit calculum. Magnum sane est inter utrumque discrimen, quantum ad errores calculi attinet. Qui enim solutionem geometrice demonstratam exhibet, nullum de sua solutione dubium relinquit, eique æquum est semper condonare errores calculi qui præsenti demonstrationis luce evanescunt et corriguntur.

Alter vero qui nihil aliud quam calculum sine ulla demonstratione porrigit, si erroneus sit, et nullam veram mensuram habeat, quid ei supererit unde patefaciat se rem resolvisse? An sola falsitas repertæ veritatis indicium est? Ut ergo ex demonstratione falsa non ostenderetur detectam esse veritatem, sic et nec ex falso calculo ostenditur. Quod enim paralogismus est in demonstratione, hoc error calculi est in calculo solo, et demonstratione destituto; nec aliter quis judicare potest se quæstionem resolvisse, nisi aut demonstrationem paralogismis purgatam, aut saltem calculum erroris expertem proferendo.

Et ideo, quum apud me statuissem experiri ac certo dignoscere quis futurus esset primus, qui quæstiones nostras absolveret, hæc indicia flagitavi, ut intra præstitutum tempus, aut demonstratio ipsa, quantumvis compendiosa, aut saltem calculus illius quem designaveram casus, prodiret : quibus verbis quis aliud intelliget quam verum calculum, non autem falsum ? falsus enim calculus non est calculus. Et quid stultius fuisset, quam ex calculo falso, et nihil veri habente, concludere auctorem suum veram possidere demonstrationem, ipsique primas dare, et jus concedere ut omnibus aliis posthabitis, prior habeatur solutionis inventor? Non plane ea mihi intentio fuit; et si ita esset, liberum cuilibet fuisset statim atque scripta nostra vulgata sunt, calculum fictitium quantumvis erroneum ad libitum componere, et ex eo tamen ordinem sibi ascribere, ac nullum damnum metuendo, inde securitatem adipisci, ut si qua deinde via problemata etiam ultimo loco solvisset, ad prima tamen præmia veniret, quia falsum calculum primus protulisset. Et ita foret, ut primæ inventionis honor, qui his in rebus præcipuus est, non a prima veritatis detectione, sed a prima falsitate pro arbitratu fabricata, penderet. Absit ut tam iniquam et ineptam conditionem pro lege dederim! Hoc certe longe abest sicut a mente mea, sic et a verbis meis, quæ ita se habent.

Qui publico instrumento, intra præstitutum tempus, illustrissimo D. de Carcavi significaverit se eorum quæ quæsita sunt demonstrationem penes se habere; et aut ipsammet demonstrationem ad ipsum miserit; aut saltem, ad confirmandam suæ assertionis veritatem, casus quem mox designabimus calculum dederit (ibi nulla prorsus facta est, ut nec fieri potuit, de condonandis erroribus mentio), *seque paratum esse professus fuerit omnia omnino demonstrare ad ipsius D. de Carcavi nutum, hunc nobis satisfecisse declaramus; et consentimus primum qui hæc fecerit primo secundum secundo præmio donandum.* Hæc ergo prima est conditio, ut aut ipsa abbreviata solutio mittatur, aut saltem

calculus, nulla de condonandis erroribus facta mentione. Quia vero hic calculus etiam verus non omnino sufficiebat ad præmia obtinenda, hanc secundam conditionem, ut æquum erat, subjunxi: *si sua solutio ab ipso D. de Carcavi virisque ad id secum adhibitis, quum ipsi visum fuerit, exhibita, geometrica ac vera judicetur, salvo semper errore calculi.* Ibi sane, ubi de examinandis demonstrationibus agitur, jure condonantur errores calculi; quum enim adest demonstratio, ita eos negligere semper justum est, ac ridiculum foret, quum calculus solus exhibitur, qui si nihil veri habeat, calculus non est, ut jam satis diximus.

Talis est autem calculus auctoris illius de quo hic agitur, nec quicquam veri continet; ipsiusque falsitatem auctor ipsemet agnovit, illumque posterioribus litteris revocavit, nec ullum alium misit, et sic revera nihil misisse censendus est. Se tamen alium calculum penes se habere scribit, quem verum esse asserit; cujus novæ assertionis quum nullum hucusque indicium protulerit, sed mera tantum verba, non plus in hac re fidei meretur quam quum in eisdem epistolis pari fiducia promittit se brevi missurum quadraturam circuli et hyperboles duabus diversis methodis expeditam; de quibus omnibus periti quique interim non temere dubitabunt. Si enim calculum quæsitum revera haberet, cur non intra tempus constitutum misisset non video: hoc enim promptius fuisset quam fusis quibus utitur verbis polliceri. Calculum autem verum promittendo, et non mittendo, spatium quærendi sibi præparare videtur, ut si forte etiam extra tempus reperiat, aut aliquo modo illius quem jam ad multos misimus notitiam habere possit, illum ipse sibi fortassis, et quasi a se jamdiu repertum, et intra debitum tempus, adscribat. Melius tamen de ipso sentimus; hæc enim frustra et inaniter tentaret. Oportebat quippe, si habuisset, intra tempus destinatum misisse; scripta namque lex instat, *qui intra præstitutum tempus publico instrumento calculum saltem miserit.* Ille autem nihil ex iis implevit; non enim instrumentum publicum, sed privatas chartulas adduxit, quas sane reliqui auctores qui publicas, ut postulatum est, attulerunt, respuent, sive posteriores sint ut ei præponantur, sive priores fuerint ut soli et sine socio habeantur, quibus quum ego debitor sim, resistere non possem: non enim privatis scripturis fides adhibetur, nec ut ipsi verbis meis credant, auderem aut vellem petere; et ideo publicum instrumentum flagitaveram fide ex se ipso dignum. Auctor autem ille nec tale instrumentum validum attulit, sed et nec verum calculum dedit, solam vero falsitatem, et sic quum nobis omnino dubium reliquerit an quæstiones resolverit, aut a quo tempore resolverit, quidquid de hac quæstione scripsit tanquam aut inane aut falsum, et quasi non fuisset, habendum est; et quum jam elapsum sit tempus, ipse auctor iure ab ipsa palæstra, quantum ad præmia attinet, exclusus est.

Ipse vero quum jam ad primæ inventionis honorem, divulgato a nobis vero calculo, pervenire non possit, suos saltem errores corrigendi gloriam monitus conetur adipisci.

Datum 9 octobris 1658.

HISTOIRE DE LA ROULETTE,

APPELÉE AUTREMENT TROCHOÏDE OU CYCLOÏDE,

Où l'on rapporte par quels degrés on est arrivé à la connoissance de cette ligne.

La roulette est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde, qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane.

Le feu P. Mersenne, minime, fut le premier qui la remarqua environ l'an 1615, en considérant le roulement des roues; ce fut pourquoi il l'appela *la roulette.* Il voulut ensuite en reconnoître la nature et les propriétés; mais il ne put y pénétrer.

Il avoit un talent tout particulier pour former de belles questions; en quoi il n'avoit peut-être pas de semblable : mais encore qu'il n'eût pas un pareil bonheur à les résoudre, et que ce soit proprement en ceci que consiste tout l'honneur, il est vrai néanmoins qu'on lui a obligation, et qu'il a donné l'occasion de plusieurs belles découvertes, qui peut-être n'auroient jamais été faites, s'il n'y eût excité les savans.

Il proposa donc la recherche de la nature de cette ligne, à tous ceux de l'Europe qu'il en crut capables, et entre autres à Galilée; mais aucun ne put y réussir, et tous en désespérèrent.

Plusieurs années se passèrent de cette sorte jusques en 1634, que le père voyant résoudre à M. de Roberval, professeur royal de mathématiques, plusieurs grands problèmes, il espéra de tirer de lui la solution de la roulette.

En effet M. de Roberval y réussit; il démontra que l'espace de la roulette est triple de la roue qui la forme. Ce fut alors qu'il commença de l'appeler par ce nom tiré du grec, *Trochoïdes*, correspondant au mot françois *Roulette.* Il dit au père que sa question étoit résolue, et lui déclara même cette raison triple, en exigeant néanmoins qu'il la tiendroit secrète durant un an, pendant lequel il proposeroit de nouveau cette question à tous les géomètres.

Le père, ravi de ce succès, leur écrivit à tous, et les pressa d'y repenser, en leur ajoutant que M. de Roberval l'avoit résolue, sans leur dire comment.

L'année et plus étant passée, sans qu'aucun en eût trouvé la solution, le père leur écrivit pour la troisième fois, et leur déclara alors la raison de la roulette à la roue, comme 3 à 1. En 1635, sur ce nouveau

secours, il s'en trouva deux qui en donnèrent la démonstration : on reçut leurs solutions presque en même temps, l'une de M. de Fermat, conseiller au parlement de Toulouse, l'autre de feu M. Descartes, et toutes deux différentes l'une de l'autre, et encore de celle de M. de Roberval : de telle sorte néanmoins qu'en les voyant toutes, il n'est pas difficile de reconnoître quelle est celle de l'auteur; car il est vrai qu'elle a un caractère particulier, et qu'elle est prise par une voie si belle et si simple, qu'on connoît bien que c'est la naturelle. Et c'est en effet par cette voie qu'il est arrivé à des dimensions bien plus difficiles sur ce sujet, à quoi les autres méthodes n'ont pu servir.

Ainsi la chose devint publique, et il n'y eut personne en France, de ceux qui se plaisent à la géométrie, qui ne sût que M. de Roberval étoit l'auteur de cette solution, à laquelle il en ajouta en ce même temps deux autres : l'une fut la dimension du solide à l'entour de la base; l'autre, l'invention des touchantes de cette ligne, par une méthode qu'il trouva alors, et qu'il divulgua incontinent, laquelle est si générale, qu'elle s'étend aux touchantes de toutes les courbes : elle consiste en la composition des mouvements.

En 1638, feu M. de Beaugrand ayant ramassé les solutions du plan de la roulette, dont il y avoit plusieurs copies, avec une excellente méthode, *de maximis et minimis*, de M. de Fermat, il envoya l'une et l'autre à Galilée, sans en nommer les auteurs : il est vrai qu'il ne dit pas précisément que cela fût de lui; mais il écrivit de sorte qu'en n'y prenant pas garde de près, il sembloit que ce n'étoit que par modestie qu'il n'y avoit pas mis son nom; et, pour déguiser un peu les choses, il changea les premiers noms de *roulette*, et *trochoïde*, en celui de *cycloïde*.

Galilée mourut bientôt après, et M. de Beaugrand aussi. Toricelli succéda à Galilée, et tous ses papiers lui étant venus entre les mains, il y trouva entre autres ces solutions de la roulette sous le nom de *cycloïde*, écrites de la main de M. de Beaugrand, qui paroissoit en être l'auteur, lequel étant mort, il crut qu'il y avoit assez de temps passé pour faire que la mémoire en fût perdue, et ainsi il pensa en profiter.

Il fit donc imprimer son livre en 1644, dans lequel il attribue à Galilée ce qui est dû au P. Mersenne, d'avoir formé la question de la roulette; et à soi-même ce qui est dû à M. de Roberval, d'en avoir le premier donné la résolution : en quoi il fut non-seulement inexcusable, mais encore malheureux; car ce fut un sujet de rire en France, de voir que Toricelli s'attribuoit, en 1644, une invention qui étoit publiquement et sans contestation reconnue depuis huit ans pour être de M. de Roberval, et dont il y avoit, outre une infinité de témoins vivans, des témoignages imprimés, et entre autres un écrit de M. Desargues, imprimé à Paris au mois d'août 1640, avec privilége, où il est dit, et que la roulette est de M. de Roberval, et que la méthode *de maximis et minimis* est de M. de Fermat.

M. de Roberval s'en plaignit donc à Toricelli, par une lettre qu'il lui en écrivit la même année; et le P. Mersenne en même temps, mais encore plus sévèrement : il lui donna tant de preuves, et imprimées, et

de toutes sortes, qu'il l'obligea d'y donner les mains, et de céder cette invention à M. de Roberval, comme il fit par ses lettres que l'on garde, écrites de sa main, du même temps.

Cependant comme son livre est public, et que son désaveu ne l'est pas, M. de Roberval ayant si peu de soin de se faire paroître, qu'il n'en a jamais rien fait imprimer; beaucoup de monde y a été surpris, et je l'avois été moi-même; ce qui a été cause que par mes premiers écrits je parle de cette ligne comme étant de Toricelli, et c'est pourquoi je me suis senti obligé de rendre par celui-ci à M. de Roberval ce qui lui appartient véritablement.

Toricelli ayant reçu cette petite disgrâce, et ne pouvant plus passer, auprès de ceux qui savoient la vérité, pour auteur de la dimension de l'espace de la roulette, ni même de celle du solide autour de la base, M. de Roberval la lui ayant déjà envoyée, il essaya de résoudre celui à l'entour de l'axe. Mais ce fut là qu'il trouva bien de la difficulté; car c'est un problème d'une haute, longue et pénible recherche. Ne pouvant donc y réussir, il en envoya une solution assez approchante, au lieu de la véritable, et manda que ce solide étoit à son cylindre comme 11 à 18 : ne pensant pas qu'on pût le convaincre. Mais il ne fut pas plus heureux en cette rencontre qu'en l'autre; car M. de Roberval, qui en avoit la véritable et géométrique dimension, lui manda non-seulement son erreur, mais encore la vérité. Toricelli mourut peu de temps après.

M. de Roberval ne s'arrêta pas à la seule dimension de la première et simple roulette et de ses solides; mais il étendit ses découvertes à toutes sortes de roulettes, *allongées* ou *accourcies*, pour toutes lesquelles ses méthodes sont générales, et donnent, avec une même facilité, les touchantes, la dimension des plans et de leurs parties, leurs centres de gravité et les solides, tant autour de la base qu'autour de l'axe. Car encore qu'il ne l'ait donné au long que des roulettes entières, sa méthode s'étend, sans rien y changer, et avec autant de facilité, aux parties, et ce seroit chicaner que de lui en disputer la première résolution.

La connoissance de la roulette ayant été portée jusque-là par M. de Roberval, la chose étoit demeurée en cet état depuis quatorze ans, lorsqu'une occasion imprévue m'ayant fait penser à la géometrie que j'avois quittée il y avoit longtemps, je me formai des méthodes pour la dimension et les centres de gravité des solides, des surfaces planes et courbes, et des lignes courbes, auxquelles il me sembla que peu de choses pourroient échapper : et pour en faire l'essai sur un sujet des plus difficiles, je me proposai ce qui restoit à connoître de la nature de cette ligne; savoir, les centres de gravité de ses solides, et des solides de ses parties; la dimension et les centres de gravité des surfaces de tous ces solides; la dimension et les centres de gravité de la ligne courbe même de la roulette et de ses parties.

Je commençai par les centres de gravité des solides et des demi-solides, que je trouvai par ma méthode, et qui me parurent si difficiles par toute autre voie, que, pour savoir s'ils l'étoient en effet autant que

je me l'étois imaginé, je me résolus d'en proposer la recherche à tous les géomètres et même avec des prix. Ce fut alors que je fis mes écrits latins, lesquels ont été envoyés partout; et, pendant qu'on cherchoit ces problèmes touchant les solides, j'ai résolu tous les autres, comme on verra à la fin de ce discours, quand j'aurai parlé des réponses qu'on a reçues des géomètres sur le sujet de mes écrits.

Elles sont de deux sortes. Les uns prétendent d'avoir résolu les problèmes proposés, et ainsi avoir droit aux prix; et les écrits de ceux-là seront vus dans l'examen régulier qui doit s'en faire. Les autres n'ont point voulu prétendre à ces solutions, et se sont contentés de donner leurs premières pensées sur cette ligne.

J'ai trouvé de belles choses dans leurs lettres, et des manières fort subtiles de mesurer le plan de la roulette, et entre autres dans celles de M. Sluze, chanoine de la cathédrale de Liége; de M. Richi, Romain; de M. Huguens, Hollandois, qui a le premier produit que la portion de la roulette, retranchée par l'ordonnée de l'axe, menée du premier quart de l'axe du côté du sommet, est égale à un espace rectiligne donné : et j'ai trouvé la même chose dans une lettre de M. Wren, Anglois, écrite presque en même temps.

On a vu aussi la dimension de la roulette et de ses parties, et de leurs solides à l'entour de la base seulement, du révérend P. Lallouère, jésuite de Toulouse. Comme il l'envoya toute imprimée, j'y fis plus de réflexion; et je fus surpris de voir que tous les problèmes qu'il y résout, n'étant autre chose que les premiers de ceux que M. de Roberval avoit résolus depuis si longtemps, il les donnoit néanmoins sous son nom, sans dire un seul mot de l'auteur. Car encore que sa méthode soit différente, on sait assez combien c'est une chose aisée, non-seulement de déguiser des propositions déjà trouvées, mais encore de les résoudre d'une manière nouvelle, par la connoissance qu'on a déjà eue une fois de la première solution.

Je priai donc instamment M. de Carcavi, non-seulement de faire avertir le révérend père que tout cela étoit de M. de Roberval, ou au moins manifestement enfermé dans ses moyens, mais encore de lui découvrir la voie par laquelle il y est arrivé (car on ne doit pas craindre de s'ouvrir entre les personnes d'honneur). Je lui fis donc mander que cette voie de la première découverte étoit la quadrature que l'auteur avoit trouvée depuis longtemps, d'une figure qui se décrit d'un trait de compas sur le surface d'un cylindre droit, laquelle surface, étant étendue en plan, forme la moitié d'une ligne, qu'il a appelée *la compagne de la roulette*, dont les ordonnées à l'axe sont égales aux ordonnées de la roulette, diminuées de celles de la roue. En quoi je crus faire un plaisir particulier au révérend père, parce que dans ses lettres que nous avons, il parle de la quadrature de cette figure, qu'il appelle *cycloï-cylindrique*, comme d'une chose très-éloignée de sa connoissance, et qu'il eût fort désiré connoître. M. de Carcavi n'ayant pas eu assez de loisir, a fait mander tout cela et fort au long, par un de ses amis, au révérend père, qui a fait réponse.

Mais entre tous les écrits qu'on a reçus de cette sorte, il n'y a rien de

plus beau que ce qui a été envoyé par M. Wren; car outre la belle manière qu'il donne de mesurer le plan de la roulette, il a donné la comparaison de la ligne courbe même et de ses parties, avec la ligne droite : sa proposition est que la ligne de la roulette est quadruple de son axe, dont il a envoyé l'énonciation sans démonstration. Et comme il est le premier qui l'a produite, c'est sans doute à lui que l'honneur de la première invention en appartient.

Je ne croirai pas pourtant lui rien ôter, pour dire, ce qui est aussi véritable, que quelques géomètres de France, auxquels cette énonciation a été communiquée, en ont trouvé la démonstration sur-le-champ, et entre autres M. de Fermat. Et je dirai de plus que M. de Roberval a témoigné que cette connoissance ne lui étoit pas nouvelle; car aussitôt qu'on lui en parla, il en donna la démonstration entière, avec une très-belle méthode pour la dimension de toutes les courbes, laquelle il n'avoit point encore voulu publier : espérant d'en tirer quelques connoissances encore plus considérables, comme en effet c'étoit par là qu'il avoit comparé depuis longtemps les lignes spirales aux paraboliques; on en voit quelque chose dans les Œuvres du R. P. Mersenne.

Cette méthode est encore tirée de la composition des mouvemens, de même que celle des touchantes; car comme la direction du mouvement composé donne la touchante, ainsi sa vitesse donne la longueur de la courbe, dont voici la première publication.

Voilà ce que j'ai trouvé de plus remarquable dans les écrits de ceux qui ne prétendent point aux prix. Quant aux autres, je n'en parlerai qu'après l'examen qui devoit s'en ouvrir le 1er octobre, mais que nous sommes obligés de remettre au retour de M. de Carcavi, qu'on attend de jour en jour.

C'est alors qu'on jugera de ceux qui auront satisfait aux quatre conditions portées par mes écrits, publiés au mois de juin; savoir :

1° Que la solution ait été reçue et signifiée chez M. de Carcavi dans le 1er octobre, qui est le temps prescrit : *Qui intra præstitutum tempus illustrissimo D. de Carcavi significaverit, etc.*

2° Qu'elle soit accompagnée d'un acte public, *instrumento publico*, pour ôter tout soupçon.

3° Qu'elle contienne, ou une démonstration abrégée, ou au moins le calcul d'un cas que je demande pour reconnoître, par la qualité de ce calcul, si celui qui l'envoie avoit en effet dès lors la résolution nette et parfaite des problèmes : *aut saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem casus quem mox designabimus calculum dederit;* ce qui paroîtroit être vrai ou faux, selon que le calcul seroit vrai ou faux.

4° Que l'on enverroit ensuite et à loisir l'entière démonstration de tous les autres cas proposés, *omnia omnino demonstrare;* et qu'elle soit jugée vraie et géométrique en toutes ses parties, par ceux que M. de Carcavi voudra nommer. Et j'ai même pardonné les erreurs de calcul qui se trouveront dans ces dernières et entières démonstrations de tous les cas généralement; parce que, quand les démonstrations sont présentes, les calculs ne sont jamais nécessaires, et les erreurs y sont toujours pardonnables.

S'il s'en trouve qui soient dans ces conditions, le premier aura le premier prix, et le second, le second : s'il n'y en a qu'un, il les aura tous deux. Mais ceux qui ne les auront pas toutes accomplies, seront exclus des prix, quoiqu'ils ne le soient pas de l'honneur, qui leur appartiendra toujours par le mérite des écrits qu'ils pourront produire; car je n'ai pas mis des conditions à la dispensation de l'honneur, dont je ne dispose pas, mais seulement à celle des prix dont j'ai pu disposer à mon gré.

Que s'il ne se trouve personne dans l'examen qui ait résolu les problèmes, je les donnerai alors moi-même, comme je me suis obligé par mes écrits de le faire, quand le temps seroit expiré, c'est-à-dire au 1er octobre. Et j'ai en effet déjà commencé à divulguer mon calcul, que j'ai donné écrit à la main à plusieurs personnes dignes de foi, et entre autres, à M. de Carcavi, à M. de Roberval, à M. Galois, notaire royal a Paris, et à plusieurs autres personnes de France, et d'ailleurs très-considérables par leur qualité et par leur science, qui ont marqué le jour qu'ils l'ont reçu. J'ai cru à propos d'en user ainsi, et de ne pas le faire encore imprimer, afin que si dans l'examen il s'en trouve qui l'aient déjà rencontré, je publie qu'ils l'ont résolu avant que j'eusse divulgué ma solution; sinon je donnerai publiquement ce que personne n'aura trouvé, et j'y ajouterai encore les problèmes suivans, qui restent sur la nature de la roulette, dont quelques-uns ne me semblent pas moins difficiles.

1° Le point Z (fig. 53, p. 495) étant donné où l'on voudra, dans la roulette simple, trouver non-seulement la dimension de la ligne courbe Z A, comprise entre le point Z et le sommet (ce que que M. Wren a résolu), mais encore le centre de gravité de cette portion de la ligne courbe.

2° Trouver la dimension de la surface décrite par cette portion de la ligne courbe, tournée, tant autour de la base (ce qui est facile), qu'autour de l'axe, d'un tour entier, ou d'un demi, ou d'un quart, ou de telle partie de tour que l'on voudra.

3° Trouver le centre de gravité de cette surface, ou demi-surface, ou quart de surface, etc.; ce qui est le plus difficile et proprement le seul que je propose.

Dans tous lesquels problèmes je suppose la quadrature du cercle, où il est nécessaire de la supposer.

Voilà ce qui restoit à découvrir sur la nature de cette ligne, et dont je tiendrai la solution secrète jusqu'au dernier décembre de cette année 1658, afin que, si quelqu'un en trouve la solution dans ce temps, il ait l'honneur de l'invention. Mais ce temps expiré, si personne ne la donne, je la donnerai alors; et même la dimension générale des lignes courbes de toutes les cycloïdes allongées ou accourcies; lesquelles ne sont pas égales à des lignes droites, mais à des ellipses.

C'est là que j'ai fini de considérer la nature de cette ligne. Et pour reprendre, en peu de mots, toute cette histoire, il paroît :

Que le premier qui a remarqué cette ligne en la nature, mais sans en pénétrer les propriétés, a été le P. Mersenne.

Que le premier qui en a connu la nature, trouvé les touchantes, mesuré les plans et les solides, et donné le centre de gravité du plan et de ses parties, a été M. de Roberval.

Que le premier qui en a mesuré la ligne courbe, a été M. Wren.

Et qu'enfin j'ai trouvé le centre de gravité des solides et des demi-solides de la ligne et de ses parties, tant autour de la base, qu'autour de l'axe; le centre de gravité des surfaces, demi-surfaces, quarts de sur face, etc., décrites par la ligne et par ses parties, tournées autour de la base et autour de l'axe; et la dimension de toutes les lignes courbes des roulettes allongées ou accourcies.

Ce 10 octobre 1658.

HISTORIA TROCHOIDIS, SIVE CYCLOIDIS,

GALLICE *LA ROULETTE* :

In qua narratur quibus gradibus ad intimam illius lineæ naturam cognoscendam perventum sit.

Inter infinitas linearum curvarum species, si unam circularem excipias, nulla est quæ nobis frequentius occurrat quam trochoides (gallice *la roulette*) : ut mirum sit quod illa priscorum seculorum geometras latuerit, apud quos de tali linea nihil prorsus reperiri certum est.

Describitur a clavo rotæ in sublimi delato, dum rota ipsa, motu rotis peculiari, secundum orbitam suam recta fertur simul et circumvolvitur, initio motus sumpto, dum clavus orbitam tangit, usquedum absoluta una conversione, clavus idem iterum eamdem tangat orbitam. Supponimus autem hic ad geometriæ speculationem, rotam esse perfecte circularem; clavum, punctum in circumferentia illius assumptum; iter rotæ, perfecte planum; orbitam denique perfecte rectam, quam circumferentia rotæ continuo tangat; ambabus, orbita inquam et circumferentia, in uno eodemque plano inter movendum ubique existentibus.

Hanc lineam primus omnium advertit Mersennus, ex minimorum ordine, circa annum 1615, dum rotarum motus attentius consideraret; atque inde rotulæ ei nomen indidit; post ille naturam ejus et proprietates inspicere voluit, sed irrito conatu.

Erat huic viro ad excogitandas arduas ejusmodi quæstiones singulare quoddam acumen, et quo omnes in eo genere facile superaret : quanquam autem in iisdem dissolvendis, quæ præcipua hujusce negotii laus est, non eadem felicitate utebatur. Tamen hoc nomine de litteris optime meritus est, quod permultis iisque pulcherrimis inventis occasionem præbuerit, dum ad eorum inquisitionem eruditos de illis neque cogitantes excitaret.

Ergo naturam trochoidis omnibus quos huic operi credidit pares, indagandam proposuit, in primisque Galileo : at nemini res ex sententia cessit, omnesque de nodi illius dissolutione desperarunt.

Sic viginti proxime abierunt anni ad usque 1634, quo Mersennus, quum multas ac præclaras propositiones a Robervallio, regio matheseos professore, solvi quotidie videret, ab eodem suæ quoque trochoidis solutionem speravit.

Nec vero eum sua spes frustrata est. Felici enim inquisitionis suæ successu usus Robervallius, trochoidis spatium, spatii rotæ a qua describitur, triplum esse demonstravit : ac tum primum huic figuræ *trochoidis* nomen e græco deductum imposuit, quod gallico *la roulette* aptissime respondet. Mox ille Mersenno solutum a se problema, ac triplam illam rationem ostendit, accepta ab eo fide, id per totum adhuc annum iri compressum, dum eamdem rursus quæstionem omnibus geometris proponeret.

Lætus hoc eventu Mersennus mittit rursus ad omnes geometras : rogat ut de integro in eam inquisitionem incumbant, addit etiam solutum a Robervallio problema : sed de modo nihil adhuc indicat.

Anno et amplius elapso, quum nullus propositæ quæstioni satisfaceret, tertium ad geometras scribit Mersennus, ac tunc anno, scilicet 1635, rationem trochoidis ad rotam ut 3 ad 1 esse patefecit.

Hoc novo adjuti subsidio, problematis demonstrationem invenerunt duo, inventamque eodem ferme tempore ad Mersennum transmiserunt, alteram Fermatius, supremæ Tolosanæ curiæ senator, alteram Cartesius nunc vita functus, utramque, et alteram ab altera, et a Robervallii demonstratione diversam : ita tamen ut qui eas omnes videat, illico illius demonstrationem internoscat qui primus problema dissolvit. Etenim singulari quodam charactere insignitur ; ac tam pulchra et simplici via ad veritatem ducit, ut hanc unam naturalem ac rectam esse facile scias. Et certe eadem illa via Robervallius ad operosiores multo circa idem argumentum dimensiones pervenit, ad quas per alias methodos nemo forsan perveniat.

Ita res brevi percrebuit, neminique in tota Gallia geometriæ studiosiori ignotum fuit demonstrationem trochoidis acceptam Robervallio referendam. Huic autem ille duas sub idem ferme tempus adjunxit ; una est solidorum circa basim ejus mensio : altera tangentium inventio, cujus ipse methodum et invenit et statim evulgavit, tam generalem illam ac late patentem, ut ad omnium curvarum tangentes pertineat. Motuum compositione methodus illa innititur.

Anno autem 1638, Il. de Beaugrand quum illas de plano trochoidis demonstrationes collegisset, quarum ad ipsum multa exemplaria pervenerant, itemque egregiam methodum Fermatii *de maximis et minimis* : utrumque ad Galileum misit, tacitis auctorum nominibus. Ac sibi quidem illa nominatim non adscripsit : iis tamen usus est verbis, ut minus attente legentibus, quominus se istorum profiteretur auctorem, sola demum impeditus modestia videretur. Itaque ad rem paululum interpolandam, mutatis nominibus, trochoidem in *cycloidem* commutavit.

Non multo post Galileus et ipse de Beaugrand vita cesserunt. Successit Galileo Toricellius, nactusque est inter illius manuscripta, quæ omnia ad ipsum delata erant, ista de trochoide sub cycloidis nomine

problemata ipsius de Beaugrand manu sic exarata, quasi eorum auctor esset. Cognita ergo illius morte Toricellius abolitam jam temporis spatio rei memoriam ratus, ea omnia secure jam ad se transferri posse arbitratus est.

Itaque anno 1644 librum edidit, in quo excitatam de trochoide quæstionem Galileo tribuit, quæ Mersenno debebatur : sibi primam ejus dissolutionem arrogat, quam Robervallii esse certum erat : in quo sane, ut candoris aliquid Toricellio defuit, sic et aliquid felicitatis. Neque enim sine quorumdam risu exceptus est in Gallia, qui anno 1644 hoc sibi accivisset inventum, cujus parens in vivis constanter jam per octo annos Robervallius agnoscebatur, qui quod suum erat non modo compluribus testibus adhuc viventibus posset revincere, sed etiam excusis typo testimoniis, in quibus est quoddam scriptum G. Desargues anno 1640, Augusti mense, Parisiis editum : in quo nominatim habetur trochoidis problemata Robervallii esse; methodum *de maximis et minimis*, Fermatii.

Ergo hanc injuriam cum ipso Toricellio litteris expostulavit Robervallius; ac severius etiam Mersennus, qui tot ipsum argumentis omnigenisque testimoniis, etiam excusis, coarguit, ut veris victus Toricellius, hoc invento cedere, illudque ad Robervallium transcribere coactus sit : quod litteris propria manu scriptis præstitit, quæ etiamnum asservantur.

Verum quia passim in manibus est Toricellii liber, contra ejus, ut ita loquar, recantatio paucis innotuit; Robervallio tam parum de fama sua extendenda sollicito, ut nihil de ea recantatione emiserit in vulgus : multi inde in errorem, et ipsemet etiam inductus sum. Hinc factum est ut in prioribus scriptis ita sim de trochoide locutus, quasi eam princeps Toricellius invenerit. Quo errore cognito, faciendum duxi, ut quod jure Robervallio debetur, hoc ipsi scripto restituerem.

Usus hoc infortunio Toricellius, quum jam nec dimensionem spatii cycloidis, nec solidi circa basim primus invenisse existimari posset ab iis quibus perspecta rei veritas esset, solidi circa axem cycloidis mensionem aggressus est. Ibi vero non mediocrem difficultatem offendit : est enim illud altissimæ cujusdam et operosissimæ inquisitionis problema; in quo quum veram assequi non posset, veræ proximam solutionem misit; ac solidum illud ad suum cylindrum esse dixit, sicut 11 ad 18, ratus errorem illum a nemine refelli posse. Verum nihilo fuit hoc etiam in loco felicior; nam Robervallius, qui veram ac geometricam dimensionem invenerat, non modo suum illi errorem, sed etiam veram problematis resolutionem indicavit.

Toricellius non multo post fato concessit. At Robervallius sola simplicis trochoidis ejusque solidorum dimensione non contentus, omnes omnino trochoides, sive protractas, sive contractas, inquisitione complexus est, easque excogitavit methodos, quæ ad omnem trochoidis speciem pertinerent; eademque facilitate tangentes darent; plana et planarum partes dimetirentur; centra gravitatis planorum, ac postremo solida circa basim et circa axem, patefacerent. Quamvis enim integras tantum trochoides dimensus sit, tamen ad trochoidum partes nihil mu-

tata ejus methodus non minus expedite adhiberi potest; ut qui illud Robervallio inventum abjudicet, merito cavillator habendus sit.

Nec vero ea omnia apud se celavit Robervallius, sed scriptis mandata publice, privatimque, atque etiam in celebri selectorum virorum matheos peritissimorum cœtu, per complures dies legit et cupientibus describenda permisit.

Eo perducta Robervallii industria trochoidis cognitione, ibi per 14 annos substiterat; quum me ad abdicata pridem geometriæ studia repetenda improvisa occasio compulit. Tum vero eas mihi paravi methodos ad dimensionem, et centra gravitatis solidorum, planarum et curvarum superficierum, curvarum item linearum, ut illas vix quicquam effugere posse videretur : atque adeo ut id materia vel difficillima periclitarer, ad ea quæ de trochoide vestiganda supererant aggressus sum; nempe centra gravitatis solidorum trochoidis et solidorum ex ejus partibus exsurgentium; dimensionem et centra gravitatis superficierum omnium istorum solidorum; ac postremo dimensionem et centra gravitatis ipsiusmet lineæ curvæ cycloidis ejusque partium.

Ac primum centra gravitatis solidorum et semi-solidorum indagavi, et ope meæ methodi assecutus sum; quod mihi sic arduum est visum quasvis alias insistentibus vias, ut periculum facturus, an ita res esset quemadmodum mihi persuaseram, hanc omnibus geometris, etiam constituto præmio, inquisitionem proponere decreverim. Tunc scilicet latina illa scripta quaquaversum missa vulgavi, ac, dum illa de solidis problemata investigantur, reliqua ego omnia dissolvi, quemadmodum sub hujus scriptionis finem exponam, ubi de geometrarum responsis prius dixero.

Illa vero responsa duplicis sunt generis, quippe diversi sunt scribentium genii. Quidam soluta a se problemata, atque ita jus sibi in præmium esse contendunt : horum scripta legitimo examine propediem excutientur. Alii ad problematum quidem solutionem non adspirant, sed suas tantum in cycloidem commentationes exponunt.

Horum in litteris multa præclara, et eximiæ dimetiendi cycloidis plani rationes habentur, imprimisque in epistolis Sluzii, Leodiensis ecclesiæ canonici; Richii, Romani; Hugenii, Batavi, qui primus omnium detexit eam plani trochoidis portionem trilineam, quæ his tribus lineis comprehenditur, scilicet quarta parte axis ad verticem terminata, recta ad axem ab initio illius quartæ partis perpendiculariter ordinata usque ad trochoidem, et portione curvæ trochoidis inter duas prædictas rectas terminata, spatio rectilineo dato æqualem esse, atque adeo illi æquale quadratum absolute exhiberi : quod idem in epistola Wren, Angli, eodem fere tempore scripta reperi.

Cycloidis etiam, ejusdem partium, itemque solidorum circa basim tantum dimensionem accepimus ab Allouero, e Societate Jesu, Tolosano; quam, quia ille typis editam misit, attentius inspiciens, non sine admiratione cognovi cuncta illa quæ ibi habentur problemata, etsi non alia sint quam quæ jampridem a Robervallio soluta sunt, tamen ab illo nulla prorsus Robervallii facta mentione, quasi a se primum soluta, proferri. Quanquam enim diversam secutus est methodum, neminem tamen fugit

quam promptum ac proclive sit jam inventas propositiones nova specie habituque producere; tum ex cognita illarum solutione, novas solvendi vias comminisci.

Egi igitur sedulo cum Carcavio, tum ut Allouerum moneret, quod pro suo venditabat, Robervallii esse, vel nullo negotio ex ejus inventis elici; tum etiam ut viam ipsi explanaret qua eo Robervallius pervenerat; nam hæc inter honestos viros citra periculum communicantur. Me igitur annitente scriptum est ad Allouerum, illam quæ Robervallium eo perduxerat methodum, cujusdam figuræ quadratura niti, ab eodem pridem inventa, quam figuram delineat circini ductus in recti cylindri superficie, quæ superficies in planum porrecta, mediam cujusdam lineæ efficit partem, quam Robervallius *Trochoidis sociam* sive *gemellam* dixit, ex qua quæ ad axem rectæ ad angulos rectos ducuntur, æquales sunt dictis ex trochoide, demptis illis quæ ex rota ducuntur. In hoc vero non mediocrem me ab Allouero gratiam iniisse credidi; quandoquidem ipse in suis litteris quæ adhuc habentur, de istius figuræ quam *cycloi-cylindricam* appellat, quadratura ita loquitur, quasi quæ a sua notitia longe absit et quam nosse vehementer expetat.

Hæc pro Carcavio, cui tam multa scribere non vacabat, quidam ipsius amicus ad Allouerum scripsit, cui vicissim rescripsit Allouerus.

Sed inter missa a geometris scripta, nullum ipsius Wren scripto præstantius. Nam præter egregiam dimetiendi cycloidis plani rationem, etiam curvæ et ejus partium cum recta comparationem aggressus est. Propositio ejus est, trochoidem ad suum axem esse quadruplam; hujus ille enuntiationem sine demonstratione misit; et quia primus protulit, inventoris laudem promeritus est.

Nihil tamen de illius honore detractum iri puto, si quod verissimum est dixero, quosdam e Gallia geometras ad quos illa enuntiatio perlata est, et in iis Fermatium, ejus non difficulter demonstrationem invenisse. Dicam insuper Robervallium nihil sibi novum afferri plane ostendisse; statim ac enim de ea propositione audiit, integram ejus demonstrationem continuo subjecit, cum pulcherrima methodo, ad omnium linearum curvarum dimensionem: quam methodum ipse, dum alia inde graviora consectaria sperat eruere, diu occultam habuerat. Et certe eadem ille methodo usus erat ad comparandas spirales lineas cum parabolicis, qua de re in operibus Mersenni nonnulla reperias.

Hæc methodus compositione item motuum innititur, ut et illa tangentium. Nam sicuti motus compositi directio tangentem dat, sic ejus celeritas curvæ longitudinem efficit, quod sane nunc primum reseratur.

Hæc sunt quæ in eorum qui præmium non respiciunt scriptis animadversione dignissima reperi; de cæteris, peracta demum discussione, dicemus; quam quidem prima octobris die aperiri constitutum erat, sed ad reditum usque Carcavii, qui jamjam affuturus nuntiatur, rejicere necesse fuit. Tum vero judicabitur an aliqui quatuor illis legibus satisfecerint, quas nos editis mense junio scriptis promulgavimus.

I. Ut solutio Carcavio denuntiata et apud eumdem rescripta sit intra præstitutum tempus, nimirum primum octobris diem; *qui intra* (hæc nostra verba) *præstitutum tempus D. de Carcavi significaverit*

II. Ut illa denuntiatio instrumento publico fiat, ad tollendam fraudis suspicionem.

III. Ut demonstratio compendiaria, vel saltem certi cujusdam casus calculus offeratur, ex quo intelligi possit an qui eum mittit jam tum veram problematis solutionem tenere credendus sit : *Aut certe ad confirmandam assertionis veritatem casus quem mox designabimus calculum miserit.* At misso calculo solo, tunc de vero aut falso omnino statuendum veniet, prout calculus verus vel falsus judicatus fuerit.

IV. Ut deinde per otium, omnium propositorum casuum demonstratio mittatur, eaque vera et omnibus partibus geometrica ab iis judicetur, quos Carcavius arbitros acciverit. Si quis tamen error calculi in integras illas omnium casuum demonstrationes irrepserit, eum putavimus condonandum : quia calculi necessitas cessat, ubi adest demonstratio, adeoque tunc semper ignoscendus est error in calculo interveniens.

Si duo his conditionibus satisfecerint, primus sic primum præmium, secundus secundum accipiet; si unus modo, solus utrumque obtinebit. At qui vel uni illarum legum defuerit, excidet ille quidem præmio, non item honore, quem pro scriptorum quæ ille publicare poterit pretio, meritum consequetur; non enim ullas dispensando honori leges apposui, qui prorsus mei juris non erat; sed tantum præmiis, quorum mihi plena et soluta potestas fuit.

Quod si, re legitime discussa, nullus problemata dissolvisse reperiatur, tunc meas ipse solutiones proferam, uti me in scriptis meis, postquam præstituta ad id prima octobris dies advenisset, facturum esse pollicitus sum. Itaque calculum meum jam evulgare cœpi, multisque illum fide dignissimis personis tradidi manuscriptum, et inter alios Carcavio, Robervallio, D. Galois, regio tabellioni Parisiis degenti ac compluribus aliis Galliæ viris dignitate et eruditione præstantibus, qui diem accepti a me calculi diligenter annotarunt.

Hunc vero propterea statim edendum non censui, ut si qui in ipsa discussione eum invenisse reperti sint, id ab ipsis ante vulgatam solutionem meam factum prædicem : sin minus a nemine, inventa publicabo.

Quin etiam, quo tota trochoidis natura pernoscatur, sequentia adjungam problemata, quorum nonnulla mihi videntur non minus ad solvendum difficilia, quam quæ hucusque proposita sunt.

I. Puncto Z dato quocumque in trochoide simplici, invenire centrum gravitatis curvæ ZA inter assignatum punctum Z et verticem A interceptæ.

II. Invenire dimensionem superficiei curvæ ab eadem curva ZA descriptæ, dum ipsa ZA circumvolvitur, vel circa basim, qui casus facilis est, vel circa axem : et sive conversio proponatur integra, sive dimidiata, vel ejus quæcumque pars.

III. Omnium prædictarum superficierum a curva ZA descriptarum, tam partium quam integrarum, centra gravitatis assignare.

Et hoc quidem tertium omnium inventu difficillimum mihi exstitit. Esto ergo idem solum ac unicum præ cæteris ad discutiendum propositum.

In omnibus autem illis problematibus supponitur circuli quadratura, ubicumque supponenda fuit.

Hæc sunt quæ de natura trochoidis retegenda restabant, quorum solutionem ad ultimum usque decembris diem hujus anni 1658 comprimemus : ut si quis ea intra id tempus invenerit, inventionis gloria potiatur. At hoc elapso, si nemo attulerit, ipsimet afferemus atque ipsam etiam generalem dimensionem omnium linearum curvarum cujusvis trochoidis vel protractæ vel contractæ, quæ non rectis lineis, sed ellipsibus æquales ostendentur.

Hic nostræ in hujus lineæ natura rimanda pervestigationis limes; fuit; quare ut totam hanc narrationem in summam contraham :

Primus Mersennus hanc lineam in natura rerum advertit, nec tamen ejus naturam pervidere valuit.

Primus Robervallius et naturam retexit, et tangentes assignavit, ac plana et solida dimensus est, et centra gravitatis, tum plani, tum plani partium, invenit.

Primus Wren lineam curvam dimensus est.

Ego denique primus, solidorum, ac semisolidorum trochoidis et ejus partium, tum circa basim, tum circa axem, centra gravitatis inveni. Primus, ipsiusmet lineæ centrum gravitatis. Primus, dimensionem superficierum curvarum prædicta solida, semisolida, eorumque partes comprehendentium. Primus, centra gravitatis talium superficierum integrarum et diminutarum. Ac primus, dimensionem omnium linearum curvarum cujusvis trochoidis, tam protractæ, quam contractæ

10 octobris 1658.

RÉCIT

De l'examen et du jugement des écrits envoyés pour les prix proposés publiquement sur le sujet de la roulette, où l'on voit que ces prix n'ont point été gagnés, parce que personne n'a donné la véritable solution des problèmes.

L'absence de M. de Carcavi ayant retardé l'examen des écrits qu'il a reçus sur les problèmes proposés touchant la roulette, aussitôt qu'il fut de retour, il assembla, le 24 novembre, des personnes très-savantes en géométrie, lesquelles il pria de vouloir examiner ces écrits : et leur dit qu'encore qu'on lui en eût envoyé plusieurs, il y en avoit peu néanmoins à examiner, parce que la plupart avoient été retirés par les auteurs qui avoient prié qu'on ne les soumît pas à l'examen, et qu'ainsi il ne lui en restoit que de deux personnes, qu'il ne voulut point nommer. Que l'un des écrits consistoit en un simple calcul d'un cas proposé, lequel lui fut envoyé signé par l'auteur[1] en date du 15 septembre 1658, et porté chez lui, le 23, par une personne qui demanda qu'on marquât sur le paquet le jour de la réception, en disant qu'il étoit question d'un prix; ce qui fut fait. Mais qu'il reçut incontinent après des lettres du

1. Le P. Lallouère, jésuite.

même auteur, du 21 septembre, par lesquelles il mandoit que son calcul étoit faux : en quoi il persista par d'autres des mois de septembre, d'octobre et de novembre, sans néanmoins envoyer d'autres calculs, mais déclarant aussi qu'il ne prétendoit point aux prix destinés à ceux qui auroient résolu les problèmes dans le temps déterminé. De toutes lesquelles choses M. de Carcavi conclut qu'encore que cet auteur ne lui eût pas mandé qu'on ne soumît point son calcul à l'examen, il jugeoit néanmoins que cela n'étoit pas nécessaire, un auteur étant le meilleur juge des défauts de son propre ouvrage : de sorte qu'on ne fut pas obligé d'y apporter beaucoup d'attention ; et même on vit d'abord qu'il en falloit peu pour en juger, parce que les mesures qui y sont données sont différentes des véritables, chacune presque de la moitié ; et que dans un solide aigu par une extrémité, et qui va toujours en s'élargissant vers l'autre, il assigne le centre de gravité vers l'extrémité aiguë, ce qui est visiblement contre la vérité. On jugea aussi que ce calcul ayant été envoyé seul, pour faire juger, selon qu'il seroit vrai ou faux, que l'auteur avoit ou n'avoit pas les méthodes pour la résolution des problèmes, au temps qu'il l'avoit envoyé ; les erreurs qui s'y trouvoient lui donnoient l'exclusion, et ne devoient pas être mises au rang de ces autres simples erreurs de calcul, que l'anonyme avoit bien voulu excuser à ceux qui enverroient en même temps les démonstrations ou les méthodes entières et véritables, auxquelles si les calculs ne se trouvoient pas conformes, il paroîtroit assez que ces erreurs ne seroient que de calcul et non pas de méthode ; sur quoi l'anonyme avoit dit, *salvo semper errore calculi* : au lieu que, quand le calcul est seul, on ne sauroit juger si l'erreur qui s'y trouve est de méthode ou de calcul, dont aussi l'anonyme n'a dit en aucune manière, *salvo errore calculi ;* et qu'il y a apparence que c'est une erreur de méthode, lorsque, ayant reconnu que le calcul est faux, on n'en envoie ensuite aucun autre. Mais on jugea en même temps qu'il falloit laisser à l'auteur de ce calcul l'avantage d'avoir reconnu le premier sa faute, puisqu'il l'avoit en effet écrit incontinent après l'avoir envoyé.

M. de Carcavi dit ensuite qu'il ne restoit donc à examiner que l'écrit d'un autre auteur [1], daté du 19 août, style ancien, et signé par un notaire le même jour, où l'auteur prétend donner une méthode entière pour la résolution de tous les problèmes, avec les solutions et démonstrations en cinquante-quatre articles. Que le paquet en fut délivré à Paris au commencement de septembre, et qu'il avoit reçu depuis trois autres lettres du même auteur ; l'une du 3 septembre, par laquelle il corrige quelques erreurs qu'il avoit remarquées dans son écrit, et il ajoute même qu'*il n'est pas encore pleinement assuré du reste*, *ne l'ayant pas*, *jusques à ce temps-là*, *assez exactement examiné :* l'autre du 16 septembre, par laquelle il ne fait qu'avertir de l'envoi des premières, et la dernière du 30 septembre, où il dit en général, et sans rien marquer en particulier, qu'outre les corrections qu'il a envoyées, il peut y en avoir d'autres à faire : par où il semble être en défiance de ses solutions ; et ce

1. Wallis.

qui le marque encore davantage, est qu'il demande, par la même lettre, *si on ne se contenteroit pas d'une solution approchante de la véritable.* Or, il n'y a guère d'apparence qu'une personne qui croiroit avoir donné les solutions exactes et géométriques, demandât si on ne se contenteroit par des approchantes; mais néanmoins, comme il ne révoque pas les siennes en propres termes, quoiqu'il y ait eu beaucoup de temps pour le faire, s'il l'eût voulu, on jugea qu'on ne pouvoit pas sur cela refuser d'examiner des écrits envoyés avec acte public, et qui n'avoient pas été expressément révoqués : vu même qu'il dit par une de ses lettres, que *les défauts qui pouvoient être dans ses solutions*, *et qu'il appelle des erreurs de calcul n'empêchoient pas*, *selon son avis*, *que la difficulté des problèmes ne fût suffisamment surmontée.*

On s'y appliqua donc, et on jugea que, ni dans son premier écrit, ni dans ses corrections, il n'avoit trouvé, ni la véritable dimension des solides autour de l'axe, ni le centre de gravité de la demi-roulette, ni de ses parties (ce qui avoit été résolu depuis longtemps par M. de Roberval), ni aucun des centres de gravité des solides, ni de leurs parties, tant autour de la base qu'autour de l'axe, qui étoient proprement les seuls problèmes proposés par l'anonyme avec la condition des prix, comme n'ayant encore été résolus par personne; et l'on trouva qu'outre les erreurs qu'il avoit corrigées par sa lettre, il en avoit laissé d'autres, et qu'il y en avoit de nouvelles dans sa correction même, lesquelles se rencontrent dans presque tous les articles, depuis le trente jusqu'au dernier.

On jugea aussi que ces erreurs n'étoient point de calcul, mais de méthode, et proprement des paralogismes : parce que les calculs qu'il y donne sont très-conformes à ses méthodes, mais que ces méthodes mêmes sont fausses. Et on remarqua qu'une de ses erreurs les plus considérables consiste en ce qu'il raisonne de certaines surfaces indéfinies en nombre, et qui ne sont pas également distantes entre elles, de même que si elles l'étoient; ce qui fait qu'ayant à mesurer la somme de ces surfaces, ou la somme des forces de leurs poids (à quoi se réduit toute la difficulté et tout le secret), il n'en trouve que de fausses mesures, ses méthodes n'allant point aux véritables.

C'est ce qui le mène à comparer, comme nombre à nombre, des quantités qui sont entre elles comme des arcs de cercle au diamètre, ou comme leurs puissances; et c'est ainsi que voulant donner la raison du solide de la roulette à l'entour de l'axe à la sphère de sa roue (ou de son cercle générateur), après l'avoir donné comme 23 à 2 dans son premier écrit, il la donne comme 37 à 4 dans sa correction, par un calcul très-conforme à ses méthodes; au lieu que la véritable raison, que M. de Roberval a donnée de ce même solide à son cylindre de même hauteur et de même base, est *comme les trois quarts du carré de la demi-base de la roulette*, *moins le tiers du carré du diamètre de la roue*, *au carré de cette demi-base.*

Il n'est pas moins éloigné du véritable centre de gravité des solides à l'entour de la base, et encore plus de ceux à l'entour de l'axe, à cause d'un nouveau paralogisme qu'il y ajoute, en prenant mal les centres de

gravité de certains solides élevés perpendiculairement sur des trapèzes, dont il se sert presque partout, et coupés par des plans qui passent par l'axe. Et on jugea que les erreurs de ces écrits donnoient encore sans difficulté l'exclusion.

Le jugement de ses écrits ayant été ainsi arrêté, il fut conclu que, puisqu'on n'avoit reçu aucune véritable solution des problèmes que l'anonyme avoit proposés, dans le temps qu'il avoit prescrit, il ne devoit à personne les prix qu'il s'étoit obligé de donner à ceux dont on auroit reçu les solutions dans ce temps; et qu'ainsi il étoit juste que M. de Carcavi lui remît les prix qu'il avoit mis en dépôt entre ses mains, puisqu'ils n'avoient été gagnés par personne; ce qui a été exécuté.

Paris, le 25 novembre 1658.

SUITE DE L'HISTOIRE DE LA ROULETTE,

Où l'on voit le procédé d'une personne[1] *qui avoit voulu s'attribuer l'invention des problèmes proposés sur ce sujet.*

Les matières de géométrie sont si sérieuses d'elles-mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre un peu divertissantes. L'histoire de la roulette avoit besoin de quelque chose de pareil, et fût devenue languissante, si on n'y eût vu autre chose, sinon que j'avois proposé des problèmes avec des prix, que personne ne les avoit gagnés, et que j'en eusse ensuite donné moi-même les solutions, sans aucun incident qui égayât ce récit; comme est celui que l'on va voir dans ce discours.

Une personne, que je ne nomme point, ayant appris qu'entre les problèmes que M. de Roberval avoit résolus autrefois, la dimension du solide de la roulette à l'entour de l'axe étoit sans comparaison le plus difficile; il fit dessein, après avoir reçu l'énonciation de ce problème, et les moyens par lesquels M. de Roberval y étoit arrivé, de se faire passer pour y être aussi venu de lui-même, et par ses méthodes particulières : espérant que cette estime lui seroit assez glorieuse, quoique ce ne fût que vingt-deux ans après. Mais la manière dont il s'y prit détruisit sa prétention, et fit voir trop clairement qu'il n'avoit point de part de lui-même à cette invention. Car l'énonciation qu'il envoya, et qu'il vouloit faire passer pour sienne, étoit accompagnée de celle de M. de Roberval, dont elle ne différoit que de termes : comme qui diroit, *le rectangle de la base et de la hauteur*, au lieu de dire, *le double de l'espace du triangle.* Et il reconnoissoit, dans la même lettre, qu'une autre énonciation qu'il avoit donnée auparavant étoit fausse; mais qu'il s'assuroit que cette dernière étoit véritable, par cette raison qu'elle étoit conforme à celle de M. de Roberval.

Ce discours fit juger le contraire de ce qu'il vouloit : puisque, s'il

1. Le P. Lallouère.

eût eu en main des méthodes et des démonstrations géométriques de la vérité, ce n'eût pas été par cette conformité qu'il se fût assuré de sa solution, mais qu'il en eût jugé plutôt, et de celle de M. de Roberval même, par ses propres preuves. On connut donc qu'il n'avoit, en cela, de lumière qu'empruntée; et ainsi on s'étonna de la prière qu'il faisoit en même temps, qu'on s'assurât et qu'on crût sur sa parole qu'il étoit arrivé à cette connoissance de soi-même, et par la seule balance d'Archimède. A quoi on répondit que son énonciation étoit véritable et très-conforme à celle de M. de Roberval; mais qu'il étoit bon qu'il envoyât ses méthodes pour voir si elles étoient différentes.

Il ne satisfit point sur cette demande, mais continua à prier qu'on s'assurât sur sa parole, qu'il avoit trouvé ce problème par la balance d'Archimède, sans mander en aucune sorte ses moyens. Ce qui ne fit que trop connoître son dessein, et on le lui témoigna assez clairement par plusieurs lettres: mais il y demeura si ferme, que, quand il vit l'*Histoire de la roulette* imprimée, sans qu'il y fût en parallèle avec M. de Roberval, il se plaignit hautement de moi, comme si je lui eusse fait une extrême injustice.

Sa plainte me surprit, et je lui fis mander que, bien loin d'avoir été injuste en cela, j'aurois cru l'être extrêmement d'ôter à M. de Roberval l'honneur d'avoir seul résolu ce problème : n'ayant aucune marque que personne y eût réussi. Que je n'avois point d'intérêt en cette affaire; mais que je devois y agir équitablement, et donner à tous ceux qui avoient produit leurs inventions sur ce sujet, ce qui leur étoit dû. Que s'il avoit montré qu'il fût en effet arrivé à cette connoissance sans secours. je l'aurois témoigné avec joie : mais que, n'ayant rien fait d'approchant, et n'y ayant personne qui ne pût, aussi bien que lui, donner une énonciation déguisée, et se vanter de l'avoir trouvée soi-même par la balance d'Archimède, j'aurois failli de donner à M. de Roberval un compagnon dans ses inventions.

Ces raisons ne le satisfirent point; il persista à écrire qu'on ne lui rendoit pas justice : de sorte qu'on fut obligé de lui mander plus sévèrement les sentimens qu'on en avoit. On lui fit donc entendre que, dès qu'on a vu une invention publiée, on ne peut persuader les autres qu'on l'auroit trouvée sans ce secours, ni s'en assurer soi-même, parce que cette connoissance change les lumières et la disposition de l'esprit, qui ne sont plus les mêmes qu'auparavant; et quand on auroit pris de nouvelles voies, ce n'en seroit pas une marque, parce qu'on sait qu'il est aussi facile de réduire à d'autres méthodes ce qui a été une fois découvert, qu'il est difficile de le découvrir la première fois. Qu'ainsi tout l'honneur consiste en la première production; que toutes les autres sont suspectes, et que c'est pour éviter ce soupçon, que les personnes qui prennent les choses comme il faut, suppriment leurs propres inventions, quand ils sont avertis qu'un autre les avoit auparavant produites, quelques preuves qu'il y ait qu'ils n'en avoient point eu de connoissance : aimant bien mieux se priver de ce petit avantage, que de s'exposer à un reproche si fâcheux, parce qu'ils savent qu'il n'y a point assurément de déshonneur à n'avoir point résolu un problème; qu'il y

a peu de gloire à y réussir, et qu'il y a beaucoup de honte à s'attribuer des inventions étrangères.

La moindre de ces raisons, et de toutes les autres qu'on lui écrivit, eût été capable, ce me semble, de faire renoncer à tous les problèmes de la géométrie ceux qui sont au-dessus de ces matières : mais pour lui il n'en rabattit rien de sa prétention, et il persiste encore maintenant. Voilà quel a été son procédé sur les problèmes de M. de Roberval, où j'admirai à quoi cette fantaisie de l'honneur des sciences porte ceux qui veulent en avoir, et qui n'ont pas de quoi en acquérir d'eux-mêmes.

Mais il n'en demeura pas là, et, pendant qu'on l'exhortoit à quitter cette entreprise, il s'engagea à une autre, qui fut de se vanter d'avoir résolu tous les problèmes que j'avois proposés publiquement : en quoi il se trouva dans un étrange embarras, et bien plus grand qu'auparavant; car, dans sa première prétention, il avoit en main les énonciations de M. de Roberval, et pouvoit ainsi en produire de semblables et véritables, en assurant qu'il y étoit arrivé par des moyens qu'il vouloit tenir secrets : au lieu que, dans sa seconde prétention, il ne pouvoit au plus avoir que l'énonciation d'un seul cas, que j'ai communiquée à quelques personnes, et qui n'est peut-être pas venue jusques à lui : de sorte qu'étant dans l'impuissance entière de produire toutes les énonciations dont il se vantoit, ne pouvant y arriver ni par sa propre invention, ni par communication, il se mit dans la nécessité de succomber à tous les défis qu'on lui a faits d'en faire paroître aucune, et par ce moyen, en état de nous donner tout le divertissement qu'on peut tirer de ceux qui s'engagent en de pareilles entreprises, comme cela est arrivé en cette sorte.

Ce fut dans le mois de septembre qu'il commença à écrire qu'il avoit résolu tous ces problèmes : on me le fit savoir, et je fus surpris de sa petite ambition; car je connoissois sa force et la difficulté de mes problèmes, et je jugeois assez, par tout ce qu'il avoit produit jusqu'ici, qu'il n'étoit pas capable d'y arriver. Je m'assurai donc, ou qu'il s'étoit trompé lui-même, et qu'en ce cas il falloit le traiter avec toute la civilité possible, s'il le reconnoissoit de bonne foi, ou qu'il vouloit nous tromper, et attendre que j'eusse publié mes problèmes pour se les attribuer ensuite, et qu'alors il falloit en tirer le plaisir de le convaincre, qui étoit en mon pouvoir, puisque la publication de mes problèmes dépendoit de moi. Je témoignai donc mon soupçon, et je priai qu'on observât ses démarches. La première qu'il fit, fut d'envoyer, avant que le terme des prix fut expiré, un calcul d'un cas proposé, si étrangement faux en toutes ses mesures, que lui-même le révoqua par le premier courrier d'après : mais bien loin de le faire avec modestie, il y agit avec la fierté du monde la plus plaisante et la moins fine; car il manda qu'à la vérité son calcul étoit faux, mais qu'il en avoit un autre bien véritable, et même de tous les cas généralement, avec toutes les démonstrations écrites au long en l'état qu'il vouloit les faire paroître, et toutes prêtes à donner à l'imprimeur; mais que néanmoins il ne vouloit pas les produire avant que j'eusse imprimé les miennes, comme je devois le faire en ce temps-là, qui étoit le commencement d'octobre.

Je l'entendis assez, et il ne fut pas difficile à tout le monde de voir que c'étoit justement ce que j'avois prédit. On résolut donc de le pousser à l'extrémité; et pour montrer parfaitement qu'il ne pouvoit rien donner qu'après moi, je promis publiquement, dans l'*Histoire de la roulette*, de différer de trois mois, savoir, jusqu'au 1er janvier, la publication de mes problèmes; au lieu qu'il s'étoit attendu que je les donnerois au 1er octobre, comme je l'eusse fait en effet sans cela.

Cette remise, qui lui eût été si favorable, s'il eût eu véritablement ses solutions, trahit son mystère, et lui devint insupportable, parce qu'il ne les avoit pas, et qu'il voyoit bien qu'on alloit juger de lui par l'usage qu'il feroit de ce délai. Cela le mit donc en colère; et il fut si naïf dans sa mauvaise humeur, qu'il le témoigna franchement par ses lettres, où il mandoit que c'étoit une chose étrange, que je voulusse ainsi sans raison différer de trois mois entiers la publication de mes solutions. A quoi on lui répondit qu'il avoit le plus grand tort du monde de s'en plaindre; que rien ne lui étoit plus avantageux; qu'il devoit bien en profiter, et s'assurer par là l'honneur de la première production, pendant que je m'étois lié les mains moi-même, et que, si son ouvrage étoit prêt, il pouvoit le faire paroître deux ou trois mois avant aucun autre. Qu'ainsi étant le premier de loin, il n'y auroit que lui dont il fût certain qu'il ne tînt ses inventions de personne : et enfin on lui dit alors, en sa faveur, tout ce qu'on avoit dit contre lui en l'autre occasion.

Ces raisons étoient les meilleures du monde; mais il en avoit une invincible, qui le forçoit à ne point y consentir, et à mander encore qu'il étoit résolu de ne rien produire qu'après moi. Cette réponse fut reçue de la manière qu'on peut penser, et on délibéra là-dessus de ne plus le flatter : de sorte qu'on lui écrivit nettement que son procédé n'étoit pas soutenable; qu'on lui donnoit avis de la défiance où l'on étoit de lui; qu'après avoir donné un faux calcul, il étoit engagé d'honneur de se hâter de donner le véritable, s'il l'avoit; mais que de demeurer si longtemps sans le faire, après tant de défis, et de ne point vouloir en produire avant que d'avoir vu les solutions d'un autre, c'étoit montrer aux moins clairvoyans qu'il n'en avoit point; et qu'ainsi on lui déclaroit pour la dernière fois, qu'il devoit envoyer avant le 1er janvier, ou ses méthodes, ou ses calculs ; et s'il ne vouloit pas les donner à découvert, qu'au moins il les donnât en chiffre; que cet expédient ne pouvoit être refusé, sous quelque prétexte que ce fût; que c'étoit la manière la plus sûre et la plus ordinaire dont on se servît en ces rencontres, pour s'assurer l'honneur d'une invention, sans que personne pût en profiter; que, s'il acceptoit cette condition, il n'avoit qu'à envoyer son chiffre à un de ses amis dans le mois de décembre; que le mien étoit déjà fait, et qu'on les produiroit ensemble; qu'ensuite son explication et la mienne paroîtroient aussi ensemble; et que celui dont le chiffre expliqué se trouveroit contenir la vérité, seroit reconnu pour avoir résolu les problèmes de lui-même et sans secours; mais que celui dont le chiffre expliqué se trouveroit faux, seroit exclu de l'honneur de l'invention, sans pouvoir ensuite y prétendre, après avoir vu les solutions de l'autre à découvert.

Voilà l'expédient décisif qu'on lui proposa; et on lui ajouta, le plus sévèrement que la civilité peut le permettre, que, s'il le refusoit, il paroîtroit à toute la terre qu'il n'avoit point ces solutions; qu'autrement il ne céderoit pas à un autre l'avantage de la première invention; et que si, ensuite de ce refus et après que j'aurois produit les miennes, il entreprenoit d'en produire aussi, il ne passeroit que pour les avoir prises de moi, et acquerroit toute la méchante opinion que méritoit un procédé de cette nature. On attendit la réponse à tout cela, comme devant servir de dernière preuve de l'esprit avec lequel il agissoit; et on la reçut peu de temps après, qui portoit ce que j'avois tant prédit, qu'il ne vouloit donner ni discours, ni chiffre, ni autre chose, ni accepter aucune condition, qu'il vouloit voir mes inventions publiées et à découvert, avant que de rien produire; qu'il ne me disputoit ni les prix ni l'honneur de la première invention; qu'il ne prétendoit autre chose, sinon de voir mes problèmes, et en publier ensuite de semblables; que c'étoit sa dernière résolution, et qu'il ne vouloit plus parler sur ce sujet.

Cette réponse, la plus claire du monde, fit voir son impuissance aussi parfaitement qu'il étoit possible, à moins que de la confesser en propres termes, ce qu'il ne falloit pas espérer de lui. Et ainsi on jugea que ce refus absolu de donner ni discours ni chiffre, le convainquoit pleinement; et qu'il me seroit inutile de remettre encore à un nouveau terme la publication de mes problèmes, puisque, ayant déclaré qu'il ne produiroit rien qu'après moi, ses remises suivroient toujours les miennes, et que la chose iroit à l'infini. Je crus donc qu'il ne falloit point différer après le terme du 1er janvier, et qu'alors je devois, à ma première commodité, terminer cette affaire, qui a assez duré, et donner à tant de personnes savantes qui se sont plu à ces questions, la satisfaction qu'ils attendent. Mais il me sembla qu'il étoit bon de faire voir ce récit par avance, afin qu'après que j'aurois donné mes solutions, s'il arrivoit qu'il fût si mal conseillé que de les déguiser, tout le monde connût la vérité. C'est la seule chose que j'ai voulu faire par ce discours, et non pas décrier sa personne; car je voudrois le servir, et je respecte sa qualité de tout mon cœur. Aussi j'ai caché son nom; mais s'il le découvre après cela lui-même, pour s'attribuer ces inventions, il ne devra se prendre qu'à lui de la mauvaise estime qu'il s'attirera; car il doit bien s'assurer que ses artifices seront parfaitement connus et relevés.

Et qu'il n'espère pas s'en sauver par l'attestation d'un ami qu'il pourroit mendier, qui certifieroit avoir vu son livre en manuscrit avant le 1er janvier : ce n'est pas ainsi qu'on agit en ces matières, où la seule publication fait foi. S'il n'étoit question que d'un simple calcul de trois lignes, dont on eût donné les copies à plusieurs personnes, qui se trouvassent toutes conformes, ce seroit quelque chose. Mais quand il s'agit d'un livre entier, et de cent propositions de géométrie avec leurs calculs, où il n'y a rien de si facile que de mettre un nombre ou un caractère pour un autre, c'est une plaisante chose de prétendre que ce seroit assez de produire le certificat d'un ami, qui attesteroit d'avoir

vu ce manuscrit un tel jour; et principalement, si on avoit de quoi montrer que cet ami ne l'auroit ni lu ni examiné en donnant ce certificat. Il n'y a personne qui dût prétendre que son autorité pût arrêter ainsi tous les doutes : on ne croit en géométrie que les choses évidentes. Je lui ai donné six ou sept mois pour en produire : il ne l'a point fait; et il lui a été aussi impossible de le faire, qu'il seroit aisé de déguiser les vraies solutions quand elles seront une fois publiées.

Mais on ne doit pas être surpris de son procédé en cette rencontre, ni de ce qu'il avoit entrepris sur les problèmes de M. de Roberval, car il agit de même en toutes occasions. Et il y a plusieurs années qu'il se vante et qu'il répète souvent qu'il a trouvé la quadrature du cercle, qu'il la donnera à son premier loisir, résolue en deux manières différentes, et aussi celle de l'hyperbole : d'où l'on peut juger s'il y a sujet de croire sur sa parole qu'il ait les choses dont il se vante.

Paris, ce 12 décembre 1658.

Paris, le 29 janvier 1659.

Depuis que cette pièce a été faite, j'ai publié mon *Traité de la roulette;* et le premier jour de janvier j'en envoyai le commencement à cette même personne dont j'ai parlé dans cet écrit, afin qu'il y vît le calcul du cas que j'avois proposé, et où il s'étoit trompé : sur quoi il n'a pas manqué de dire que c'étoit justement ainsi qu'il avoit réformé le sien; et il s'est hasardé de plus de faire davantage, et d'envoyer les calculs de quelques autres cas dans une feuille imprimée du 9 janvier, où il assure qu'elle est toute conforme au manuscrit qu'il en avoit donné depuis longtemps à des gens de croyance, pour servir de preuve qu'il avoit tout trouvé sans moi. Mais outre que, quand ses calculs seroient justes, cela lui seroit maintenant inutile, après la lumière que ce que je lui ai envoyé a pu lui donner : il se trouve, de plus, que ceux de ses calculs que je viens d'examiner en les recevant sont tellement faux que cela est visible à l'œil; et entre autres, le centre de gravité du solide autour de l'axe, qu'il place tout contre le quart de l'axe. Il ne donne pas moins mal à propos la distance entre l'axe et le centre de gravité du demi-solide de la partie supérieure de la roulette autour de l'axe. De sorte que cette pièce qu'il dit être si conforme à son manuscrit, et laquelle il vient de produire pour soutenir sa prétention, est ce qui lui ferme absolument la bouche, et qui montre le mieux le besoin qu'il avoit de voir mes solutions et mes méthodes, que je lui ai toutes envoyées maintenant, sur lesquelles il lui sera aussi facile de corriger encore ses nouvelles fautes après l'avis que je lui en donne, et de trouver les véritables calculs, qu'il lui seroit inutile de se les attribuer désormais.

HISTORIÆ TROCHOIDIS SIVE CYCLOIDIS CONTINUATIO,

In qua videre est cujusdam viri machinamenta qui se auctorem problematum super hac re propositorum erat professus.

Tantum in rebus geometricis severitatis inest, ut peropportunum sit aliquid intervenire, quo possit earum asperitas aliquantulum mitigari. Nescio quid hujusmodi trochoidis historia desiderabat, quæ sensim elanguisset, si nihil aliud lectores ex ea didicissent, nisi quædam a me problemata ad explicandum proposita, certaque explicaturis præmia constituta : quæ quum nemo esset adeptus, tandem eorum solutionem a meipso proditam. Hac narratione quid tristius, si nullus eam jocularis eventus hilarasset ? Percommode igitur accidit is quem hic expocituri sumus.

Audierat quidam, cujus nomen a me tacebitur, omnium quæ olim Robervallio dissoluta erant problematum longe illud difficillimum esse, quo solidum circa trochoidis axem demensus est. Ergo quum et hujus problematis solutionem, et vias quibus ad eam pervenerat Robervallius accepisset, sibi quoque solutionis istius gloriam asserere meditatus est, quasi sua ipsius industria repertæ : magnum aliquid ratus si ad hanc laudem ante annos viginti duos ab altero præceptam socius accederet. Sed consilium suum ipse pervertit, tam rudibus artificiis rem aggressus, ut omnibus palam foret, nullam hujus inventionis partem ipsi deberi. Quam enim protulit enuntiationem, quamque adoptabat in suam, Robervallianæ simul conjunctam emisit a qua solis duntaxat vocibus distinguebatur, ut si dixeris, rectangulum ex basi et altitudine, pro eo quod est, duplicatum trianguli spatium. In hac porro epistola fatebatur se falsam quidem enuntiationem ante id temporis evulgasse, de hujus autem posterioris veritate confidere se, quia Robervallianæ congruebat.

Hæc in hominum mentes plane contrariam de illo opinionem injicere. Nam si certæ quædam methodi, ac geometricæ demonstrationes ipsi fuissent in manibus, an ille de solutione sua ex hac tantum similitudine certior factus foret ? ac non potius de solutione tum sua, tum etiam Robervallii ex propriis rationibus judicaret ? Patuit ergo virum alieno lumine usum, non suo : nec satis juste visus est postulare, ut ipsi demum affirmanti crederemus sua se opera uniusque Archimedis bilancis auxilio ad eam cognitionem esse perductum. Unde et responsum est de prolatæ ab ipso enuntiationis veritate, deque illius cum Robervalliana congruentia dubitare quidem neminem, non alienum tamen fore, si suas quoque methodos proferret, quo facilius cerneretur, an propriæ ipsi ac peculiares essent.

Nil ille ad ista postulata reponere, de methodis suis nullam mentionem facere, nec minus tamen enixe instare, ut ipsum sola Archimedis bilance usum omnes sibi persuaderent. Quorsum hæc tenderent satis superque innotuit, nec id obscure ipsi litteris significatum. Haud tamen segnius perrexit quo occeperat, atque etiam ubi historiam trochoidis

typis evulgatam inspexit, seque illic Robervallio æquiparatum minime reperit, gravem sibi factam injuriam aperte conquestus est.

Ego vero hujus expostulationis novitate perculsus, homini scribendum curavi, me quidem non modo iniquum in eo nullo modo fuisse, sed contra potius summæ iniquitatis reum futurum, si solutionis istius gloriam, quam præter Robervallium nemo meritus videretur, cum alio quovis communicassem. Rem sane totam mea nihil interesse, mihi tamen æquo cum omnibus jure agendum, et unumquemque pro suarum inventionum merito ornandum fuisse. Ad hanc cognitionem si sua se opera pervenisse demonstrasset, id me prompto animo prædicaturum. Sed quum ab eo nil quidquam simile esset effectum, ac cuivis enuntiationem ementiri, eamque sola Archimedis bilance inventam jactare promptum esset, non potuisse me sine summa injuria ullum Robervallio comitem adjungere.

Hæc animum ejus non satis placaverunt, nec etiam tum destitit acriter postulare jus suum; ita ut paulo severius admonendus fuerit officii sui. Denuntiatum est igitur eam esse inventionis semel evulgatæ conditionem, ut illam se nemo proprio acumine comprehensurum fuisse fidem vel sibi vel aliis facere possit. Hac quippe cognitione menti novum lumen novasque cogitationes inseri; nequicquam autem peculiares quasdam vias ostentari, quum liqueat tam facile problemata jam resoluta novis rationibus explicari quam ægre primum solvi et expediri: adeoque totam primis solutionibus gloriam deberi; suspicione cæteras non carere, quam ut amoliantur honesti homines, qui res istas ut par est æstimant, sua statim inventa sponte premunt, si forte ab altero jam prolata rescierint, quibuslibet argumentis constet hæc ipsis penitus ignota fuisse. Multo enim malunt istius gloriæ jacturam facere, quam in tam molestæ opinionis periculum venire. Norunt scilicet in problemate non solvendo nullum dedecus, levissimum in solvendo honorem, in alienis fœtibus sibi arrogandis gravissimum esse flagitium.

Quemvis alium paulo ingenio erectiorem, et geometricis rebus aliquanto superiorem, vel una ex istis cæterisque quæ ipsi allatæ sunt rationibus ab omnibus hujusmodi problematis alienasset. At ille de sua spe nihil remisit, cui etiamnum inhæret pertinacissime. En qua ille ratione super illis solutionibus Robervallianis se gesserit : ubi mihi demirari subiit, quo vana illa laudis ex scientia petitæ cupiditas impelleret jejunos animos, gloriæ avidos, sed minores!

Utinam vero hic stetisset! At longe ultra provectus est. Quippe dum illum ab hoc consilio deterrent omnes, aliud et id longe operosius aggressus est. Palam siquidem prædicavit quæcumque proposueram problemata dissolvisse se : quod quidem ipsum in incredibiles quasdam multoque prioribus difficiliores conjecit angustias; siquidem antea enuntiationes Robervallianæ in promptu erant, nec arduum erat similes aliquas easque veras emittere, ac certis et arcanis comprehensas methodis jactitare; nunc vero nihil prorsus, præter unius duntaxat capitis enuntiationem, penes illum poterat esse, quæ paucis insuper a me credita ad ipsum forte non pervenit. Quum ergo hinc quascumque enuntiationes et pollicitus præstare minime posset, nec eas sua vel aliena ope comparare,

illinc sæpius compelleretur ab omnibus, ut vel unam saltem ex iis ostenderet, fieri aliter non potuit, quin nobis identidem provocantibus turpiter deesset, ac multum de se risum excitaret, ut solent qui majora viribus temere audent. Hoc qua ratione contigerit jam exponam.

Mense septembri occeperat scribere omnia hæc se problemata dissolvisse. Res ad me statim delata est : nec mediocriter animum percussit minuta hominis ambitio. Noveram enim vires ipsius, et problematum meorum difficultatem : et ex cæteris quæ ad hunc diem ille protulerat, satis ipsum huic oneri imparem esse conjiciebam. Ratus sum igitur illum aut decipi, atque adeo, si suum sponte fateretur errorem, summa cum humanitate tractandum : aut id agere ut nos deciperet, ac problematum meorum evulgationem manere, ut ea deinceps sibi arrogaret, ipsumque animi causa reum fraudis istius esse peragendum; quod quidem mihi pronum erat ac proclive, penes quem totum hujus evulgationis stabat arbitrium. Itaque nonnullis suspiciones meas palam testatus, curavi ut omnes motus ejus incessusque servarentur.

Ac primum nondum exacta præmiorum die venit ab eo cujusdam propositionis calculus tot et tantis undequaque confertus erroribus, ut ab ipso per proximum statim cursorem fuerit abdicandus, non ea sane qua debuerat moderatione, sed qua poterat lepidissima pinguissimaque ferocia. Fatebatur enim priorem quidem calculum falsum esse, sibi vero tum alterum omni ex parte verum, universasque simul propositiones complexum, tum demonstrationes omnes serie descriptas, et ad edendum paratas esse in manibus, quas tamen in publicum exire non esset passurus, nisi meis antea vulgatis, quod per illud temporis, ineunte scilicet octobre, præstiturum me professus eram.

Quid hæc sibi vellent satis intellexi, nec cuiquam amplius dubitatum est quin ipsissimum illud esset quod futurum esse denuntiaram. Placuit igitur ad extremas hunc angustias deducere. Et quo manifestius liqueret nihil ipsum nisi me præeunte promere posse, tres in menses ad kalendas nempe januarias vulgationem problematum meorum in historia trochoidis rejeci, eas alioquin kalendis octobris, quod et ipse sibi pollicebatur, daturus in lucem.

Hac quidem prolatione nihil ipsi fuerat commodius, si modo solutiones istæ præsto fuissent. Illæ vero procul aberant, ideoque et hanc velut infensam et mysteriorum suorum enuntiatricem tulit ægerrime. Noverat enim ita de se sententiam laturos omnes, ut hac mora uteretur. Illud, inquam, homini stomachum fecit, quem ille tam candide ac non dissimulanter aperuit, ut scribere non veritus sit, novum plane sibi videri me meorum problematum editionem tres totos in menses sine causa distulisse. Responsum est summa illum injuria mihi succensere; nil ipsi commodius et opportunius; quin potius occasionem oblatam arriperet ac primæ inventionis honorem sibi assereret, dum ego quasi constrictis mihimet manibus otiosus sederem; posse illum, si modo quod antea prædicaverat in promptu esset opus suum, illud geminis vel etiam tribus ante alterum quemlibet mensibus producere, atque ita unum fore, quem constaret inventa sua a nemine mutuatum; denique quæcumque alio loco

ad ipsum deterrendum dicta erant, nunc ad ipsum excitandum stimulandumque repetita sunt.

His rationibus nihil validius quicquam. Nihilominus homini conscio infirmitatis suæ altera quædam suberat ineluctabilis qua ad dissentiendum cogebatur. Iterum ergo rescripsit fixum esse sibi nihil omnino nisi post editas propositiones meas edere. Hæc responsio sic accepta est ut dignum erat : visum est nulla circuitione jam utendum.

Plane ergo et aperte significatum est ejus rationem iniquissimam esse, nec commodas de ipso suspiciones omnium animis insedisse; missum ante fallacem ab illo calculum, veri, si modo ipsi præsto esset, mittendi necessitatem afferre, siquidem honori suo consultum vellet; at rem semper in diem trahere, et tam multis compellationibus exstimulatum silere; denique nullas mittere solutiones nisi alienis prius inspectis; id vero vel tardioribus ingeniis fidem facere nullas revera solutiones ipsi suppetere. Postremo itaque denuntiatum est, ut intra finem vertentis anni vel methodos suas, vel calculos mitteret, si non expressis verbis conceptos, saltem aliquibus notis involutos; nullum jam tergiversandi locum relictum esse; eam enim demum et securissimam et frequentissimam esse viam, qua quis sibi posset alicujus inventionis gloriam vindicare, nec aliis rapiendam exponere. Quæ si conditiones ipsi arriderent, reliquum esse, ut alicui suorum mense decembris notas suas mitteret; meas dudum paratas; utrasque simul productum iri, ut cujus notæ expositæ veritati congruere deprehenderentur, hic genuinus istorum problematum interpres haberetur : contra cujus expositæ notæ errore censerentur implicitæ, is inventionis palma excideret, nec ad eam alienis deinceps solutionibus cognitis aspirare posset.

His conditionibus nihil æquius præcisiusque visum, quas si refugeret ille, sedulo commonitus est, et severitate quantam humanitatis leges ferre poterant maxima, certo istud indicio futurum omnibus eas illum solutiones nunquam habuisse, nunquam alioquin primæ inventionis laudem cuiquam concessurum fuisse. Quod si repudiatis quæ ipsi oblatæ fuerant conditionibus, meisque exinde solutionibus vulgatis, aliquas etiam vulgandi consilium resumeret, manifestum apud omnes plagiarium habitum iri, debitamque his factis opinionem sibi accersiturum. Suspensis omnium animis expectabatur ejus responsio, tanquam ultimum ingenii ejus specimen datura. Nec multo post tempore advenit illa quidem auguriorum meorum confirmatrix certissima. Enimvero rescribebat ille, nequicquam a se vel scripta vel notas vel aliud quidpiam exigi, conditiones nullas se recipere; nec quidlibet editurum, priusquam mea inventa edita inspexisset : de præmiis laudibusve nihil mecum certare : id unum sibi esse in animo, ut problemata mea videret; nonnullaque similia promeret : fixum illud sibi ac immotum; nec quidquam amplius de his omnibus auditurum libenter.

Plana hæc erant et aperta, nec quidlibet efflagitari potuit, quo plenius convinceretur, nisi reum se ingenue confiteretur, quod ab ipso sperari non poterat. Hac igitur omnium conditionum declinatione satis superque convictus judicatus est : ego vero nequicquam meorum problematum editionem prorogaturus, quandoquidem ille nullos nisi me

præeunte gressus facturum se professus, me quoque cunctante cunctaturus foret, ac res sic in immensum processura. Ratus sum itaque rem ultra præstitutum kalendarum januarii tempus protrahendam non esse, sed ubi quid primum otii nactus essem, totum id post tantas prolationes absolvendum, ac sic votis tot eruditorum hominum, quibus hæ quæstiones non injucundæ fuerunt, faciendum satis.

Interim haud abs re visum est mihi, ut hæc narratio velut præcurreret, si forte solutiones meas ille in se transferre moliretur, omnium oculis expositura veritatem. Id unum hoc scripto perfectum volui, non autem virum ullatenus infamatum, quem equidem omnibus officiis lubentissime colerem, cujus et dignitati honorem habeo quamplurimum. Ideoque nomini ejus peperci; quod ille si modo hæc inventa sibi arrogando revelaverit, sibi tribuat quicquid dedecoris inde contraxerit. Nec dubitet ille futurum ut ejus artes omnium oculis subjiciantur.

Neque vero effugium sibi speret emendicato alicujus amici chirographo, testificantis forsan visum sibi ante kalendas januarii librum ejus manu exaratum. Haud ita omnino ista tractantur : sola editio fidem facit. Non negaverim quin si de calculo quodam tribus versibus comprehenso disceptaretur, plura ac inter se congruentia ejus exemplaria multis ante tradita, nonnihil fidei factura essent. At quum de integro volumine, de centum geometriæ propositionibus earumque calculis agitur, ubi nihil æque facile est ac numeros pro numeris, notas pro notis substituere, ludicrum sane ac lepidum amici afferre chirographum, asserentis hunc librum hac vel ista die sibi inspectum, præsertim si ostendi posset ab ipso nec lectum illum nec excussum. Nemo sibi tantum jure tribuerit, ut ad dubitationes omnes tollendas sola sua auctoritas sufficiat. In geometricis sola demum manifesta creduntur. Sex septemve menses concessi ut sua ederet, nihil edidit. Atque hoc ipsi non minus arduum fuit quam pronum esset veras solutiones jam prolatas interpolare.

Sed hæc cave ne nova illi ac inusitata existimes, nec quos etiam in Robervalliana problemata fecit incursus. Ita enim ubique homo est : adeo ut jam plures annos ambitiose effutiat quadraturam circuli a se inventam, eamque ubi tempus tulerit a se proditum iri, simul cum hyperboles quadratura : i nunc, et homini, quantum de se prædicat, credulus largito.

DIVERSES INVENTIONS DE A. DETTONVILLE, EN GÉOMÉTRIE.

LETTRE DE CARCAVI A DETTONVILLE.

Monsieur,

Personne n'ayant donné les solutions des problèmes que vous avez proposés depuis si longtemps, vous ne pouvez plus refuser de paroître pour les donner vous-même, comme la promesse que vous en avez faite vous y engage. Je sais que ce vous sera de la peine d'écrire tant de

solutions et de méthodes; mais aussi c'est toute celle que vous y aurez : car, pour l'impression, je ne songe pas à vous la proposer; j'ai des personnes qui en auront soin : et il s'offre encore un soulagement à votre travail, en ce qu'il ne sera pas nécessaire de vous étendre sur les problèmes que vous avez proposés comme faciles, tels que sont *le centre de gravité de la ligne courbe* de la roulette et de ses parties, et *la dimension des surfaces des solides;* de sorte que vous n'aurez presque qu'à donner ceux que vous avez proposés comme difficiles, c'est-à-dire, *le centre de gravité des solides et des demi-solides* de la roulette et de ses parties, tant autour de la base qu'autour de l'axe, auxquels vous aviez attaché les prix dans votre premier écrit; et *le centre de gravité des surfaces de ces solides et demi-solides*, desquels vous avez dit, en les proposant dans l'*Histoire de la roulette*, que c'étoient *ceux que vous estimiez difficiles*, *et proprement les seuls que vous proposiez.*

Ce sont donc aussi proprement les seuls que nous vous prions de donner et dont nous avons considéré le succès avec attention. Car, comme ils paroissent si difficiles par la seule énonciation, et que vous qui les connoissiez à fond, vous m'aviez dit plusieurs fois que vous en jugiez la difficulté si grande, je crus qu'elle étoit extrême; et quand je les eus un peu considérés en effet, il me sembla, selon le peu de lumière que j'en ai, que le moins qu'on pouvoit en dire, étoit qu'il n'avoit rien été résolu de plus caché dans toute la géométrie, soit par les anciens, soit par les modernes, et je ne fus pas seul dans ce sentiment.

Ainsi, lorsque le terme du 1er octobre fut arrivé, nous fûmes bien aises de voir que vous le prolongeâtes jusqu'au 1er janvier, parce que nous espérâmes de mieux reconnoître, par un plus long espace de temps, si le jugement que nous en faisions étoit véritable; et le succès confirme bien notre pensée : car une attente de sept ou huit mois sans solution en est une marque considérable, en un temps où se trouvent d'aussi grands géomètres, et en plus grand nombre à la fois qu'on en ait jamais vu, et où l'on a résolu les problèmes les plus difficiles. Car encore que pour la grandeur du génie aucun des anciens n'ait peut-être surpassé Archimède, il est certain néanmoins que, pour la difficulté des problèmes, ceux d'aujourd'hui surpassent de beaucoup les siens, comme il se voit par la comparaison des figures toutes uniformes qu'il a considérées, à celles que l'on considère maintenant, et surtout à la roulette et à ses solides, à l'escalier, aux triangles cylindriques, et aux autres surfaces et solides dont vous avez découvert les propriétés.

Il n'y a donc jamais eu de temps si propre que celui-ci à éprouver la difficulté des propositions de géométrie. Or, nous n'avons vu la solution d'aucune de celles que vous avez proposées comme difficiles. On a bien envoyé celle des problèmes que vous aviez déclarés être plus faciles; savoir : *le centre de gravité de la ligne courbe* et *la dimension des solides*, laquelle M. Wren nous envoya dans ses lettres du 12 octobre; et M. de Fermat aussi dans les siennes, où il donne une méthode fort belle et générale pour la dimension des surfaces rondes; mais pour

ces *centres de gravité des solides et demi-solides*, *et de leurs surfaces*, nous n'en avons point vu de résolution.

Je dirai à tout autre qu'à vous, monsieur, ce que cela a fait juger de la difficulté de vos problèmes, et de ce qu'il falloit être pour les résoudre; et je ne vous parlerai ici que du désir que nous en avons, et de la nécessité où nous sommes d'avoir recours à vous pour des choses que nous ne pouvons avoir que de vous. N'espérez donc pas fuir nos importunités. Je suis résolu de ne jamais cesser de vous en faire, non plus que de rechercher les occasions de vous témoigner combien je suis, etc.

De Paris, ce 10 décembre 1658.

LETTRE DE DETTONVILLE A CARCAVI.

Monsieur,

Puisque je suis enfin obligé de donner moi-même la résolution des problèmes que j'avois proposés, et que la promesse que j'en ai faite m'engage nécessairement à paroître, je veux, en découvrant mon nom, faire connoître en même temps à tout le monde combien celui qui le porte a de respect et d'estime pour votre personne, et de reconnoissance pour toute la peine que vous avez voulu prendre en cette occasion. Je souhaiterois qu'elle pût être, en quelque façon, récompensée par ce discours que je vous donne, où vous verrez non-seulement la résolution de ces problèmes, mais encore les méthodes dont je me suis servi, et la manière par où j'y suis arrivé. C'est ce que vous m'avez témoigné souhaiter principalement, et sur quoi je vous ai souvent ouï plaindre de ce que les anciens n'en ont pas usé de même; ne nous ayant laissé que leurs seules solutions sans nous instruire des voies par lesquelles ils y étoient arrivés, comme s'ils nous eussent envié cette connoissance.

Je ne me contenterai donc pas de vous donner les calculs, desquels voici celui du cas que j'avois proposé : *le centre de gravité du demi-solide de la demi-roulette*, *tournée à l'entour de la base*, *est distant de la base d'une droite qui est au diamètre du cercle générateur*, *comme sept fois le diamètre à six fois la circonférence*, *et est distant de l'axe d'une droite égale au quart de la circonférence du cercle générateur*, *moins seize quinzièmes parties de la distance qui est entre le centre du cercle générateur et le centre de gravité de son demi-cercle.* Mais je vous découvrirai, de plus, ma méthode générale pour les centres de gravité, qui vous plaira d'autant plus, qu'elle est plus universelle; car elle sert également à trouver les centres de gravité des plans, des solides, des surfaces courbes et des lignes courbes. J'ai besoin, pour vous l'expliquer, de cette définition.

S'il y a tant de quantités qu'on voudra A, B, C, D, lesquelles on prenne en cette sorte : premièrement, la somme de toutes A, B, C, D; puis la somme des mêmes, excepté la première, savoir B, C, D; puis la

somme des mêmes excepté les deux premières, savoir, C, D; et ainsi toujours, comme on les voit ici marquées :

J'appelle la somme de ces quantités, prises de cette sorte, *la somme triangulaire de ces mêmes quantités, à commencer par A;* car on pourroit prendre la somme de ces mêmes quantités, à commencer par D, et qui ne seroit pas la même.

A	B	C	D
	B	C	D
		C	D
			D

Cela posé, je vous dirai les pensées qui m'ont mené à cette connoissance. J'ai considéré une balance B, A, C, suspendue au point A, et

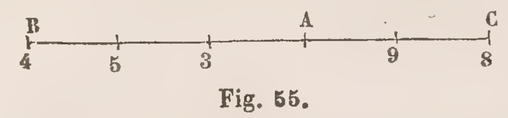


Fig. 55.

ses bras de telle longueur qu'on voudra AB, AC, divisés en parties égales de part et d'autre, avec des poids pendus à chaque point de division; savoir, au bras AB, les poids 3, 5, 4, et au bras AC les poids 9, 8; et supposant la balance être en équilibre en cet état, j'ai tâché de comprendre quel rapport il y avoit entre les poids d'un bras et ceux de l'autre, pour faire cet équilibre : car il est visible que ce n'est pas que la somme des uns soit égale à celle des autres; mais voici le rapport nécessaire pour cet effet.

Pour faire que les poids d'un bras soient en équilibre avec ceux de l'autre, *il faut que la somme triangulaire des uns soit égale à la somme triangulaire des autres*, à commencer toujours du côté du point A. Et la démonstration en sera facile par le moyen de ce petit lemme, dont vous verrez un assez grand usage dans la suite.

Si les quatre quantités A, B, C, D, sont prises en cette sorte : la première une fois, la seconde deux fois, la troisième trois fois, etc., je dis que la somme égale de ces quantités prises de cette sorte, est égale à leur somme triangulaire, en commençant du côté A.

D	C	B	A
4	3	2	1

A	B	C	D
	B	C	D
		C	D
			D

Car en prenant leur somme triangulaire, on ne fait autre chose que les combiner en telle sorte, qu'on prenne A une fois, B deux fois, C trois fois, etc.

Venons maintenant à ce que je propose de la balance. On sait assez en géométrie que les forces des poids sont en raison composée des poids et des bras, et qu'ainsi le poids 4, en la troisième distance, a une force triple; que le poids 5, en la seconde distance, a une force double, etc. Donc la force des poids des bras doit se considérer en prenant celui qui est à la première distance une fois, celui qui est à la seconde deux fois, etc. Ainsi, pour faire qu'ils soient en équilibre de part et d'autre, il faut que la somme des poids d'un bras étant pris de cette sorte : savoir, le premier une fois, le second deux fois, etc., soit égale à la somme des poids de l'autre pris de la même sorte; c'est-à-dire (par le

lemme précédent), que la somme triangulaire des uns soit égale à la somme triangulaire des autres. Ce qu'il falloit démontrer.

Vous voyez, monsieur, que je suis entré dans le style géométrique; et pour le continuer, je ne vous parlerai plus que par propositions, corollaires, avertissemens, etc. Permettez-moi donc de m'expliquer en cette sorte sur ce que je viens de vous dire, afin qu'il ne reste aucune ambiguïté.

Avertissement. — J'entends toujours que les deux extrémités de la balance passent pour des points de division; et ainsi quand je dis que des poids soient pendus à tous les points de division, j'entends qu'il y en ait aussi aux deux extrémités de la balance.

J'entends aussi que le bras AB puisse être égal ou inégal à l'autre bras AC, et que chacune des parties égales du bras AB soit égale à chacune des parties égales du bras AC, et que les parties d'un bras ne diffèrent au plus des parties de l'autre bras que par leur multitude. Or, de cette égalité de chacune des parties, il s'ensuit que le poids 3 étant pris, par exemple, de trois livres, et pesant simplement comme trois livres sur la première distance; le poids 5 étant de cinq livres sur la seconde distance, aura la force de dix livres, c'est-à-dire, double de celle qu'il auroit sur la première distance; et le poids 4 sur la troisième distance, aura la force de douze livres, c'est-à-dire, triple de celle qu'il auroit sur la première distance. De même sur l'autre bras le poids 9, sur la première distance, aura simplement la force de neuf livres, et le poids 8 la force de seize livres; et ainsi à l'infini, les poids seront multipliés autant de fois qu'il y aura de parties égales dans leurs bras, à compter du centre de gravité commun A, auquel la balance est suspendue.

Il faut aussi remarquer que cette propriété de la balance que j'ai donnée, savoir, l'égalité des sommes triangulaires des poids de chaque bras, est générale, encore qu'il y ait des points de division sans poids, au lieu desquels en mettant un zéro, il ne laissera pas d'être employé en prenant les sommes triangulaires, comme on voit en cet exemple :

Soit une balance BAC suspendue au point A, et divisée en parties égales comme il a été dit; et soit sur la première distance du bras AC le poids 9, et sur la seconde le poids 8 : et sur la première distance du bras AB, le poids 4; sur la seconde distance, nul poids ou zéro; sur la troisième le poids 7 :

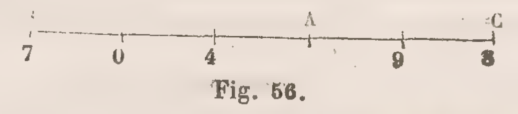


Fig. 56.

Je dis que si la somme triangulaire des poids 4, 0, 7, est égale à la somme triangulaire des poids 9, 8 (à commencer toujours du côté A), la balance sera en équilibre sur le centre A.

La démonstration en est la même que la précédente.

7 0 4	9 8
7 0	8
7	
25	25

De cette propriété je démontre les trois propositions suivantes.

PROPOSITION I. — *Soit* CAB *une balance divisée en tant de parties égales qu'on voudra aux points* C, D, A, E, F, B, *auxquelles soient pendus les poids* 8, 9, 5, 4, 0, 7; *de tous lesquels ensemble le centre de*

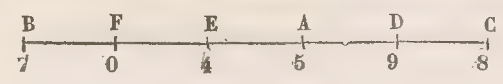


Fig. 57.

gravité commun soit au point A *(l'un de ces points) : je dis que la somme triangulaire de tous ces poids, à commencer du côté qu'on voudra, par exemple, du côté* C, *c'est-à-dire, la somme triangulaire des poids* 8, 9, 5, 4, 0, 7, *est égale à la simple somme de ces poids* 8, 9, 5, 4, 0, 7 *(c'est-à-dire, à la somme de ces poids pris chacun une fois), multipliée autant de fois qu'il y a de points dans le bras* CA *(puisqu'on a commencé par le côté* C), *c'est-à-dire trois fois en cette figure.*

7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	
7	0	4	5		
7	0	4			
7	0				
7					
		99			

7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
		99			

Car la somme triangulaire des poids 4, 0, 7, pendus au bras AB (qui est distinguée du reste par une barre dans la première partie de la figure), est égale à la petite somme triangulaire des poids 9, 8, pendus à l'autre bras AC (qui est aussi distinguée du reste dans l'autre partie de la figure). Et les restes sont les mêmes de part et d'autre.

Avertissement. — Je sais bien que cette manière de démontrer n'est pas commune; mais comme elle est courte, nette et suffisante à ceux qui ont l'art de la démonstration, je la préfère à d'autres plus longues que j'ai en main.

PROPOSITION II. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la simple somme des poids, multipliée autant de fois qu'il y a de points en toute la balance, est à la somme triangulaire de tous les poids, à commencer par le côté qu'on voudra, par exemple, par le côté* C, *comme le nombre des points qui sont dans la balance entière, au nombre des points qui sont dans le bras par où on a commencé à compter; c'est-à-dire, en cet exemple, dans le bras* CA :

7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	
7	0	4	5		
7	0	4			
7	0				
7					
		99			

7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
		198			

Je dis que la somme triangulaire 99 *est à la somme* 198, *des poids multipliée par leur multitude, comme la multitude des points du bras* CA, *savoir*, 3, *à la multitude de tous les points*, *savoir*, 6.

Car dans la figure la somme triangulaire de tous les poids est égale, par la précédente, à la simple somme des poids multipliée par la multitude des points qui sont dans le bras AC, et qui sont ici au-dessus de la barre. Or, la somme des poids multipliée par cette multitude des points du bras AC, est visiblement à la même somme des poids multipliée par la multitude des points de la balance entière, comme une de ces multitudes est à l'autre.

Proposition III. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme triangulaire des poids, à commencer par un des côtés, comme par le côté* C, *est à la somme triangulaire des mêmes poids, à commencer par l'autre côté* B, *comme le nombre des points qui sont dans le bras* AC, *par où l'on a commencé la première fois, au nombre des points qui sont dans le bras* BA, *par où l'on a commencé la seconde fois.*

7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	
7	0	4	5		
7	0	4			
7	0				
7					
		99			

7	0	4	5	9	8
	0	4	5	9	8
		4	5	9	8
			5	9	8
				9	8
					8
		132			

Je dis que la somme triangulaire 99, *en commençant par* 8, *est à l'autre somme triangulaire* 132, *en commençant par* 7, *comme la multitude des points du bras* 8, *savoir*, 3, *à la multitude des points de l'autre bras* 7, *savoir*, 4.

Car chacune de ces sommes triangulaires est, par la précédente, à la simple somme de tous les poids multiplés par leur multitude, comme la multitude des points de chaque bras, à la multitude de tous les points de la balance entière. Donc, etc. Ce qu'il falloit démontrer.

Avertissement. — Comme toutes les choses que je viens de démontrer sur le sujet des poids d'une balance doivent s'appliquer à toutes sortes de grandeurs, c'est-à-dire, aux lignes courbes, aux surfaces planes et courbes, et aux solides, il me semble à propos, pour faciliter cette application, de donner quelques exemples de la manière dont on doit prendre les sommes triangulaires dans ces grandeurs.

Fig. 58.

Soit donc une ligne courbe quelconque CB (fig. 58) divisée comme on voudra en parties égales ou inégales aux points I, G, F : pour prendre la somme triangulaire des portions CI, IG, GF, FB, à commencer du côté de C, il faudra prendre la toute CFB, plus la portion IFB, plus la portion GFB, plus la portion FB.

Car par la définition, la somme triangulaire de toutes les portions CI, IG, GF, FB se trouve en les prenant en cette sorte : premièrement, toutes ensemble, et ensuite toutes ensemble, excepté la première, et puis toutes ensemble, excepté les deux premières, etc., en cette sorte :

CI+IG+GF+FB ou la ligne CFB.
Plus..............IG+GF+FB ou la ligne IFB.
Plus..................GF+FB ou la ligne GFB.
Plus.......................FB ou la ligne FB.

Pareillement la somme triangulaire de ces mêmes portions BF, FG, GI, IC, à commencer par B, se trouvera en prenant la ligne entière BIC, plus la portion FIC, plus la portion GIC, plus la portion IC; ce qui paroît de même en cette sorte :

BF+FG+GI+IC ou la ligne BIC.
Plus...........FG+GI+IC ou la ligne FIC.
Plus.... ....GI+IC ou la ligne GIC.
Plus....................IC ou la ligne IC.

De la même sorte, si le triligne CAB est divisé en tant de parties qu'on voudra, par les droites IK, GH, FE, la somme triangulaire de ses portions CIKA, IGHK, GFEH, FBE, à commencer du côté de CA, se trouvera en prenant le triligne CBA, plus le triligne IBK, plus le triligne GBH, plus le triligne FBE.

Ce qui paroît par la somme de ces portions prises en la manière accoutumée, comme on voit ici :

CIKA+IGHK+GFEH+FBE ou le triligne BCA.
Plus..........IGHK+GFEH+FBE ou l'espace IBK.
Plus. ....GFEH+FBE ou l'espace GBH.
Plus.........................FBE ou l'espace FBE.

On prendra de même sorte la somme triangulaire des portions des surfaces courbes et celle des solides, sans qu'il soit besoin d'en donner davantage d'exemples.

Méthode générale pour les centres de gravité de toutes sortes de lignes, de surfaces et de solides.

Étant proposée une ligne courbe, ou un plan, ou une surface courbe, ou un solide, en trouver le centre de gravité.

Soit entendue une multitude indéfinie de plans parallèles entre eux et également distants (c'est-à-dire que la distance du premier au second soit égale à la distance du second au troisième, et à celle du troisième au quatrième, etc.), lesquels plans coupent toute la grandeur proposée en une multitude indéfinie de parties comprises chacune entre deux quelconques de ces plans voisins.

Maintenant si de tous ces plans on en considère principalement trois, savoir : les deux extrêmes qui comprennent la grandeur proposée, et celui qui passe par le centre de gravité de la grandeur proposée, et qu'on entende qu'une droite quelconque menée perpendiculairement d'un des plans extrêmes à l'autre, rencontre le plan du centre de gra-

vité, lequel la divise en deux portions : cette droite entière, qui mesure la distance d'entre les plans extrêmes, sera appelée *la balance de la grandeur proposée*, et ses deux portions qui mesurent la distance entre le centre de gravité de la grandeur proposée et les plans extrêmes, s'appelleront *les bras de la balance* : et la raison d'un de ces bras à l'autre se trouvera en cette sorte :

Je dis qu'un des bras est à l'autre (c'est-à-dire que la distance entre le centre de gravité de la figure et l'un des plans extrêmes est à la distance entre le même centre de gravité et l'autre plan extrême), comme la somme triangulaire de toutes les portions de la figure, à commencer par le premier plan extrême, à la somme triangulaire de ces mêmes portions, à commencer par l'autre plan extrême.

Avertissement. — Afin qu'il ne reste ici aucune ambiguïté, je m'expliquerai plus au long.

Soit donc proposée, premièrement, une ligne courbe CB (fig. 59), laquelle soit coupée en un nombre indéfini de parties aux points C, I, G, F, B, par une multitude indéfinie de plans parallèles et également distans, ou, si l'on veut, par une multitude indéfinie de droites parallèles et également distantes CA, IK, GH, FE, BO (car les droites suffisent ici, et les plans n'ont été mis dans l'énonciation générale que parce que les droites ne suffiroient pas en tous les cas). Soit maintenant menée AB où l'on voudra, perpendiculaire à toutes les parallèles, laquelle coupe les extrêmes aux points B, A, et celle qui passe par le centre de gravité de la ligne proposée au point T : cette droite BA sera appelée *la balance*, et les portions TA, TB, seront appelées *les bras de la balance*.

Je dis que le bras TB sera au bras TA, comme la somme triangulaire des portions de la ligne, savoir : des portions BF, FG, GI, IC, à commencer du côté de B, à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de A.

Fig. 59.

Soit maintenant la grandeur proposée un plan, comme le triligne CBA, coupé par les mêmes parallèles CA, IK, GH, FE, BO, et que la même perpendiculaire BA le coupe comme il a été dit, et rencontre celle qui passe par le centre de gravité du plan proposé CBA au point T : je dis que le bras TB sera au bras TA, comme la somme triangulaire des portions du triligne, BFE, EFGH, GIKH, CIKA, à commencer du côté de BO, à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de AC.

Soit maintenant la grandeur proposée une surface courbe CYZBFC, coupée par les mêmes plans parallèles ACY, KIM, HGN EFZ, OBX, qui coupent la surface donnée et y produisent, par leurs communes

sections, les lignes CY, IM, GN, FZ, etc.; et que la balance BA mesure toujours la distance entre les plans extrêmes, et coupe celui qui passe par le centre de gravité de cette surface courbe au point T : je dis que le bras TB sera au bras TA, comme la somme triangulaire des portions de la surface, savoir : ZFB, FZNG, NGIM, MICY, à commencer du côté de B, c'est-à-dire la somme des surfaces BCY, ZFCY, NGCY, MICY, à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de AC, c'est-à-dire des surfaces CYB, IMB, GNB, FZB.

Enfin, si la grandeur proposée est un solide YCFBAC, coupé par les mêmes plans parallèles, et que la balance BA mesure de même la distance entre les plans extrêmes, et coupe celui qui passe par le centre de gravité du solide au point T : le bras TB sera toujours au bras TA, comme la somme triangulaire des portions du solide, à commencer par B, à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer par C.

Démonstration de cette méthode.—La démonstration en est facile, puisque ce n'est que la même chose que ce que j'ai donné de la balance.

Car soit considérée la droite BA comme une balance divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points A, K, H, E, B, auxquels pendent pour poids les portions de la grandeur proposée, et à l'un desquels se rencontre le point T, qui sera le centre de gravité de la balance, comme cela est visible par la doctrine des indivisibles, laquelle ne peut être rejetée par ceux qui prétendent avoir rang entre les géomètres.

Donc, par la troisième proposition de la balance, la somme triangulaire des poids (ou des portions de la figure), à commencer du côté B, est à la somme triangulaire des mêmes poids, à commencer du côté AC, comme le nombre des points (ou des parties) du bras BT, au nombre des points (ou des parties) du bras AT, c'est-à-dire comme BT à TA. Ce qu'il falloit démontrer.

Avertissement. — Je sais bien que ces portions de la grandeur proposée ne pendent pas précisément aux points de division de la balance BA; mais je n'ai pas laissé de le dire, parce que c'est la même chose. Car en divisant chacune de ces parties égales de la balance BA par la moitié, ces nouvelles divisions donneront une nouvelle balance qui ne différera de la première que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée (puisque la multitude des parties est indéfinie), et le centre de gravité de la balance se trouvera encore à une de ces nouvelles divisions, ou n'en sera éloigné que d'une distance moindre qu'aucune donnée, ce qui ne changera point les raisons : et les portions de la grandeur proposée pendront précisément aux points de ces nouvelles divisions, en considérant au lieu des portions de la grandeur proposée, qui seront peut-être irrégulières, les portions régulières qu'on leur substitue en géométrie, et qui ne changent point les raisons; c'est-à-dire, en substituant aux portions de la ligne courbe leurs cordes, aux portions du triligne les rectangles compris de chaque ordonnée et d'une des petites portions égales de l'axe; et de même aux solides : ce qui ne change rien, puisque la somme des portions substituées ne diffère de la somme des véritables, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

Donc on conclura nécessairement dans cette nouvelle balance la pro-

portion dont il s'agit, et par conséquent elle se conclura aussi dans l'autre.

J'ai voulu faire cet avertissement, pour montrer que tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles, se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens; et qu'ainsi l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler : ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par là. Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté, dans la suite, d'user de ce langage des indivisibles, *la somme des lignes*, ou *la somme des plans;* et ainsi quand je considérerai, par exemple, le diamètre d'un demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z (fig. 60), d'où soient menées les ordonnées ZM, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, *la somme des ordonnées*, qui semble ne pas être géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie, que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

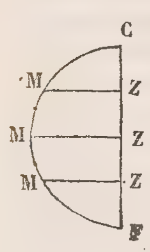


Fig. 60.

Ce n'est pas que ces mêmes lignes ZM ne puissent être multipliées par d'autres portions égales d'une autre ligne quelconque qui soit, par exemple, double de ce diamètre, comme en la figure 61; et alors la somme de ces lignes ZM formera un espace double du demi-cercle, savoir, une demi-ellipse : et ainsi la somme des mêmes lignes ZM formera un espace qui sera plus ou moins grand, selon la grandeur de la ligne droite, par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées, c'est-à-dire, selon la distance qu'elles garderont entre elles. De sorte que quand on parle de *la somme d'une multitude indéfinie de lignes*, on a toujours égard à une certaine droite, par les portions égales et indéfinies de laquelle elles soient multipliées. Mais quand on n'exprime point cette droite (par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées), il faut sous-entendre que c'est celle des divisions de laquelle elles sont nées, comme en l'exemple de la figure 60, où les ordonnées ZM du demi-cercle étant nées des divisions égales du diamètre, lorsqu'on dit simplement *la somme des lignes* ZM, sans exprimer quelle est la droite par les portions de laquelle on veut les multiplier, on doit entendre que c'est le diamètre même, parce que c'est le naturel : et si on vouloit les multiplier par les portions d'une autre ligne, il faudroit alors l'exprimer.

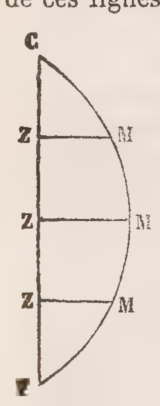


Fig. 61.

Il faut entendre la même chose quand toutes les lignes seroient courbes, tant celles dont on considère la somme, que celle par les portions de

laquelle on les multiplie : ou quand les unes sont droites et les autres courbes, comme, par exemple, en la figure 60, si l'on dit simplement ainsi, *la somme de tous les arcs* CM, compris entre le point C et chacune des ordonnées, on doit entendre la somme des rectangles compris de chacun de ces arcs CM étendus en ligne droite, et de chacune des petites portions égales du diamètre ZZ, ZZ, etc.

Ainsi en la figure 62, où l'arc de 90 degrés BC est divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points D, d'où sont menés les sinus droits DE, si on dit simplement ainsi, *la somme des sinus* DE, on entendra par là la somme des rectangles compris de chaque sinus DE et de chacun des petits arcs égaux DD considérés comme étendus en ligne droite; parce que ces sinus sont nés des divisions égales de l'arc : et si on vouloit les multiplier par les portions égales d'une autre ligne, il faudroit l'exprimer, et dire, *la somme des sinus multipliés par les portions égales d'une telle ligne.*

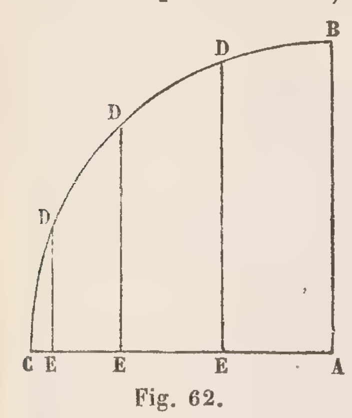


Fig. 62.

Il faut entendre la même chose de la somme des carrés de ces lignes et de leurs cubes, etc. Ainsi, si on dit dans la même figure 62, *la somme des carrés des sinus* DE, il faut entendre la somme des solides faits du carré de chaque sinus multiplié par l'un des petits arcs égaux DD, et si dans la figure 60 on dit, *la somme des carrés des arcs* CM, il faut entendre la somme des solides faits du carré de chaque arc CM (étendu en ligne droite) multiplié par chacune des petites portions égales ZZ; et ainsi en toutes sortes d'exemples.

En voilà certainement plus qu'il n'étoit nécessaire pour faire entendre que le sens de ces sortes d'expressions, *la somme des lignes*, *la somme des plans*, etc., n'a rien que de très-conforme à la pure géométrie.

La même méthode générale pour les centres de gravivé, énoncée autrement.

Une grandeur quelconque étant proposée, comme il a été dit, et le même ordre de plans qui la coupent : je dis que la somme de toutes les portions de cette grandeur comprises entre un des plans extrêmes et un chacun de tous les plans, est à la grandeur entière prise autant de fois, c'est-à-dire, multipliée par sa balance, comme le bras sur l'autre plan extrême, c'est-à-dire, comme la distance entre son centre de gravité et cet autre plan extrême, est à la balance entière.

Autrement encore :

Je dis que la somme de toutes les portions de la grandeur comprises entre un des plans extrêmes et un chacun de tous les plans, est égale à la grandeur entière multipliée par son bras sur l'autre plan extrême.

Soit proposée, par exemple, la ligne CFB (fig. 63) : je dis que la somme des portions CFB, IFB, GFB, FB, est égale à la ligne entière CFB multipliée par le bras TA.

Car la somme de ces lignes n'est autre chose que la somme triangulaire des portions CI, IG, GF, FB, à commencer par C : donc la droite BA est une balance divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points E, H, etc., auxquels points de division (comme il a déjà été dit) pendent pour poids les petites portions CI, IG, GF, FB, et à l'un desquels points de division se rencontre le centre de gravité T. Donc, par la seconde proposition de la balance, la somme triangulaire de ces portions à commencer par C, c'est-à-dire, la simple somme des portions CFB, IFB, CFB, FB, est égale à la simple somme des petites portions CI. IG, GF, FB, c'est-à-dire, la ligne CFB, prise autant de fois qu'il y a de points (ou de parties) dans le bras TA, c'est-à-dire, multipliée par le bras TA. Ce qu'il falloit démontrer.

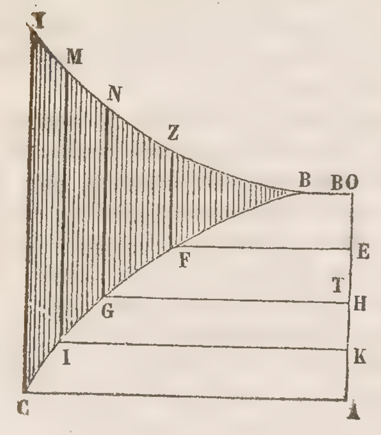


Fig. 63.

On démontrera de même, si la grandeur proposée est le triligne ABC, que la somme des espaces BCA, EFCA, HGCA, KICA, est égale à l'espace BCA, multiplié par le bras TB. Et de même pour les solides, etc.

Avertissement. — Quand j'ai parlé de la somme des lignes CFB, IFB, GFB, FB, on n'a dû entendre autre chose sinon la somme des rectangles compris de chacune de ces lignes, et de chacune des petites portions égales BE, EH, etc. (c'est-à-dire, avec chacune des distances égales d'entre les plans voisins); et qu'ainsi cette multitude indéfinie de petits rectangles de même hauteur forment un plan. C'est ce que j'ai déjà assez dit dans les avertissemens précédens.

De même, quand j'ai parlé de la somme des espaces BCA, EFCA, HGCA, KICA, on a dû entendre que chacun de ces espaces fût multiplié par chacune de ces petites distances égales d'entre les plans voisins BE, EH, etc., et formassent ainsi une multitude indéfinie de petits solides prismatiques, tous de même hauteur, la somme desquels formera un solide, qui est celui que l'on considère quand on a parlé de la somme de ces plans.

On doit entendre la même chose par la somme des solides; car il faut entendre de même qu'ils soient tous multipliés par ces mêmes portions égales, ou au moins (si l'on ne veut pas admettre une quatrième dimension) qu'on prenne autant de lignes droites qui soient entre elles en même raison que ces solides, lesquelles étant multipliées chacune par chacune de ces parties égales BE, EH, etc., elles formeront un plan qui servira de même à trouver la raison cherchée. Ce qu'il ne sera plus nécessaire de redire.

Corollaire I. — De cette méthode s'ensuit ce corollaire : *Si la grandeur est donnée et la somme de toutes ses portions comprises entre un des plans extrêmes, et chacun des autres plans, et que la balance soit aussi donnée : je dis que les deux bras seront aussi donnés.*

Soit proposée, par exemple, la ligne courbe de la demi-roulette AYC (fig. 64), laquelle soit supposée être donnée de grandeur, et qu'on sache qu'elle est double de l'axe CF qui soit aussi donné. Soit aussi supposé qu'ayant mené les ordonnées ZY, coupant l'axe en Z, en un nombre indéfini de parties égales, et la roulette aux points Y, la somme de toutes les portions CY de la courbe soit aussi donnée : je dis que la distance entre le centre de gravité de cette courbe AYC, et la droite AF, sera donnée.

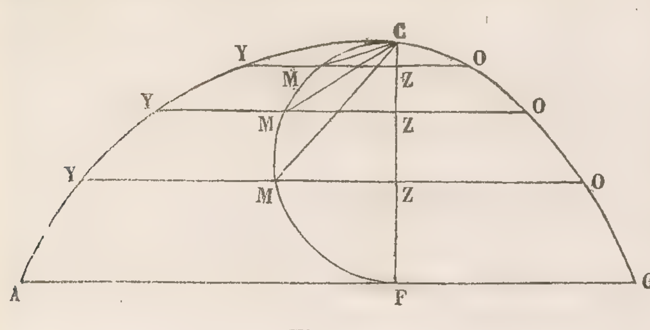


Fig. 64.

Car la somme de toutes les courbes CY est donnée par l'hypothèse; et on sait en effet d'ailleurs que cette somme est double de la somme des droites CM, menées de C aux points où les ordonnées coupent la circonférence, ou de la somme des droites ZO (qui soient les ordonnées de la parabole COG, dont CF soit l'axe, et dont le côté droit soit égal à la même CF; car alors chaque CM carré, ou FC en CZ, c'est-à-dire, le rectangle FCZ, sera égal à ZO carré) : et ainsi la somme des lignes courbes CY est double de l'espace de la parabole CFG, lequel étant les deux tiers de CF carré, la somme des courbes CY sera égale aux quatre tiers du carré de CF.

Mais, par la précédente, la même somme est égale au rectangle compris de la courbe CA (ou de deux fois la droite CF), et du bras de la courbe sur AF. Donc quatre tiers du carré de CF sont égaux à deux fois CF, multipliée par le bras cherché sur AF; donc ce bras est donné, et égal aux deux tiers de CF, puisque les deux tiers de CF, multipliés par deux fois CF, sont égaux à quatre tiers du carré de CF.

Corollaire II. — La converse de ce corollaire sera aussi véritable, savoir : *Si une grandeur est donnée et les bras de la balance aussi : la somme de ses portions comprises entre un des plans extrêmes, et chacun des autres, sera donnée.*

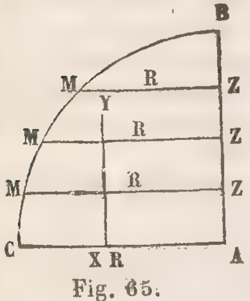


Fig. 65.

Soit donné, par exemple, l'arc de cercle de 90 degrés BMC, (fig. 65), duquel je suppose que le centre de gravité étant Y, son bras YX soit aussi donné : je dis que la somme des arcs BM, compris entre le point B et chacune des ordonnées menées des divisions égales et indéfinies du rayon BA, est aussi donnée.

Car la somme de ces arcs sera égale au rectangle, compris de l'arc entier BC et de YX; lequel rectangle étant égal, comme on le connoît

d'ailleurs, au carré du rayon AB, il s'ensuit aussi que la somme des arcs BM est égale au même carré du rayon AB.

Avertissement. — J'ai voulu donner ces exemples de l'usage de cette méthode, tant pour connoître les bras de la balance par la connoissance de la somme de ces portions, que pour connoître la somme de ces portions par la connoissance des bras. J'en donnerois bien ici d'autres exemples plus considérables; mais on les verra dans la suite, et je ne veux donner ici que les propositions qui servent comme de lemmes au reste du discours.

Définition. — S'il y a tant de quantités qu'on voudra A, B, C, lesquelles on prenne en cette sorte : premièrement, la somme triangulaire de toutes, savoir, ABC, BC, C; ensuite la somme triangulaire de toutes, excepté la première, savoir, BC, C; puis la somme triangulaire de toutes, excepté les deux premières; savoir, C, etc.

A	B	C
	B	C
		C
	B	C
		C
		C
1	3	6

J'appelle la somme de ces quantités prises de cette sorte, *la somme pyramidale* de ces mêmes quantités.

En voici la figure, où l'on voit que *la somme pyramidale n'est autre chose que la somme des sommes triangulaires* qui sont ici séparées par des barres.

Or, il est à remarquer que la nature de cette sorte de combinaison est telle, que, si on prend deux fois cette même somme pyramidale, comme on voit ici, et qu'on en ôte la première somme triangulaire qui est séparée du reste par une double barre, il arrivera dans ce reste que la première quantité A s'y trouvera une fois; la seconde B, quatre fois; la troisième C neuf fois; et ainsi toujours selon la suite des nombres carrés.

A	B	C
	B	C
		C
	B	C
		C
		C
A	B	C
	B	C
		C
	B	C
		C
		C
1	4	9

Et cela est aisé à démontrer par la nature des combinaisons qui forment ces sommes triangulaires et pyramidales, qui est telle :

Dans les sommes triangulaires, la première grandeur se prend une fois, la seconde deux fois, la troisième trois fois, etc., selon l'ordre des nombres naturels. Et dans les sommes pyramidales, la première grandeur se prend une fois, la seconde trois fois, la troisième six fois, etc., selon l'ordre des nombres triangulaires. Or tout nombre triangulaire, pris deux fois et diminué de son exposant, est le même que le carré de son exposant; comme, par exemple, le troisième nombre triangulaire 6 étant doublé, est 12, qui diminué de l'exposant 3, il reste 9, qui est le carré de 3.

Cela est aisé par Maurolic[1]; et de là paroît la vérité de ma proposition.

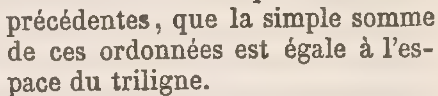
D'où il s'ensuit que s'il y a tant de quantités qu'on voudra A, B, C, dont la première soit multipliée par le carré de 1, la seconde par le

1. Mathématicien italien.

carré de 2, la troisième par le carré de 3, etc.: leur somme prise de cette sorte, sera égale à deux fois leur somme pyramidale, moins leur somme triangulaire.

Avertissement. — On verra dans la suite l'usage de cette propriété, dans l'application qui s'en fera aux lignes droites ou courbes; et, pour faciliter l'intelligence de cette application, j'en donnerai ici quelques exemples.

Soit donc dans la figure 66, par exemple, l'axe BA du triligne BAC, divisé en un nombre indéfini de parties égales, aux points K, H, E, d'où soient menées les ordonnées : on est assez averti par les choses précédentes, que la simple somme de ces ordonnées est égale à l'espace du triligne.



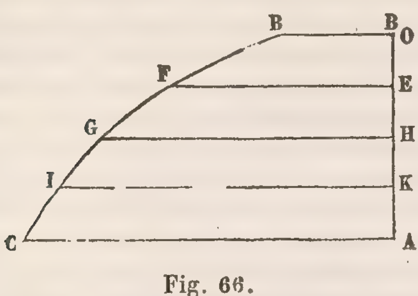


Fig. 66.

Je dis maintenant que la somme triangulaire de ces ordonnées IK, GH, FE, etc., à commencer du côté de la base CA, est la même chose que la somme des rectangles compris de chaque ordonnée, et de sa distance de la base; c'est-à-dire, la somme des rectangles IK en KA, GH en HA, FE en EA.

Ce qui est bien aisé à démontrer en cette sorte. Puisque les distances AK, KH, HE, sont égales, et qu'ainsi en prenant AK pour 1, AH sera 2, AE, 3, etc.: il s'ensuit que la somme des rectangles IK en KA, GH en HA, FE en EA, etc., n'est autre chose que IK multiplié par 1, GH par 2, FE par 3, etc.; ce qui n'est que la même chose que la somme triangulaire de ces droites IK, GH, FE, comme je l'ai montré dans le commencement.

Je dis de même que deux fois la somme pyramidale de ces mêmes ordonnées, à commencer du côté de la base CA, est égale à la somme des solides faits de ces mêmes ordonnées multipliées chacune par le carré de sa distance de la base; c'est-à-dire, IK en KA carré + GH en HA carré, etc.

Car ces carrés étant 1, 4, 9, etc., il s'ensuit que la somme des ordonnées multipliées chacune par chacun de ces carrés, est la même chose que leur somme pyramidale prise deux fois, moins leur somme triangulaire prise une fois. Or cette somme triangulaire n'est qu'un indivisible à l'égard des sommes pyramidales, puisqu'il y a une dimension de moins, et que c'est la même chose qu'un point à l'égard d'une ligne, ou qu'une ligne à l'égard d'un plan, ou qu'un plan à l'égard d'un solide, ou enfin qu'un fini à l'égard de l'infini; ce qui ne change point l'égalité.

Car il faut remarquer que, comme la simple somme de ces lignes fait un plan, ainsi leur somme triangulaire fait un solide, qui est composé d'autant de plans qu'il y a de divisions dans l'axe; lesquels plans sont formés chacun par les simples sommes particulières des ordonnées, dont la somme totale fait la somme triangulaire. En effet, la somme triangulaire de ces ordonnées se prend ainsi : premièrement, en les prenant toutes ensemble CA, IK, GH, FE, ce qui fait un plan égal au tri-

ligne; ensuite en les prenant toutes, excepté la première, c'est-à-dire, IK, GH, FE, ce qui fait un autre plan égal au triligne BIK; et ensuite GH, FE, ce qui fait un autre plan égal au triligne BGH, etc. De sorte qu'il y a autant de plans que de divisions, chacun desquels plans étant multiplié par les petites portions de l'axe, forment autant de petits solides prismatiques d'égale hauteur, tous lesquels ensemble font un solide, comme je l'ai dit ailleurs.

De la même sorte, la somme pyramidale des mêmes ordonnées fait un plan plan, composé d'autant de solides qu'il y a de portions dans l'axe, lesquels solides sont formés chacun par les sommes triangulaires particulières, dont la somme totale fait la somme pyramidale; car leur somme pyramidale se prend ainsi : premièrement, en prenant la somme triangulaire de toutes, qui fait un solide, comme nous venons de dire; et ensuite la somme triangulaire de toutes, excepté la première, qui fait un autre solide, etc. Et ainsi, autant qu'il y aura de divisions, il y aura aussi de solides, lesquels, étant multipliés chacun par une des petites divisions de l'axe, formeront autant de petits plans plans de même hauteur, qui tous ensemble font le plan plan dont il s'agit.

Et l'on ne doit pas être blessé de cette quatrième dimension, puisque, comme je l'ai dit ailleurs, en prenant des plans au lieu des solides, ou même de simples droites, qui soient entre elles comme les sommes triangulaires particulières qui font toutes ensemble la somme pyramidale, la somme de ces droites fera un plan qui tiendra lieu de ce plan plan.

Il faut entendre la même chose des lignes courbes BF, BFG, BFI, BFC, et de leurs sommes triangulaires et pyramidales; car tout cela est général pour toutes sortes de grandeurs, chacune selon sa nature.

Je viens maintenant aux problèmes proposés publiquement touchant la roulette, desquels voici ceux que je proposai dans le premier écrit au mois de juin. Étant donnée (fig. 67) une portion quelconque CZY, de la demi-roulette, retranchée par une quelconque ordonnée à l'axe; trouver :

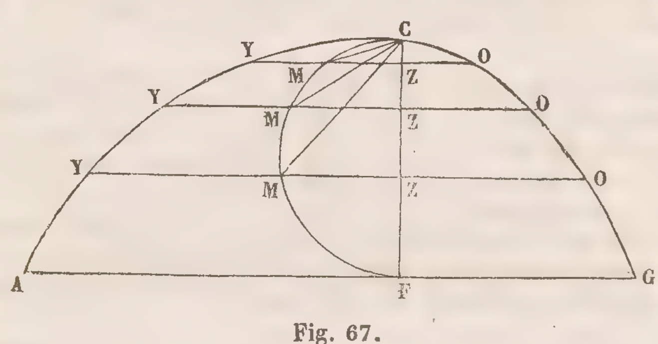


Fig. 67.

1° La dimension et le centre de gravité de l'espace CZY.

2° La dimension et le centre de gravité de son demi-solide autour de la base ZY, c'est-à-dire, du solide fait par le triligne CZY, tourné autour de la base ZY d'un demi-tour seulement.

3° La dimension et le centre de gravité de son demi-solide autour de l'axe CZ.

Et ceux que je proposai au commencement d'octobre dans l'*Histoire de la roulette* sont ceux-ci ·

1° Trouver le centre de gravité de la ligne courbe CY.

2° Trouver la dimension et le centre de gravité de la surface de son demi-solide autour de la base.

3° Trouver la dimension et le centre de gravité de la surface de son demi-solide autour de l'axe.

Pour résoudre ces problèmes; la première chose que je fais, est de substituer à ces demi-solides des onglets qui y ont un grand rapport, et dont voici la définition.

Définition. — Soit un triligne rectangle ABC (fig. 68), composé de deux droites AB, AC, dont celle qu'on voudra, comme AB, sera l'axe, et l'autre la base; faisant angle droit, et de la courbe quelconque BC.

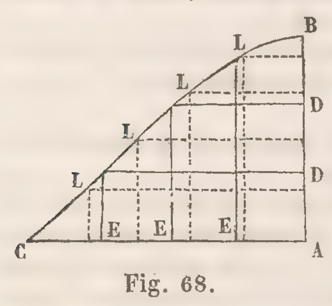


Fig. 68.

Soient divisées en un nombre indéfini de parties égales, tant AB aux points D, que AC aux points E, et encore la courbe même BC aux points L; et que chacune des parties de AB soit égale à chacune des parties de AC, et encore à chacune des parties de la courbe BC (car il ne faut pas craindre l'incommensurabilité, puisqu'en ôtant d'une de deux grandeurs incommensurables une quantité moindre qu'aucune donnée, on les rend commensurables). Soient maintenant, des points D, menées des perpendiculaires à l'axe jusqu'à la courbe, elles s'appelleront *les ordonnées à l'axe*. Soient menées, des points E, des perpendiculaires à la base jusqu'à la courbe, elles s'appelleront *les ordonnées à la base*. Soient encore menées, des points L, des perpendiculaires à la base, elles s'appelleront *les sinus sur la base*. Soient enfin menées, des mêmes points L, des perpendiculaires à l'axe, elles s'appelleront *les sinus sur l'axe*.

Avertissement. — On suppose toujours ici que le triligne est une figure plane, et que la courbe est de telle sorte, que tant les sinus que les ordonnées ne la rencontrent qu'en un point. Et les portions de l'axe de la base et de la courbe sont toutes égales, tant entre elles que les unes aux autres.

Il faut aussi remarquer que les sinus diffèrent des ordonnées, en ce que les sinus naissent des divisions égales de la courbe, et les ordonnées des divisions égales de l'axe ou de la base.

Soient maintenant entendues des perpendiculaires, élevées sur le plan de tous les points du triligne, qui forment un solide prismatique infini, qui aura le triligne pour base, lequel soit coupé par un plan incliné passant par l'axe ou par la base du triligne : la portion de ce solide, retranchée par le plan, s'appellera *onglet*.

Que si l'on fait au-dessous du triligne ce que je viens de figurer au-dessus; c'est-à-dire, que les perpendiculaires de tous les points du triligne soient prolongées de l'autre part, et coupées par un autre plan également incliné de l'autre part, il se formera au-dessous du plan du triligne un autre onglet, égal et semblable à celui du dessus : et tous deux ensemble s'appelleront *le double onglet*.

Or il est visible que tant l'onglet que le double onglet sera compris de trois plans et d'une portion de la surface *cylindracée*, laquelle portion s'appellera *la surface courbe de l'onglet* ou du *double onglet.*

Et l'onglet ou le double onglet qui seront retranchés par des plans inclinés, passant par la base du triligne, s'appelleront *l'onglet*, ou *le double onglet de la base.*

Et l'onglet ou le double onglet qui seront retranchés par des plans passant par l'axe, s'appelleront *l'onglet*, ou *le double onglet de l'axe.*

J'avertis que je suppose toujours ici que le plan qui retranche les onglets est incliné à celui du triligne de 45 degrés.

Je donnerai maintenant ici les rapports qu'il y a entre le double onglet de l'axe, par exemple, et le demi-solide du triligne tourné à l'entour de l'axe.

Je dis donc, premièrement, que le double onglet est au demi-solide, comme le rayon au quart de la circonférence.

Car soit entendu le triligne CFA (fig. 69), tourné à l'entour de l'axe CF; et que le solide qui en sera formé soit coupé par un plan passant par l'axe CF, perpendiculaire au plan du triligne qui coupe le solide en deux demi-solides égaux, dont je considérerai celui qui est du côté du triligne. Maintenant soit divisé l'axe en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées ZY. Soit aussi un demi-cercle quelconque RYS (fig. 70), et le rayon ZY, perpendiculaire au diamètre RS. Soit aussi la touchante menée du point Y, dans laquelle soient prises YM, YN, égales chacune au rayon. Donc chacune des droites ZM, ZN, fera avec YZ un angle de 45 degrés (qui est l'angle d'inclinaison des plans qui engendrent le double onglet sur le plan du triligne) et l'angle, entier MZN sera droit.

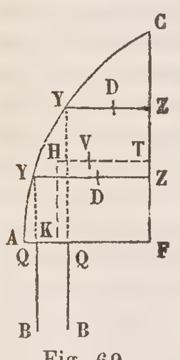


Fig. 69.

Maintenant (fig. 70) soient entendus des plans élevés sur chacune des ordonnées ZY, perpendiculairement au plan du triligne, qui coupent, tant le double onglet que le demi-solide. Il est visible que la figure entière MYNZRS représentera la section que chacun de ces plans perpendiculaires, passant par les ordonnées ZY, formeront, tant dans le double onglet que dans le demi-solide autour de l'axe; c'est-à-dire que les sections que chacun de ces plans formera dans le double onglet, seront des triangles rectangles et isocèles, dont les angles droits seront aux points Z (et qui seront semblables au triangle rectangle MZN), et la base de chacun de ces triangles sera double de chaque ordonnée ZY, de même que MN est double de ZY. Et le contenu de chaque triangle sera égal au carré de son ordonnée; c'est-à-dire de l'ordonnée sur laquelle il est formé, de même que le triangle MZN est égal au carré de ZY.

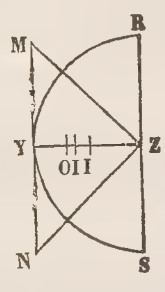


Fig. 70.

Il est aussi visible que les sections que ces mêmes plans formeront dans le demi-solide, seront des demi-cercles, qui auront pour rayons les mêmes ordonnées ZY, et qui seront semblables au demi-cercle RYS; et lesquels auront partout aux triangles du double onglet, chacun au sien, la même raison que le demi-cercle RYS au triangle MZN.

D'où il paroît que les sections formées par les plans sur les droites ZY, étant toutes semblables, tant entre elles qu'à la figure MNZRS, il arrivera que tous les triangles ensemble, formés dans le double onglet, seront à tous les demi-cercles ensemble formés dans le demi-solide, comme le triangle MZN au demi-cercle RYS, ou comme le rayon au quart de la circonférence, et qu'ainsi le double onglet sera au demi-solide, en la même raison du rayon au quart de la circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis, 2°, *que les centres de gravité, tant du double onglet (lequel soit au point* H), *que du demi-solide (lequel soit au point* V), *seront sur le plan du triligne.*

Cela est visible, puisque le plan du triligne sépare en deux parties égales et toutes pareilles, tant le double onglet, que le demi-solide.

Je dis, 3°, *que ces deux centres de gravité du double onglet et du demi-solide, et même celui du solide entier à l'entour de l'axe, sont tous également distans de la base.*

Car tous les triangles qui forment l'onglet sont entre eux en même raison que les demi-cercles qui forment le demi-solide; et partant, en considérant CF comme une balance, à laquelle soient pendus les triangles de l'onglet, ses deux bras seront en même raison que les deux bras de la même balance, en considérant qu'au lieu des triangles de l'onglet, on y pende les demi-cercles du demi-solide, ou même les cercles entiers qui formeroient le solide entier à l'entour de l'axe; et par conséquent les centres de gravité du solide entier, et du demi-solide, et du double onglet, sont tous également distans de la base AF.

Je dis, 4°, *que le bras* HT *(ou la distance entre le centre de gravité du double onglet et l'axe* CF) *est au bras* VT *(ou à la distance entre le centre de gravité du demi-solide et le même axe* CF), *comme le quart de la circonférence d'un cercle à son rayon.*

Car en entendant, comme tantôt, des plans élevés perpendiculairement sur chaque ordonnée, ils formeront des sections dans l'onglet et dans le demi-solide, semblables au triangle MZN, et au demi-cercle RYS; et il arrivera que le centre de gravité de chaque triangle du double onglet divisera toujours l'ordonnée en même raison; savoir, aux deux tiers depuis Z : et qu'aussi le centre de gravité de chaque demi-cercle divisera toujours l'ordonnée en même raison; savoir, en la raison de ZP à ZY (fig. 70), où le point P est le centre de gravité du demi-cercle RYS. Donc puisque toutes les ordonnées ZY sont divisées aux deux tiers, par les centres de gravité des triangles qui sont les portions du double onglet, de même que ZY est divisée aux deux tiers au point O, et que les mêmes ordonnées ZY sont aussi toutes divisées par les centres de gravité des demi-cercles, qui sont les portions du demi-solide, en même raison que ZY est divisée au point P : il s'ensuit que le bras de chaque triangle est au bras de chaque demi-cercle, toujours en la même

raison que OZ, qui est le bras du triangle MZN sur RS, à PZ, qui est aussi le bras du demi-cercle RYS, à l'égard de RS. Et par conséquent le bras HT de tous les triangles ensemble, c'est-à-dire du double onglet, est au bras VT de tous les demi-cercles ensemble, c'est-à-dire du demi-solide, en la même raison que OZ à ZP, laquelle on sait être la même que le quart de la circonférence au rayon.

Je dis, 5°, *que la surface courbe du double onglet est à la surface du demi-solide, comme le rayon au quart de la demi-circonférence.*

Car, soit maintenant la courbe AYC, divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points Y; d'où soient menées les perpendiculaires ou sinus YZ; et soient entendus de même des plans élevés perpendiculairement au triligne, passant par chacun des sinus ZY, lesquels plans coupent, tant la surface courbe du double onglet, que celle du demi-solide : il est visible que les sections que ces plans formeront dans la surface courbe du double onglet, seront des lignes droites, doubles des sinus ZY, comme MN est double de YZ; et que les sections que ces mêmes plans formeront dans la surface du demi-solide seront des demi-circonférences, lesquelles seront partout aux droites formées dans la surface du double onglet, chacune à la sienne, comme la demi-circonférence RYS, à la droite MN; et par conséquent que toutes les droites ensemble de la surface courbe du double onglet, seront à toutes les demi-circonférences ensemble, en la même raison que la droite MN, à la demi-circonférence RYS, ou comme le rayon au quart de la circonférence; mais la somme de toutes les droites de la surface de l'onglet (c'est-à-dire, la somme des rectangles compris de chacune de ces droites, et des portions égales de la courbe AYC, des divisions de laquelle elles sont menées) compose la surface même; et la somme de ces demi-circonférences de la surface du demi-solide, composent cette surface même, comme d'autres l'ont démontré, et entre autres le P. Tacquet.

Donc la surface courbe du double onglet est à la surface du demi-solide, comme le rayon au quart de la circonférence.

Je dis, 6°, *que le centre de gravité de la surface courbe du double onglet, et le centre de gravité de la surface du demi-solide, et même celui de la surface du solide entier autour de l'axe, sont tous sur le plan du triligne, et tous également distans de la base* AF.

Ce qui se démontrera de même qu'on a vu pour les centres de gravité de leurs solides.

Je dis, 7° *que le point* H *étant maintenant le centre de gravité de la surface courbe du double onglet, et le point* V *étant le centre de gravité de la surface du demi-solide, le bras* HT *sera au bras* VT, *comme le quart de la circonférence au rayon.*

Car en prenant (fig. 71) le point I, qui soit le centre de gravité de la demi-circonférence, on démontrera de même (fig. 72) que les sinus YZ seront tous divisés par les centres de gravité de chaque demi-circonférence, en même raison que ZY de la figure 71 l'est au point I. Et il est visible que, dans la figure 72, les points Y sont les centres de gravité de chacune des droites du double onglet, et qu'ainsi les sinus YZ seront leurs bras. Donc les bras des droites du double onglet sont aux bras des

demi-circonférences du demi-solide, chacune à la sienne, toujours en la même raison de YZ à ZI (fig. 71). Donc le bras de toutes les droites ensemble (ou de la surface courbe du double onglet) sera au bras de toutes les demi-circonférences ensemble (ou de la surface du demi-solide), en la même raison que YZ à ZI, laquelle on sait d'ailleurs être la même que du quart de la circonférence au rayon.

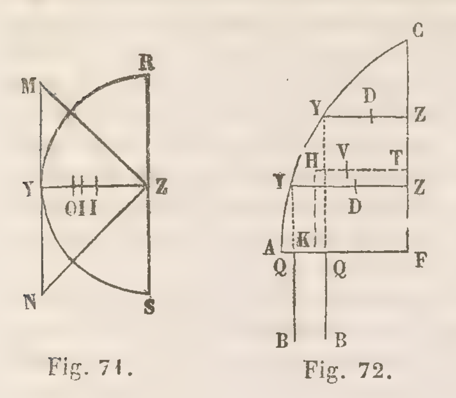


Fig. 71. Fig. 72.

Avertissement.— Puisque celle qu'on veut des deux droites d'un triligne est prise pour l'axe et l'autre pour la base, tout ce qui a été dit de l'onglet de l'axe à l'égard du solide autour de l'axe, sera de même véritable de l'onglet de la base à l'égard du solide à l'entour de la base, et se démontrera de même, puisqu'il ne faudra qu'appeler *axe* la droite qui étoit appelée *base*, et appeler *base* celle qui étoit appelée *axe*.

Voilà les rapports qui sont entre les demi-solides et les onglets. Par où il paroît que, si on connoît la dimension et les centres de gravité des onglets et de leurs surfaces courbes, on connoîtra la même chose dans les demi-solides, par la comparaison du rayon au quart de la circonférence, dont on suppose ici que la raison est donnée.

Ainsi, pour résoudre tous les problèmes proposés, il suffira de trouver ces trois choses : 1° la dimension et le centre de gravité d'une portion quelconque de la roulette CZY (fig. 73); 2° le centre de gravité de sa ligne courbe CY; 3° la dimension et le centre de gravité des doubles onglets, tant de la base que de l'axe, et la dimension et le centre de gravité de leurs surfaces courbes. Ce sont donc là les problèmes que vous verrez ici.

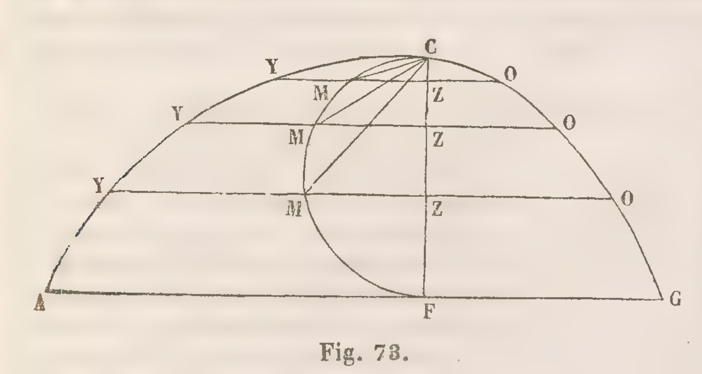


Fig. 73.

Or, pour arriver à ces connoissances sur le sujet des portions de la roulette en particulier, je donnerai des propositions universelles pour connoître toutes ces choses en toutes sortes de trilignes généralement.

C'est, monsieur, ce que j'ai cru devoir vous dire avant que d'entrer en matière, et que j'aurois pu peut-être mettre en moins de place, si j'y avois travaillé davantage; mais j'ai eu une raison particulière de démê-

ler de petites difficultés qui embarrassent ceux qui n'entendent pas la science des indivisibles : auxquels ayant voulu proportionner ce discours, j'ai mis dans les avertissemens ce qui pouvoit leur être nécessaire, mais en articles détachés, afin de ne point ennuyer les autres qui n'auront qu'à les passer sans les lire. Je n'ai donc plus qu'à vous prier d'excuser les défauts que vous verrez ici, ce que j'espère de votre bonté, et de la connoissance que vous avez du peu de loisir que j'ai de m'appliquer à ces sortes d'études; ce qui fait que je vous envoie ce discours à mesure que je l'écris : de sorte qu'il pourra bien m'arriver de répéter plus d'une fois les mêmes choses, et peut-être que je l'ai déjà fait, ne me souvenant pas assez de ce que j'ai une fois envoyé.

Il me reste encore à vous dire que, dans la suite de ce discours, je me servirai souvent de cette expression : *une multitude indéfinie*, ou *un nombre indéfini* de grandeurs ou de parties, etc., par où je n'entends autre chose, sinon une multitude ou un nombre plus grand qu'aucun nombre donné.

Je vous avertirai encore que j'use indifféremment de ces deux termes, *donné* ou *connu*, pour signifier une même chose : ce n'est pas que je ne sache qu'il y a de la différence, en ce que, selon Euclide et les anciens, une grandeur est *donnée*, quand on peut y en donner une égale, et qu'ainsi l'espace du cercle est donné, quand son rayon est donné; au lieu qu'on ne peut pas dire absolument qu'il soit *connu*, parce que le mot de *connu* enferme quelque autre chose. Mais dans ce discours j'appelle *un espace donné* ou *connu*, celui qui a une raison donnée à un carré connu; et de même j'appelle *un solide donné* ou *connu*, celui qui a une raison donnée à un parallélépipède connu : et j'appelle *raison donnée* ou *connue*, la raison de nombre connu à nombre connu, ou de droite connue à droite connue, ou de la circonférence d'un cercle à une portion connue de son diamètre, et je n'en reçois aucune autre pour *donnée* ou *connue*.

Il m'arrivera souvent de marquer un même point par plusieurs lettres, comme, par exemple (fig. 74), où le diamètre FM étant divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points O, d'où sont menées toutes les ordonnées, entre lesquelles je considère particulièrement celle qui part d'un point donné P : je marque de la lettre A tous les points où les ordonnées coupent la demi-circonférence; et je marque encore de la lettre R les points où les ordonnées OA qui sont entre P et M, coupent la circonférence, et je marque de la lettre I les points où les ordonnées OA qui sont entre P et F, coupent la circonférence : et ainsi quand je dis les ordonnées OA, je les comprends toutes généralement; quand je dis les ordonnées OR, je n'entends que celles qui sont entre P et M; et de même quand je dis OC, j'entends celles qui

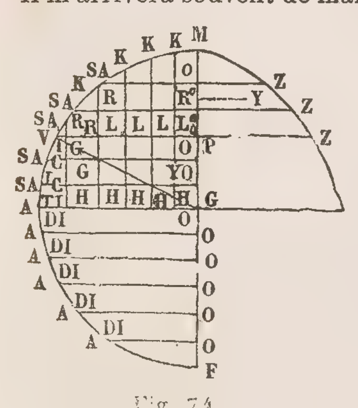


Fig. 74.

sont entre G et P, parce que le point C est marqué particulièrement pour celles-là, comme on le voit dans la figure.

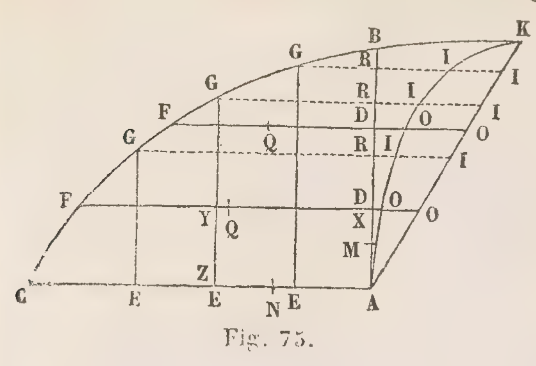


Fig. 75.

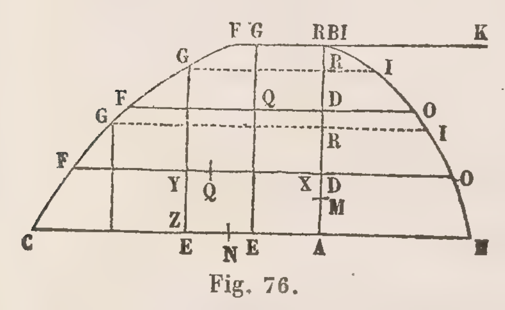


Fig. 76.

Je crois aussi avoir oublié de vous dire, en définissant les trilignes rectangles, qu'encore que la ligne BC, qui joint les extrémités des deux droites perpendiculaires AB, AC (et qui est comme l'hypoténuse du triligne) ne soit pas une ligne courbe, mais une ligne droite, ou ligne mixte, ce seroit toujours un triligne rectiligne ou mixtiligne : pourvu que cette condition s'y rencontre, que les ordonnées, tant à l'axe qu'à la base, ne coupent jamais l'hypoténuse du triligne en deux points. Ainsi un triangle rectangle sera un triligne rectiligne; et ainsi (fig. 75 et 76) le triangle BACFB est un triligne, dont les deux droites sont BA, AC, et l'hypoténuse est la courbe BFC (fig. 75) ou la ligne mixte BFC (fig. 76) composée de la courbe CF et de la droite FB parallèle à la base AC : toutes lesquelles sortes de trilignes sont considérées ici généralement, le discours devant s'entendre de tous sans exception.

TRAITÉ

DES TRILIGNES RECTANGLES, ET DE LEURS ONGLETS.

Lemme général. — *Soit un triligne rectangle quelconque tel qu'il a été défini dans la lettre précédente* ABC (*fig.* 77), *dont les ordonnées à l'axe soient* DF, *et les ordonnées à la base soient* EG, *coupant la courbe en* G; *d'où soient remenées des perpendiculaires* GR *à l'axe*, *prolongées indéfiniment*, *et lesquelles j'appelle les* contre-ordonnées : *soient aussi prolongées indéfiniment les ordonnées à l'axe. Et soit sur l'axe* AB, *et de l'autre côté du triligne*, *une figure quelconque* BKOA, *dans le même plan*, *comprise entre les parallèles extrêmes* CA, BK (*cette figure s'appellera* l'adjointe *du triligne*). *Que cette figure adjointe soit coupée par les ordonnées* FD, *aux points* O, *et par les contre-ordonnées* GR, *aux points* I. *Je dis que la somme des rectangles* FD *en* DO, *compris de chaque ordonnée du triligne et de chaque ordonnée de la figure adjointe*, *est égale à la somme des espaces* ARI, *qui sont les portions de l'ad-*

jointe, comprises depuis chacune des contre-ordonnées, jusqu'à l'extrémité de l'adjointe du côté de A.

Car soit entendu le triligne BAC être multiplié par la figure BAOK, et former par ce moyen un certain solide : c'est-à-dire, soient de tous les points du triligne ABC, élevées des perpendiculaires au plan, qui forment un solide prismatique infini, ayant le triligne ABC pour base. Soit aussi entendue la figure BAOK, tournant sur l'axe BA, relevée perpendiculairement au plan du triligne ABC; et soit enfin entendue la base AC s'élever toujours parallèlement à soi-même, le point A parcourant toujours le bord de la figure relevée AOIKB, jusqu'à ce qu'elle retombe au point B; la portion du solide prismatique infini, retranchée par la surface décrite par la ligne CA dans son mouvement, sera le solide que l'on considère ici, laquelle sera comprise de quatre surfaces, entre lesquelles le triligne tiendra lieu de base.

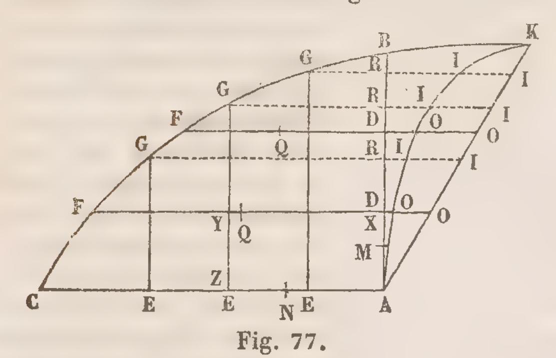


Fig. 77.

Soient maintenant entendus deux ordres de plans perpendiculaires à celui du triligne, les uns passant par les ordonnées DF à l'axe (lesquels coupant le solide, donneront pour sections les rectangles FD en DO, compris de chaque ordonnée DF, et de chaque ordonnée DO de la figure adjointe) : et les autres plans passant par les ordonnées GE, lesquels seront parallèles à l'adjointe BAOK, relevée comme il a été dit, et coupant le même solide, formeront pour sections des figures égales et toutes semblables aux portions RIA, comprises depuis chaque contre-ordonnée RI, jusqu'à l'extrémité de la figure du côté de A (ce qui paroît par les parallélismes, tant de chacun de ces plans avec l'adjointe relevée, que de la ligne AC avec soi-même dans tout son mouvement). Or, il est visible que les sommes des sections, faites par chacun de ces ordres de plans, sont égales chacune au solide, et par conséquent entre elles (puisque les portions indéfinies AE, EE, etc., de la base, sont égales, tant entre elles qu'aux portions égales et indéfinies AD, DD, etc., de l'axe); c'est-à-dire que la somme de tous les rectangles FD en DO, est égale à la somme de toutes les portions RIA : ce qu'il falloit démontrer.

Lemme. — *Soit* ABK (fig. 78) *un triangle rectangle et isocèle, dont* B *soit l'angle droit; soit aussi* AIK *une parabole dont* A *soit le sommet,* AB *la touchante au sommet, et* AB *ou* BK *le côté droit; et soit une droite quelconque* RIV, *parallèle à* BK, *coupant* AB *en* R, *la parabole en* I, *et la droite* AK *en* V.

Je dis, 1°, *que le triangle isocèle* ARV *est égal à la moitié de* AR *carré.* Cela est visible.

Je dis, 2°, *que le triligne parabolique* ARI, *multiplié par* AB, *est égal au tiers de* AR, *cube.*

Car le triligne ARI, par la nature de la parabole, est le tiers du rectangle AR en RI. Donc en multipliant le tout par AB, le triligne ARI multiplié par AB, sera le tiers du solide de AR en RI en AB; c'est-à-dire, de AR cube, puisque RI en AB, est égal à AR carré.

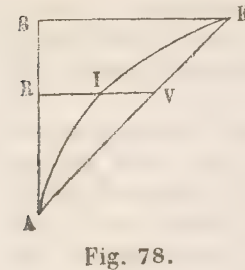


Fig. 78.

Je dis, 3°, *que si* AIK *est une parabole cubique (c'est-à-dire, que les cubes des ordonnées soient entre eux comme les portions de l'axe, ou, ce qui est la même chose, que* AB *carré en* RI, *soit toujours égal à* AR *cube) : le triligne* ARI, *multiplié par* AB *carré, sera égal au quart de* AR *carré-carré.*

Car, par la nature de cette parabole, le triligne ARI est le quart du rectangle AR en RI; donc en multipliant le tout par AB carré, on démontrera le reste comme en l'article précédent.

Et de même pour les autres paraboles carré-carrées, carré-cubiques, etc.

Rapports entre les ordonnées à l'axe et les ordonnées à la base d'un triligne rectangle quelconque.

Proposition I. — *La somme des ordonnées à la base est la même que la somme des ordonnées à l'axe.*

Car l'une et l'autre est égale à l'espace du triligne.

Proposition II. — *La somme des carrés des ordonnées à la base est double des rectangles compris de chaque ordonnée à l'axe, et de sa distance de la base; c'est-à-dire, que la somme de tous les* EG *carré* (fig. 79) *est double de la somme de tous les rectangles* FD *en* DA.

Car si le triligne ABC a pour adjointe un triangle rectangle et isocèle ABK, dont les côtés AB, BK soient égaux entre eux, et la base AK une ligne droite qui soit coupée par les ordonnées FD, aux points O, et par les contre-ordonnées GR, aux points I; il arrivera, comme il a été démontré, que la somme de tous les rectangles FD en DO, ou FD en DA (puisque partout DO sera égal à DA), sera égale à la somme de tous les triangles ARI; c'est-à-dire, par le lemme précédent, à la moitié de la somme de tous les AR carré, ou de tous les EG carré.

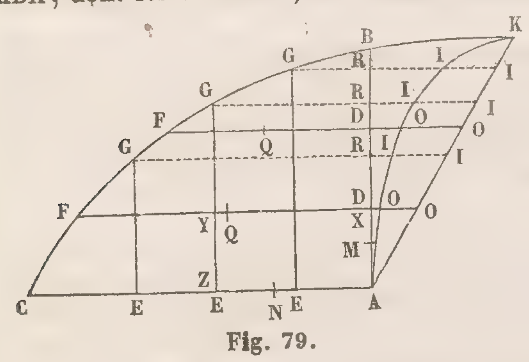


Fig. 79.

Corollaire. — *Donc la somme des carrés des ordonnées à la base est double de la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base.*

Car la somme des rectangles FD en DA est la même chose que la

somme triangulaire des ordonnées FD, à commencer du côté de A, comme il a été démontré dans la lettre à M. de Carcavi.

Proposition III. — *La somme des cubes des ordonnées à la base est triple des solides compris de chaque ordonnée à l'axe, et du carré de sa distance de la base; la somme de tous les* EG *cube est triple de la somme de tous les* FD *en* DA *carré*

Car si la figure adjointe ABK est composée des deux droites perpendiculaires AB, BK, et de la parabole AOK, telle qu'elle a été supposée dans le lemme précédent, il arrivera toujours, par le lemme général, que la somme des rectangles FD en DO, sera égale à la somme des portions ARI qui seront ici des trilignes paraboliques. Donc en multipliant le tout par BA, la somme des solides FD en DO en AB, ou FD en DA carré, sera égale à la somme des trilignes ARI, multipliés par AB; c'est-à-dire, par le lemme précédent, au tiers de la somme des AR cube, ou des EG cube.

Corollaire. — *Donc la somme des cubes des ordonnéees à la base est égale à six fois la somme pyramidale des ordonnées à l'axe, à commencer par la base.*

Car la somme des EG cube est triple de la somme des FD en DA carré; et la somme des FD en DA carré est double de la somme pyramidale des ordonnées FD, à commencer du côté de A, comme il a été démontré dans la même lettre.

Proposition IV. — *On démontrera de même que la somme des carré-carrés des ordonnées à la base est quadruple de la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par le cube de sa distance de la base; et ainsi toujours.*

Avertissement. — Puisque celle qu'on veut des deux droites d'un triligne est prise pour l'axe et l'autre pour la base, tout ce qui a été dit des ordonnées à la base, à l'égard des ordonnées à l'axe, pourra se dire de même des ordonnées à l'axe, à l'égard des ordonnées à la base.

Proposition V. — *La somme des solides compris du carré de chaque ordonnée à la base, et de sa distance de l'axe, est égale à la somme des solides compris du carré de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance de la base : je dis que la somme des solides de tous les* EG *carré en* EA *est égale à la somme des solides de tous les* DF *carré en* DA.

Ou ce qui est la même chose :

La somme triangulaire des carrés des ordonnées à la base est égale à la somme triangulaire des carrés des ordonnées à l'axe, en commençant toujours du côté du centre du triligne; c'est-à-dire, du point où l'axe et la base se coupent : je dis que la somme triangulaire de tous les EG *carré est égale à la somme triangulaire de tous les* DF *carré, en commençant toujours du côté de* A.

Car, si on entend que le double onglet de la base soit formé sur le triligne CAB, dont le centre de gravité soit au point Y, d'où soient menées les perpendiculaires YZ, YZ, qui seront les bras sur l'axe et sur la base, et qu'on entende que ce double onglet soit coupé par des plans perpendiculaires au triligne, passant par les ordonnées EG; il est visible que

les sections que ces plans donneront dans le double onglet, seront des triangles rectangles et isocèles, égaux chacun au carré de son ordonnée EG; comme on l'a vu dans la lettre où il a été montré que le triangle rectangle et isocèle MZN (fig. 80), qui représente les triangles de ces sections, est égal au carre de ZY (fig. 81), qui représente les ordonnées.

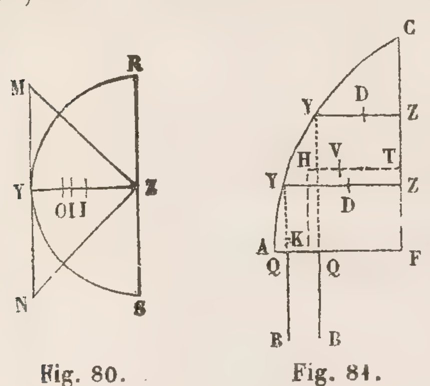


Fig. 80. Fig. 81.

Maintenant soit entendu le même double onglet, coupé par un autre ordre de plans perpendiculaires à celui du triligne, et passant par les ordonnées DF, lesquels donneront pour sections, dans le double onglet, des rectangles qui auront la base chacun égale à son ordonnée DF, et la hauteur égale à deux fois AD : tous lesquels rectangles seront coupés en deux également par les ordonnées DF; et partant les centres de gravité de ces rectangles seront aux points Q, où chaque ordonnée est coupée par la moitié, et les droites QD seront leurs bras sur BA; c'est-à-dire, la distance entre leur centre de gravité et BA.

Or il est visible que la somme de ces rectangles compose le solide du double onglet, et que la somme des triangles formés par l'autre ordre de plans EG, compose aussi le même solide du double onglet; et qu'ainsi la somme des uns n'est que la même chose que la somme des autres; et que chacune des deux n'est que la même chose que le solide du double onglet : d'où il paroît qu'aussi la somme triangulaire des portions du solide comprises entre tous les plans voisins du premier ordre EG, est la même chose que la somme triangulaire des triangles formés par les plans EG; et que ce n'est encore que la même chose que la somme triangulaire des portions des rectangles formés par les plans FD, comprises toujours entre tous les mêmes plans voisins du premier ordre EG.

Mais, par la méthode générale des centres de gravité, la somme triangulaire des portions de chacun de ces rectangles, comprises entre les plans EG, est égale à chaque rectangle multiplié par son bras QD sur l'axe AB; donc la somme de ces rectangles multipliés chacun par QD, est égale à la somme triangulaire des triangles formés par les plans EG (à commencer toujours du côté de AB).

Mais chacun de ces triangles, formés par les plans EG, est égal à chaque EG carré; et chacun des rectangles formés par les plans FD, est égal à deux fois chaque AD en DF; donc la somme triangulaire de tous les EG carré, est égale à la simple somme de deux fois tous les AD en DF multipliés par DQ; c'est-à-dire, à la simple somme de tous les AD en DF carré; ou (ce qui n'est que la même chose, puisque le premier AD est 1, le second AD, 2, etc.) à la somme triangulaire de tous les DF carré. Ce qu'il falloit démontrer.

Avertissement. — On a été assez averti dans la lettre, que la quatrième dimension n'est point contre la pure géométrie, puisqu'en substituant, tant aux EG carré, qu'aux rectangles AD en DF, des droites qui soient entre elles en même raison que ces carrés et ces rectangles, on démontrera la même chose par la même manière, sans aucun changement et sans quatrième dimension.

Rapports entre les sinus sur la base d'un triligne quelconque, et les portions de sa ligne courbe comprises entre le sommet et les ordonnées à l'axe.

Définition. — On appelle ici *arcs* non-seulement les portions des circonférences de cercle, mais encore les portions de toutes sortes de lignes courbes.

Hypothèse générale. — Soit un triligne rectangle quelconque BAH (fig. 82), et soit le même triligne BAP, renversé de l'autre part de l'axe BA, et qu'ainsi les deux bases égales HA, AP, ne fassent qu'une même ligne droite; soit divisé, tant l'axe, que la courbe BP, en un nombre indéfini de parties toutes égales entre elles; c'est-à-dire que les parties de l'axe BD, DD, etc., soient égales, tant entre elles, qu'aux parties égales de la courbe BI, II, etc. Soient menées les ordonnées DO à l'axe, et les sinus IL sur la base.

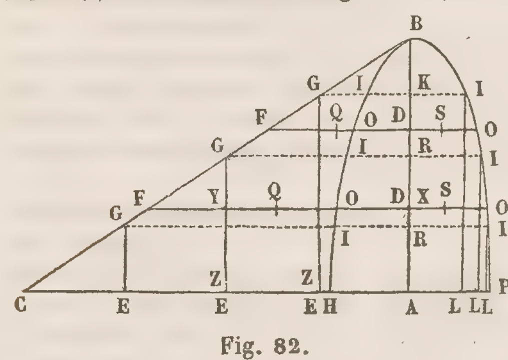


Fig. 82.

Les rapports qui se trouvent entre la somme des sinus IL, et la somme des arcs ou des portions BO de la courbe (comprises entre le point B et chacune des ordonnées à l'axe) seront les suivans.

Proposition VI. — *La somme des arcs de la courbe, compris entre le sommet et chaque ordonnée à l'axe, est égale à la somme des sinus sur la base; c'est-à-dire que la somme de tous les arcs* BO, *est égale à la somme des sinus* IL.

Proposition VII. — *La somme des carrés de ces mêmes arcs* BO *est égale à deux fois la somme triangulaire des mêmes sinus* IL, *à commencer par* A.

Proposition VIII. — *La somme des cubes de ces mêmes arcs* BO *est égale à six fois la somme pyramidale des mêmes sinus IL, à commencer par A.*

Proposition IX. — *La somme triangulaire des mêmes arcs* BO, *à commencer par* A, *est égale à la moitié de la somme des carrés des mêmes sinus* IL.

Proposition X. — *La somme pyamidale des mêmes arcs* BO, *à commencer par* A, *est égale à la sixième partie des cubes des mêmes sinus* IL.

PROPOSITION XI. — *La somme triangulaire des carrés des mêmes arcs* BO, *à commencer par* A, *est égale à la somme triangulaire des carrés des mêmes sinus* IL, *à commencer par* A.

PROPOSITION XII. — *Je dis maintenant qu'en menant les sinus sur l'axe, savoir, les perpendiculaires* IR, *la somme des rectangles compris de chacun des mêmes arcs et de l'ordonnée qui le termine, savoir, la somme de tous les rectangles* BO *en* OD, *est égale à la somme des portions du triligne, comprises entre chaque sinus sur l'axe et la base, savoir, à la somme de toutes les portions* IRAP.

PROPOSITION XIII. — *La somme des carrés de chaque arc, multipliée par son ordonnée, c'est-à-dire de tous les* BO *carré en* OD, *est double de la somme triangulaire de ces mêmes portions* IRAP *du triligne, entre la base et chaque sinus sur l'axe, à commencer du côté de* B.

PROPOSITION XIV. — *La somme triangulaire des rectangles de chaque ordonnée avec son arc, c'est-à-dire la somme triangulaire de tous les* BO *en* OD, *à commencer par A, ou, ce qui est la même chose, la somme de tous les solides* AD *en* DO *en* OB, *compris de chaque arc, de son ordonnée, et de la distance entre l'ordonnée et la base, est égale à la somme de ces portions* IRAP *du triligne, multipliées chacune par son bras sur la base* AP, *c'est-à-dire par la perpendiculaire menée sur* AP *du centre de gravité de chaque portion* IRAP.

PROPOSITION XV. — *La somme des arcs multipliés chacun par le carré de son ordonnée, c'est-à-dire de tous les* BO *en* OD *carré, est double de la somme de ces portions* IRAP *du triligne, multipliées chacune par son bras sur l'axe* AB, *c'est-à-dire par la perpendiculaire sur* AB, *menée du centre de gravité de chaque portion* IRAP.

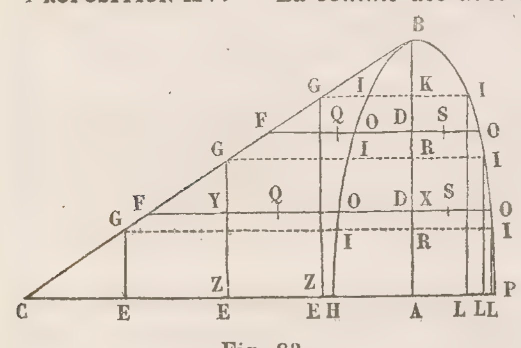


Fig. 83.

PRÉPARATION A LA DÉMONSTRATION (fig. 83.) — Soit prise dans la droite AH prolongee, la portion AC égale à la ligne courbe BIP ou BOH : et ayant divisé AC en autant de parties égales qu'il y en a dans la courbe BIP, aux points E, et qu'ainsi chacune des portions AE, EE, etc., soit égale à chacun des arcs BI, II, etc., soient des points E menées des perpendiculaires EG, qui rencontrent les sinus IR sur l'axe, prolongés s'il le faut aux points G; de sorte que chacune des droites EG soit égale à chacun des sinus IL sur la base, et que par tous les points B, G, G, C, soit entendue passer une ligne courbe, dont les droites EG seront les ordonnées à la base, et les droites GR en seront les contre-ordonnées : la nature de cette ligne sera telle, que quelque point qu'on y prenne G, d'où on mène les droites GE, GRI, parallèles à l'axe et à la base, il arrivera toujours que la portion AE, ou la droite RG, sera égale à l'arc BI, et la portion restante EC, à l'arc restant IP : et par ce moyen les ordonnées DO à l'axe étant prolongées, et la coupant en F, chacune des droites DF sera

égale à chacun des arcs BO, compris entre l'ordonnée même DF et le sommet.

Cela posé, la démonstration des propositions 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, qui viennent d'être énoncées, sera facile.

Démonstration de la proposition VI. — Je dis que la somme de tous les arcs BO est égale à la somme des sinus IL.

Car tous les arcs BO sont les mêmes que toutes les ordonnées DF à l'axe, dont la somme est égale à celle des ordonnées EG, par la première proposition, c'est-à-dire à la somme des sinus IL.

Démonstration de la proposition VII. — Je dis que la somme des arcs BO carré est double de la somme triangulaire des sinus IL, à commencer par A, ou que la somme des DF carré est double de la somme triangulaire des ordonnées EG, à commencer par A : ce qui est démontré par le corollaire de la seconde proposition.

Démonstration de la proposition VIII. — Je dis que la somme des arcs BO cube est égale à six fois la somme pyramidale des mêmes sinus IL, à commencer par A, ou que la somme de tous les DF cube est égale à six fois la somme pyramidale de toutes les EG, à commencer par A : ce qui a été démontré par la troisième.

Démonstration de la proposition IX. — Je dis que la somme triangulaire des arcs BO, à commencer par A, est égale à la moitié de la somme des carrés des sinus IL, ou que la somme triangulaire des ordonnées DF, à commencer par A, est égale à la moitié de la somme des carrés des ordonnées EG : ce qui est démontré par le même corollaire de la seconde.

Démonstration de la proposition X. — Je dis que la somme pyramidale des arcs BO, à commencer par A, est égale à la sixième partie de la somme des cubes des sinus IL, ou que la somme pyramidale des ordonnées DF, à commencer par A, est égale à la sixième partie de la somme des cubes des ordonnées EG : ce qui a été démontré par le corollaire de la troisième.

Démonstration de la proposition XI. — Je dis que la somme triangulaire des arcs BO carré est égale à la somme triangulaire des sinus IL carré, à commencer toujours par A, ou que la somme triangulaire des ordonnées DF carré est égale à la somme triangulaire des ordonnées EG carré, à commencer toujours par A : ce qui a été démontré par la cinquième.

Démonstration de la proposition XII. — Je dis que la somme des rectangles BO en OD, ou FD en DO, est égale à la somme des portions IRAP.

C'est la même chose que ce qui a été démontré dans le lemme général. Car en considérant le triligne BAP comme étant la figure adjointe du triligne BAC, il s'ensuit, par ce qui a été démontré dans ce lemme, que la somme des rectangles FD en DO (compris de chaque ordonnée DF du triligne BAC, et de chaque ordonnée DO du triligne BAP), est égale à la somme des portions ARIP de la figure adjointe, comprises entre chaque contre-ordonnée RI et la droite AP, et que les unes et les autres composent un même solide.

Démonstration de la proposition XIII. — Je dis que la somme de tous les BO carré en OD, ou FD carré en DO, est double de la somme triangulaire des mêmes portions ARIP, à commencer du côté de B : ou que cette somme triangulaire des portions ARIP est égale à la somme des solides QD en FD en DO (qui sont la moitié des FD carré en DO, chaque FD étant divisé par la moitié en Q).

Car soit entendue la figure adjointe BAP relevée perpendiculairement au plan du triligne BAC, et former le solide dont il a été parlé dans le lemme général, qui soit coupé par deux ordres de plans perpendiculaires au triligne, les uns passant par les droites EG et les autres par les droites DF; les uns donnant pour sections des figures pareilles aux espaces ARIP, et les autres donnant pour sections les rectangles FD en DO, comme cela a été dit dans le lemme général : et ainsi ce solide sera composé de la somme des espaces ARIP, et le même solide est aussi composé de la somme des rectangles FD en DO : d'où il s'ensuit que la somme des portions ARIP, élevées perpendiculairement au plan ABC sur les droites EG; et la somme des rectangles FDO, élevés aussi perpendiculairement au même plan ABC, ne sont qu'une même chose, tant entre elles qu'avec le solide : et par conséquent, que la somme triangulaire des portions du solide comprises entre tous les plans EG, à commencer du côté de AB, est la même chose que la somme triangulaire des espaces ARIP; et que c'est aussi la même chose que la somme triangulaire des portions de chaque rectangle FD en DO, comprises entre tous les mêmes plans EG.

Mais, par la méthode générale des centres de gravité, la somme triangulaire des portions de chacun de ces rectangles comprises entre les plans EG, à commencer du côté de AB, est égale à chaque rectangle multiplié par son bras QD sur AB; donc aussi la somme des rectangles FDO, multipliés chacun par son bras QD, est égale à la somme triangulaire des portions ARIP, à commencer par B. Ce qu'il falloit démontrer.

Démonstration de la proposition XIV. — Je dis que la somme triangulaire de tous les BO en OD, ou FD en DO, à commencer par A, est égale à la somme de ces espaces IRAP, multipliés chacun par son bras sur la base AP.

Car en relevant le triligne adjoint BAP, qui formera le solide coupé par les deux ordres de plans, comme en l'article précédent, desquels les uns forment pour sections les espaces pareils à ARIP, et les autres les rectangles FD en DO, la somme de chacun, c'est-à-dire, tant des espaces ARIP que des rectangles FD en DO, ne sont qu'une même chose que le solide. D'où il est évident que la somme triangulaire des portions du solide comprises entre tous les plans FD, est la même chose que la somme triangulaire de tous les rectangles FD en DO; et que c'est aussi la même chose que la somme triangulaire des portions des espaces ARIP, comprises entre tous les mêmes plans FD.

Mais la somme triangulaire de chaque espace ARIP, compris entre les plans FD, à commencer du côté de AP, est égale (par la méthode générale des centres de gravité) à chaque espace ARIP, multiplié par son

bras sur AP : donc aussi la somme de ces espaces ARIP, multipliés chacun par son bras sur AP, est égale à la somme triangulaire des rectangles FDO, à commencer par A. Ce qu'il falloit démontrer.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XV. — Je dis que la somme de tous les DO carré en OB, ou de tous les FD en DO carré, est double de la somme des portions ARIP, multipliées chacune par son bras sur l'axe BA; ou que la somme des solides FD en DO en DS, qui est la moitié des FD en DO carré (chaque DO étant divisé par la moitié en S) est égale à la somme des espaces ARIP, multipliés chacun par son bras sur l'axe AB.

Car soit relevé de même le triligne adjoint BAP, qui formera un solide coupé par les deux ordres de plans sur EG et DF, qui donnent pour sections dans le solide les rectangles FDO et les espaces ARIP, qui sont tels que la somme des rectangles FDO et la somme des espaces ARIP ne sont qu'une même chose, tant entre elles qu'avec le solide.

Soit maintenant entendu un troisième ordre de plans, parallèles à celui du triligne et élevés au-dessus du plan du triligne, et tous en distances égales l'un de l'autre; en sorte qu'ils divisent la droite AP (relevée perpendiculairement au plan du triligne) en un nombre indéfini de parties égales : et qu'ainsi ils coupent le solide en un nombre indéfini de parties, comprises chacune entre deux quelconques plans voisins.

Donc, puisque ces trois choses ne sont qu'une même : savoir, la somme des rectangles FDO, relevés sur les droites FD, la somme des espaces ARIP, relevés sur les droites EG et le solide : il s'ensuit que la somme triangulaire de toutes les portions des espaces ARIP, comprises entre tous les plans voisins de ce troisième ordre, est la même que la somme triangulaire de toutes les portions des rectangles FD en DO, comprises entre les mêmes plans voisins de ce même troisième ordre, à commencer toujours du côté d'en bas, c'est-à-dire, du côté du triligne ABC, qui sert de base au solide.

Mais la somme triangulaire des portions de chaque espace ARIP, comprises entre les plans voisins du troisième ordre, est égale à chaque espace ARIP, multiplié par son bras sur l'axe AB : et de même la somme triangulaire des portions de chaque rectangle FDO, comprises entre les mêmes plans du troisième ordre, est égale à chaque rectangle FDO, multiplié par son bras sur l'axe, ou à chaque rectangle FDO, multiplié par SD (car SD est le bras sur l'axe), c'est-à-dire, à chaque solide FD en DO en DS.

Donc la somme de tous les FD en DO en DS, est égale à la somme des espaces ARIP, multipliés chacun par son bras sur l'axe AB. Ce qu'il falloit démontrer.

Méthode générale pour trouver la dimension et les centres de gravité d'un triangle quelconque et de ses doubles onglets, par la seule connoissance des ordonnées à l'axe ou à la base

Pour trouver la dimension, tant du triligne que de ses doubles onglets, et leurs centres de gravité; c'est-à-dire, la distance entre leurs

centres de gravité et la base du triligne, et la distance entre leurs mêmes centres de gravité et l'axe du triligne, ou, ce qui est la même chose, leur bras sur la base et sur l'axe, je me suis servi d'une méthode qui réduit tous ces problèmes à la connoissance des seules ordonnées; c'est-à-dire, à la connoissance de leurs sommes simples, triangulaires et pyramidales, ou de leurs puissances, comme on va le voir ici.

Je dis donc que, si on connoît dans un triligne toutes les choses suivantes :

1° *La somme des ordonnées à l'axe;*
2° *La somme des carrés de ces ordonnées;*
3° *La somme des cubes de ces ordonnées;*
4° *La somme triangulaire de ces ordonnées;*
5° *La somme triangulaire des carrés de ces ordonnées;*
6° *La somme pyramidale de ces ordonnées;*

On connoîtra aussi la dimension et les centres de gravité, tant du triligne que de ses doubles onglets; c'est-à-dire qu'on connoîtra aussi les choses suivantes :

1° *La dimension de l'espace du triligne;*
2° *Le bras du triligne sur l'axe;*
3° *Le bras du triligne sur la base;*
4° *La dimension du double onglet de la base;*
5° *Le bras de cet onglet sur la base;*
6° *Le bras de cet onglet sur l'axe;*
7° *La dimension du double onglet de l'axe;*
8° *Le bras de cet onglet sur la base;*
9° *Le bras de cet onglet sur l'axe.*

Car, pour le premier point, la somme des ordonnées étant connue, l'espace du triligne sera aussi connu, puisqu'il lui est égal.

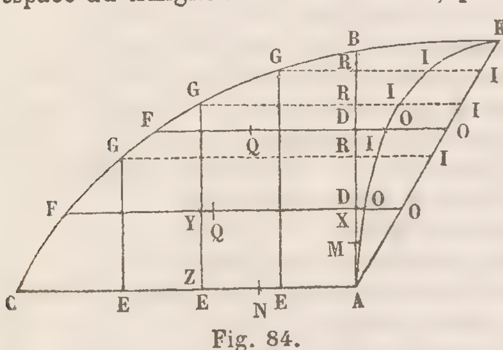


Fig. 84.

Pour le deuxième : soit le triligne BAC (fig. 84) dont AB soit l'axe et AC la base; DF les ordonnées à l'axe, dont on connoisse la simple somme, la somme des carrés et les autres choses qui ont été supposées : soient EG les ordonnées à la base, et soit Y le centre de gravité du triligne; et soient les deux bras YD, YE sur l'axe et sur la base : je dis que le bras YD sur l'axe sera connu.

Car, puisque la somme des DF carré est connue par l'hypothèse, la somme triangulaire des ordonnées EG, à commencer par A, le sera aussi (puisqu'elle en est la moitié, par le corollaire de la seconde proposition). Et par conséquent le bras YD sera aussi connu, puisqu'il a été montré par la lettre que cette somme triangulaire des ordonnées EG,

laquelle est connue, est égale au solide fait du triligne ABC, multiplié par son bras YD sur AB, lequel solide sera par conséquent connu : mais l'espace du triligne ABC est connu par le premier article. Donc aussi YD sera connu.

Pour le troisième : savoir, que le bras YE du triligne sur la base sera connu : cela est visible, puisque la somme triangulaire des ordonnées FD (qui est connue par l'hypothèse) est égale au solide fait du triligne, multiplié par son bras YE, lequel solide sera par conséquent connu ; mais l'espace du triligne est connu, par le premier article. Donc aussi le bras YE sera connu.

Pour le quatrième : je dis que le contenu du double onglet de la base sera connu.

Car le contenu de ce double onglet est composé de deux fois la somme des rectangles FD en DA, ou de tous les EG carré, comme cela a été assez montré dans la cinquième proposition, où l'on a fait voir que, si on entend que le double onglet soit coupé par un ordre de plans perpendiculaires à celui du triligne, passant par les ordonnées FD, et s'étendant infiniment de part et d'autre, leurs sections dans le double onglet seront des rectangles, dont chacun sera double de chaque rectangle AD en DF ; et qu'en coupant ce même double onglet par un autre ordre de plans perpendiculaires, passant par toutes les droites EG, leurs sections dans le double onglet seront des triangles rectangles, dont chacun sera égal au carré de chaque ordonnée EG.

Donc, si la somme des EG carré est connue, le contenu du double onglet le sera aussi. Or la somme, tant de ces carrés EG, que de deux fois la somme de ces rectangles FD en DA est connue, puisque (par le corollaire de la seconde) c'est la même chose que deux fois la somme triangulaire des ordonnées DF, à commencer par A (qui est donnée par l'hypothèse).

D'où il s'ensuit que le contenu du double onglet est aussi connu.

Pour le cinquième : soit maintenant Y, le centre de gravité du double onglet de la base : je dis que son bras YE sur la base sera connu ; et que le double onglet, multiplié par le bras YE, est égal à quatre fois la somme pyramidale des ordonnées DF, à commencer par A, ou, ce qui est la même chose, comme on l'a vu dans la lettre, à deux fois la somme de tous les AD carré en DF ; ce qui se démontrera ainsi.

La somme de tous les AD carré en DF est la même chose que la somme de tous les rectangles AD en DF, multipliés chacun par son côté AD ; c'est-à-dire (puisque le premier AD est 1, le second, 2, etc.), la somme triangulaire de tous les AD en DF, à commencer par A. Donc aussi le double de la somme des AD carré en DF sera la même chose que la somme triangulaire de deux fois tous les AD en DF ; c'est-à-dire la somme triangulaire des rectangles ou sections formées dans le double onglet, par les plans perpendiculaires passant par DF. Mais la somme triangulaire de ces sections du double onglet, à commencer du côté de AC, est égale (par la méthode générale des centres de gravité) au double onglet multiplié par son bras YE sur AC ; donc aussi le double de la somme des AD carré en DF est égal au double

onglet multiplié par YE. Mais deux fois la somme des AD carré en DF, ou quatre fois la somme pyramidale des ordonnées DF, est connue par l'hypothèse.

Donc ce produit du double onglet, multiplié par YE, est aussi connu; mais on connoît le contenu du double onglet : donc on connoîtra aussi le bras YE.

Pour le sixième : je dis que le bras YD, sur l'axe, sera aussi connu, et que le double onglet, multiplié par le bras YD, est égal à la somme triangulaire des EG carré, à commencer par A, ou, ce qui est la même chose, à la somme triangulaire des FD carré, à commencer toujours par A : ce qui sera montré ainsi.

Si on entend que le double onglet soit coupé par des plans perpendiculaires à celui du triligne, passant par les ordonnées EG, ils y formeront pour sections des triangles rectangles et isocèles, égaux chacun à EG carré, comme il a été dit. Or, par la méthode générale des centres de gravité, la somme triangulaire de ces sections ou des carrés EG, à commencer par A, est égale au double onglet multiplié par son bras YD : mais la somme triangulaire des EG carré est connue, puisque la somme triangulaire des DF carré est connue par l'hypothèse : donc le produit du double onglet, multiplié par YD, est connu : mais le contenu du double onglet est connu; donc YD est connu.

Pour le septième : je dis que le contenu du double onglet de l'axe sera connu.

Car, puisque la somme des DF carré est connue par l'hypothèse, le double onglet de l'axe l'est aussi, puisqu'il en est composé.

Pour le huitième et neuvième : soit maintenant Y le centre de gravité du double onglet de l'axe : je dis que ses deux bras YE, YD sur la base et sur l'axe seront connus.

Car, puisque tous les AE carré en EG sont connus, étant égaux par la troisième au tiers de tous les DF cube, dont la somme est connue par l'hypothèse, on en conclura que le bras YD sera connu : et de même, puisque la somme triangulaire des DF carré est connue par l'hypothèse, on en conclura que le bras YE sera aussi connu, de la même sorte qu'on l'a conclu des deux bras du double onglet de la base dans les articles 5 et 6, par le moyen des données semblables à l'égard de ce double onglet de la base.

Corollaires. — 1. *L'espace du triligne est égal à la somme des ordonnées à la base, ou à la somme des ordonnées à l'axe.*

2. *Le triligne, multiplié par son bras sur l'axe, est égal à la somme triangulaire des ordonnées à la base, en commençant par l'axe; ou à la moitié de la somme des carrés des ordonnées à l'axe.*

Cela est démontré dans le second article.

3. *Le triligne, multiplié par son bras sur la base, est égal à la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base; ou à la moitié des carrés des ordonnées à la base.*

C'est la même chose que le précédent.

4. *Le double onglet de la base est égal à la somme des carrés des ordonnées à la base; ou au double de la somme des ordonnées à l'axe,*

multipliées chacune par sa distance de la base; ou à deux fois la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base.

Cela est montré dans le quatrième article.

5. *Le double onglet de la base, multiplié par son bras sur la base, est égal à deux fois la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par le carré de sa distance de la base; ou à quatre fois la somme pyramidale des ordonnées à l'axe, à commencer par la base; ou au double de la somme triangulaire des rectangles compris de chaque ordonnée et de sa distance de l'axe, à commencer du côté de la base; ou aux deux tiers des cubes des ordonnées à la base.*

Cela s'ensuit du cinquième article.

6. *Le double onglet de la base, multiplié par son bras sur l'axe, est égal à la somme triangulaire des carrés des ordonnées à la base, à commencer du côté de l'axe; ou à la somme triangulaire des carrés des ordonnées à l'axe, à commencer du côté de la base; ou à la simple somme des carrés des ordonnées à la base, multipliés chacun par sa distance de l'axe; ou à la simple somme des carrés des ordonnées à l'axe, multipliés chacun par sa distance de la base.*

Cela s'ensuit du sixième article.

Il faut entendre la même chose du double onglet de l'axe, sans autre différence que de mettre *axe* au lieu de *base*, et *base* au lieu d'*axe*.

On peut tirer de là plusieurs autres corollaires, comme, par exemple, les converses des choses démontrées dans tous ces articles : savoir que, si on connoît la dimension et le centre de gravité, tant du triligne que de ses onglets, on connoîtra aussi, 1° la somme des ordonnées à l'axe; 2° la somme des carrés de ces ordonnées; 3° la somme des cubes de ces ordonnées; 4° la somme triangulaire de ces ordonnées; 5° la somme triangulaire des carrés des ordonnées; 6° la somme pyramidale des ordonnées. Et on connoîtra la même chose à l'égard des ordonnées à la base.

On peut encore en tirer d'autres conséquences, mais un peu plus recherchées, et entre autres celle-ci, qui peut être d'un grand usage.

Conséquence. — *Si un triligne est tourné, premièrement sur la base, et ensuite sur l'axe, et qu'il forme ainsi deux solides, l'un autour de la base et l'autre autour de l'axe : je dis que la distance entre l'axe et le centre de gravité du solide autour de la base est à la distance entre la base et le centre de gravité du solide autour de l'axe, comme le bras du triligne sur l'axe au bras du triligne sur la base.*

D'où il paroît que, si on connoît le centre de gravité du triligne et d'un de ses solides, celui de l'autre sera aussi connu.

Soit un triligne rectangle BAC (fig. 85) dont le centre de gravité soit Y, et les bras sur l'axe et sur la base soient YX, YZ; soit aussi M le centre de gravité du solide autour de l'axe, et soit N le centre de gravité du solide autour de la base : je dis que AM est à AN, comme AX à AZ, ou comme YZ à YX : et qu'ainsi si AX, AZ et AN sont connus, AM le sera aussi.

Car en coupant le solide sur l'axe par des plans perpendiculaires pas-

sant par les ordonnées DF, ils donneront pour sections des cercles, dont les ordonnées DF seront les rayons; et en coupant ensuite le solide autour de la base par des plans perpendiculaires passant par les ordonnées EG, qui donneront aussi pour sections des cercles, dont les ordonnées EG seront les rayons, il arrivera que la somme triangulaire des cercles DF, à commencer par A, sera égale au solide autour de l'axe, multiplié par son bras AM (par la méthode générale des centres de gravité); et par la même méthode, la somme triangulaire des cercles EG, à commencer par A, sera aussi égale au solide autour de la base, multiplié par son bras AN : mais la somme triangulaire des cercles DF est égale à la somme triangulaire des cercles EG, à commencer toujours par A, puisque les sommes triangulaires de leurs carrés sont égales entre elles : donc le solide autour de l'axe, multiplié par son bras AM, est égal au solide autour de la base, multiplié par son bras AN; donc AM est à AN, comme le solide autour de la base au solide autour de l'axe, c'est-à-dire, comme le bras YZ au bras YX.

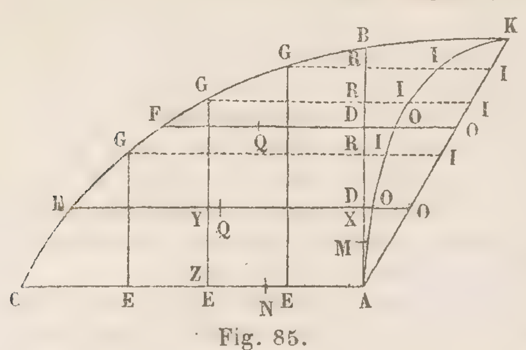


Fig. 85.

Car on sait assez que le solide autour de la base est au solide autour de l'axe, comme le bras YX du triligne sur l'axe au bras YZ du triligne sur la base; ce qui est encore une conséquence qui se tire des propositions précédentes, et qui se démontrera ainsi.

Le solide autour de la base est au solide autour de l'axe, comme la somme des cercles EG à la somme des cercles DF; ou comme la somme des EG carré à la somme des DF carré, c'est-à-dire (par le corollaire de la deuxième), comme la somme triangulaire des ordonnées DF à la somme triangulaire des ordonnées EG, à commencer toujours par A, c'est-à-dire (par la méthode générale des centres de gravité), comme le triligne multiplié par son bras AX ou YZ, au triligne multiplié par son bras AZ ou YX, c'est-à-dire comme YZ à YX. Ce qu'il falloit démontrer.

Méthode pour trouver la dimension et le centre de gravité de la surface courbe des doubles onglets, par la seule connoissance des sinus sur l'axe.

Si on connoît dans un triligne :

1° *La grandeur de sa ligne courbe;*

2° *La somme des sinus sur l'axe;*

3° *La somme des carrés de ces sinus sur l'axe;*

4° *La somme des rectangles de ces mêmes sinus sur l'axe multipliés chacun par leur distance de la base : je dis qu'on connoîtra aussi la dimension de la surface courbe du double onglet de l'axe et le centre de*

gravité de cette surface courbe, c'est-à-dire, le bras de cette surface sur la base, et le bras de cette même surface sur l'axe.

Car si la courbe AYC (fig. 86) est divisée en un nombre indéfini de parties égales au point Y, d'où soient menés les sinus sur l'axe, et que, comme il a été dit vers la fin de la lettre, des plans soient entendus élevés perpendiculairement au plan du triligne, passant par chacun des sinus YZ : les sections qu'ils donneront dans la surface du double onglet seront des droites perpendiculaires au plan du triligne, qui seront doubles chacune de chaque sinus YZ, comme il a été montré dans la lettre.

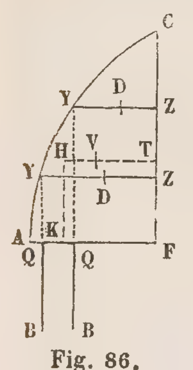


Fig. 86.

Or, il est visible que la somme de ces perpendiculaires formées dans cette double surface, composent la surface courbe, étant perpendiculaires à la courbe AYC. Donc, si on connoît la somme de ces perpendiculaires, c'est-à-dire, le double de la somme des sinus ZY, et qu'on connoisse aussi la grandeur de la ligne courbe, on connoîtra aussi la surface courbe. Ce qu'il falloit premièrement démontrer.

Je dis maintenant que, *si on connoît la somme des rectangles* FZ *en* ZY, *compris de chaque sinus et de sa distance de la base*, *on connoîtra aussi le bras* TF *ou* HK, *le point* H *étant pris pour le centre de gravité de la surface courbe du double onglet : et que la somme des sinus* ZY, *étant multipliée par le bras* TF, *est égale à la somme de tous les rectangles* YZ *en* ZF.

Car il est visible que le même bras TF, qui mesure la distance d'entre le centre de gravité H de la surface courbe du double onglet, et la base FA, mesurera aussi la distance qui est entre le centre de gravité commun de tous les sinus ZY, placés comme ils se trouvent, et la même base AF : d'autant que chaque sinus ZY est éloigné de la base AF de la même distance que chacune des perpendiculaires au plan du triligne, passant par les points Y, et que chaque sinus est à chaque perpendiculaire toujours en même raison, savoir, comme 1 à 2.

Or, il sera montré incontinent que la somme des rectangles ZY en ZF, compris de chaque YZ et de sa distance du point F, est égale à la somme des mêmes YZ, multipliée par la distance d'entre la base et le centre de gravité commun de toutes les ZY, placées comme elles se trouvent; mais la somme des rectangles YZ en ZF est donnée par l'hypothèse. Donc la somme des sinus, multipliée par la distance entre leur centre de gravité commun et la base, sera aussi donnée; mais la somme des sinus est aussi donnée par l'hypothèse. Donc la distance entre leur centre de gravité commun et la base sera aussi donnée : et par conséquent aussi la distance entre la base et le centre de gravité de la surface courbe du double onglet, puisqu'elle est la même.

Maintenant on démontrera le lemme qui a été supposé, en cette sorte :

Soit FC (fig. 87) une balance horizontale divisée comme on voudra en parties égales ou inégales, aux points Z, où pendent pour poids des

droites perpendiculaires ZY de telle longueur qu'on voudra. Soit enfin le centre de gravité commun de toutes au point T, auquel la balance soit suspendue en équilibre : je dis que la somme des rectangles YZ en FZ, compris de chaque perpendiculaire YZ et de sa distance de l'extrémité de la balance F, est égale à la somme des rectangles compris du bras TF et de chacune des perpendiculaires ZY.

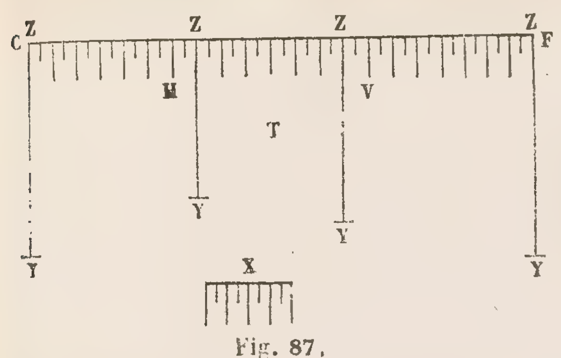


Fig. 87.

Car en prenant la droite X si petite que le rectangle compris de cette droite X et de la plus grande des droites ZY, soit moindre qu'aucun espace donné, et divisant cette droite X en parties égales qui soient en plus grand nombre que la multitude des droites ZY; il est visible que la somme des rectangles compris de chaque ZY et de chacune des petites portions de X, sera moindre qu'aucun espace donné, puisque, par la construction, le rectangle compris de la plus grande des ZY et de l'entière X, est moindre qu'aucun espace donné.

Maintenant soit divisée la balance entière FC en parties égales, chacune à chacune des petites parties de X : donc les points Z se rencontreront aux points de ces divisions, ou la différence n'altérera point l'égalité qui est proposee, puisque la somme de toutes les ZY, multipliées chacune par une de ces petites parties de la balance, sera moindre qu'aucun espace donné. Et par conséquent FC sera une balance divisée en parties égales, et aux points de division pendent des poids; savoir, aux uns les perpendiculaires ZY, et aux autres pendent pour poids des zéros : et le centre de gravité commun de tous ces poids est au point T. Donc, par ce qui a été démontré dans la lettre, la somme de tous les poids multipliés par le bras FT (c'est-à-dire, la somme des rectangles, compris des FT et de chacune des ZY), est égale à la somme triangulaire de tous les poids, à commencer par F. Or, en prenant cette somme triangulaire, il est visible qu'on prendra la première ZY ou VY autant de fois qu'il y a de parties dans la distance FV, et qu'on prendra de même la seconde ZY ou HY autant de fois qu'il y a de parties dans la distance FH, et ainsi toujours. Donc la somme triangulaire de ces poids, à commencer par F, n'est autre chose que la somme des produits des poids, multipliés chacun par son propre bras sur FY, c'est-à-dire, la somme des rectangles FZ en ZY, qui seront partant égaux à la somme des rectangles compris de chaque ZY et du bras commun TF.

Avertissement. — De là paroît la démonstration de cette méthode assez connue, que *la somme des poids, multipliée par le bras commun de tous ensemble, est égale à la somme des produits de chaque poids, multiplié par son propre bras, à l'égard d'un même axe de balancement.*

Je ne m'arrête pas à l'expliquer davantage, parce que je ne m'en sers point : ce n'est pas que je n'eusse pu démontrer par cette méthode les propositions V, XIII, XIV, XV. Mais ma méthode m'ayant suffi partout, j'ai mieux aimé ne point en employer d'autre.

Je dis maintenant que, *si on connoît la somme des carrés* ZY (fig. 88), *on connoîtra aussi le bras* HT *ou* KF, *c'est-à dire*, *la distance entre l'axe* CF *et le centre de gravité* H *de la surface courbe du double onglet: et que la somme des sinus* ZY *étant multipliée par le bras* KF, *sera égale à la somme des carrés des mêmes sinus* ZY (fig. 88).

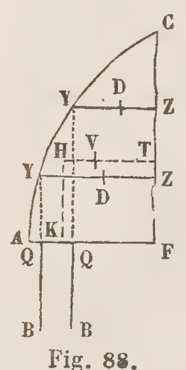


Fig. 88.

Car en menant de tous les points Y les perpendiculaires YQ sur la base AF, et en les prolongeant de l'autre côté de la base jusqu'en B, en sorte que chaque QB soit égale à chaque ZY : il est visible que le même bras HT ou KF, qui mesure la distance d'entre l'axe et le centre de gravité H de la surface courbe du double onglet, mesurera aussi la distance qui est entre le même axe CF et le centre de gravité de toutes les perpendiculaires QB, placées comme elles se trouvent, par la même raison qu'en l'article précédent : savoir, que chaque QB est toujours en même distance de l'axe CF, que la perpendiculaire correspondante élevée dans la surface courbe sur le point Y, et qu'elles sont toujours en même raison entre elles.

Or, par le lemme précédent, le centre de gravité commun des perpendiculaires QB, placées comme elles sont, est distant de l'axe CF de telle sorte, que la somme des rectangles QB en QF, compris de chaque QB et de sa distance du point F, est égale à la somme des mêmes QB, multipliée par la distance d'entre leur centre de gravité commun et l'axe. Mais la somme de ces rectangles QB en QF, ou des ZY carré, ou des QB carré (chaque QB étant faite égale à chaque ZY) est connue par l'hypothèse. Donc on connoîtra aussi la somme des droites QB, multipliée par la distance d'entre leur centre de gravité commun et l'axe. Mais la somme des QB ou des ZY est aussi connue par l'hypothèse. Donc on connoîtra aussi la distance d'entre l'axe et le centre de gravité commun des droites QB, placées comme elles sont, c'est-à-dire, la distance d'entre l'axe et le centre de gravité de la surface courbe du double onglet.

Avertissement. — Il faut entendre la même chose du double onglet de la base, et cela se démontrera de même, en mettant simplement *base* au lieu d'*axe*, et *axe* au lieu de *base;* c'est-à-dire que, si on connoît la somme des sinus sur la base et la somme de leurs carrés, et la somme des rectangles compris de chaque sinus et de sa distance de l'axe, on connoîtra aussi la dimension et le centre de gravité de la surface courbe du double onglet de la base.

Or il est visible que les sinus sur la base ne sont autre chose que les distances entre la même base et les sinus sur l'axe, et que les sinus sur l'axe ne sont aussi autre chose que les distances d'entre l'axe et les sinus sur la base.

Donc si on connoît :

1° La somme des sinus sur l'axe;

2° La somme des carrés de ces sinus;

3° La somme des distances entre ces sinus et la base;

4° La somme des carrés de ces distances;

5° La somme des rectangles compris de chaque sinus sur l'axe et de sa distance de la base;

Et qu'on connoisse outre cela la grandeur de la ligne courbe :

On connoîtra aussi la dimension et le centre de gravité, tant de la surface courbe du double onglet de l'axe que de la surface courbe du double onglet de la base.

Et on connoîtra aussi le centre de gravité de la ligne courbe.

Car la ligne courbe multipliée par son bras sur la base, c'est-à-dire, par la distance entre son centre de gravité et la base, est égale à la somme des sinus sur la base; ce qui est visible par ces deux propositions qui sont démontrées dans les choses précédentes : l'une, que la somme des sinus sur la base est égale à la somme triangulaire des portions de la ligne courbe, comprises entre le sommet et chacune des ordonnées à l'axe, à commencer par la base; l'autre, que cette somme triangulaire est égale à la ligne courbe entière multipliée par son bras sur la base.

Et la même chose sera véritable à l'égard de l'axe, en prenant l'*axe* pour *base* et la *base* pour *axe*.

PROPRIÉTÉS

DES SOMMES SIMPLES, TRIANGULAIRES ET PYRAMIDALES.

Avertissement. — On suppose ici que ces trois lemmes soient connus :

I. Si une droite quelconque AF est $\overline{AHF}$ divisée comme on voudra au point H : je dis que AF carré est égal à deux fois le rectangle FA en AH, moins AH carré, plus HF carré.

II. Je dis aussi que AF cube est égal à AH cube, plus HF cube, plus 3AH carré en HF, plus 3HF carré en HA.

III. Je dis que 3AF en HA carré, plus 3AF en HF carré, moins AF cube, moins 2FH cube, sont égaux à 2AH cube.

Première propriété. — *Soit une multitude indéfinie de grandeurs telles qu'on voudra* A, B, C, D, *desquelles on connoisse la somme simple, la somme triangulaire et la somme pyramidale, à commencer par* A : *je dis qu'on connoîtra aussi leur somme triangulaire et pyramidale, à commencer par* D.

Car, soit prise la ligne droite AF (fig. 89) de telle grandeur qu'on voudra, laquelle soit divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points H, et que de tous les points de division on élève des perpendiculaires HD, qui soient entre elles comme les grandeurs proposées ;

c'est-à-dire que la première HD (qui est la plus proche du point A) soit à la seconde HD, comme A est à B, etc.

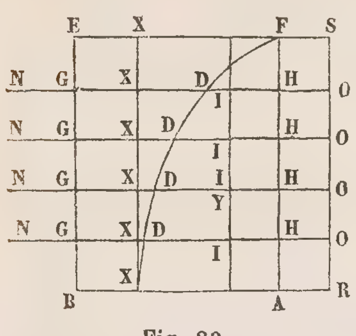


Fig. 89.

Maintenant, puisqu'on connoît tant la droite AF, par la construction, que la somme des droites HD, par l'hypothèse, on connoîtra la somme de tous les rectangles compris de AF et de chacune des HD; mais la somme des rectangles AH en HD est donnée, puisque la première AH étant 1, la seconde AH, 2, etc., la somme des rectangles AH en HD n'est autre chose que la somme triangulaire de toutes les HD, à commencer par A, laquelle est donnée par l'hypothèse. Donc la somme des rectangles restant FH en HD sera donnée, c'est-à-dire, la somme triangulaire des HD, à commencer par F, et par conséquent aussi la somme triangulaire des grandeurs proposées A, B, C, D, à commencer par D.

De même, puisque AF carré est donné, et aussi la somme de tous les HD, il s'ensuit que la somme de tous les AF carré en HD est donnée; c'est-à-dire, la somme des solides compris de chaque HD et de AF carré. Mais, par les lemmes supposés dans l'avertissement, AF carré est égal à deux fois FA en AH, moins AH carré, plus HF carré; et cela est toujours vrai, quelque point que l'on considère d'entre les points H : donc tous les DH en AF carré sont égaux à deux fois tous les DH en HA en AF, moins tous les DH en HA carré, plus tous les DH en HF carré : mais tous les HD en AH en AF sont donnés (puisque AF est donnée, et aussi tous les AH en HD, comme on vient de voir), et tous les DH en AH carré sont aussi donnés, puisque c'est la même chose que la somme pyramidale des HD, à commencer par A, laquelle est donnée par l'hypothèse. Donc aussi tous les restans, savoir, tous les DH en HF carré, seront par conséquent donnés; c'est-à-dire, la somme pyramidale des HD, à commencer par F; et partant aussi la somme pyramidale des grandeurs proposées, à commencer par la dernière D. Ce qu'il falloit démontrer.

IIe PROPRIÉTÉ. — *Les mêmes choses étant posées : si on ajoute à chacune des grandeurs proposées* A, B, C, D, *une même grandeur commune* E, *laquelle soit aussi connue; en sorte que chacune des grandeurs* A, B, C, D, *avec l'ajoutée* E, *ne soit plus considérée que comme une même : et qu'ainsi il y ait maintenant autant de grandeurs nouvelles qu'auparavant : savoir*, A *plus* E, B *plus* E, C *plus* E, D *plus* E, *etc.; je dis que la somme triangulaire et la somme pyramidale de ces grandeurs ainsi augmentées, sera aussi connue, de quelque côté que l'on commence.*

Car, en prenant la figure AHFD comme auparavant, et prolongeant chacune des perpendiculaires DH jusques en O, en sorte que l'ajoutée commune HO soit à chacune des HD, comme la grandeur ajoutée E, est à chacune des autres A, B, C, D, il est visible que, puisque HO est donnée, et aussi la somme de toutes les AH (car elles sont égales à la

moitié de AF carré), la somme des rectangles AH en HO sera donnée; mais la somme des rectangles AH en HD est aussi donnée; donc la somme des rectangles AH en DO est aussi donnée, c'est-à-dire, la somme de tous les rectangles RO en OD, c'est-à-dire la somme triangulaire des OD; et partant aussi la somme triangulaire des grandeurs augmentées A plus E, B plus E, C plus E, D plus E. Ce qu'il falloit premièrement démontrer.

On montrera de même que la somme pyramidale des OD est donnée, ou, ce qui est la même chose, la somme des RO carré en OD : car la somme des RO carré est donnée : savoir, le tiers de RS cube ou AF cube; mais HO est donnée; donc tous les RO carré en OH sont donnés; mais tous les RO carré, ou AH carré en HD, sont aussi donnés, comme il a été dit : donc tous les RO carré en OD sont donnés; donc, etc.

III[e] PROPRIÉTÉ. — *Les mêmes choses étant posées : si les grandeurs proposées* A, B, C, D, *sont des lignes droites ou courbes, desquelles les sommes simples, triangulaires et pyramidales soient données comme il a déjà été supposé, et outre cela la somme simple de leurs carrés, la somme triangulaire de leurs carrés et la somme simple de leurs cubes : je dis que la ligne commune* E *leur étant ajoutée, comme il a été supposé, et qu'ainsi chacune d'elles avec leur ajoutée ne soit plus considérée que comme une seule ligne, la somme des carrés de ces lignes augmentées sera donnée, et aussi la somme triangulaire de leurs carrés et la simple somme de leurs cubes.*

Car, soit comme auparavant les perpendiculaires HD égalées aux lignes proposées A, B, C, D, chacune à la sienne, et la droite HO à la ligne ajoutée E : donc, par l'hypothèse, la simple somme des HD sera donnée, et la somme de leurs carrés, et la somme de leurs cubes, et aussi la somme triangulaire des droites HD, ou la somme des AH en HD, et la somme triangulaire de leurs carrés, ou la somme des AH en HD carré, et la somme pyramidale des HD ou des AH carré en HD.

Il faut maintenant démontrer que la somme des OD carré est donnée, et aussi la somme des OD cube, et enfin la somme triangulaire des OD carré, ou la somme des RO en OD carré. Ce qui sera aisé en cette sorte.

Chaque OD carré étant égal à deux fois OH en HD, plus OH carré, plus HD carré, il s'ensuit que la somme des OD carré sera donnée, si la somme des OH en HD deux fois est donnée, et la somme des OH carré, et la somme des HD carré. Or, puisque OH est donné, et aussi la somme des HD, la somme des rectangles OH en HD est donnée; et partant aussi deux fois la somme de ces mêmes rectangles OH en HD; mais la somme des OH carré est donnée, et aussi la somme des HD carré, par l'hypothèse. Donc la somme des OD carré est donnée. Ce qui est le premier article.

Maintenant, chaque OD cube étant égal à trois fois OH carré en HD, plus trois fois OH en HD carré, plus OH cube, plus HD cube, il s'ensuit que la somme des OD cube sera donnée, si trois fois la somme des OH carré en HD est donnée, plus trois fois la somme des HO en HD carré, plus la somme des HO cube, plus la somme des HD cube. Or, puisque HO carré est donné, et aussi la somme des HD, la somme des HO carré

en HD sera aussi donnée; et partant aussi le triple de cette somme. De même, puisque HO est donné, et aussi la somme des HD carré, la somme des OH en HD carré sera aussi donnée, et partant aussi le triple de cette somme. Mais tous les OH cube sont encore donnés, et tous les HD cube sont aussi donnés par l'hypothèse. Donc la somme des OD cube sera donnée. Ce qui est le second article.

Enfin, pour montrer que la somme des RO en OD carré est donnée, il faut montrer que la somme des RO en OH carré est donnée, plus la somme des RO en HD carré, plus le double de la somme des RO en OH en HD. Or la somme des RO ou AH en HD carré est donnée par l'hypothèse : et puisque HO carré est donné, et aussi la somme de tous les RO, il s'ensuit que la somme de tous les RO en OH carré est donnée : et de même, puisque HO est donné, et aussi tous les AH en HD par l'hypothèse, tous les AH en HD en HO le seront aussi, ou tous les RO en OH en HD; et partant aussi le double de cette somme. Donc tous les RO en OD carré sont aussi donnés. Ce qui est le dernier article.

IVe PROPRIÉTÉ. — *Les mêmes choses étant posées : si on applique à chacune des lignes proposées une ligne quelconque, comme* DN, *qui sera appelée sa* coefficiente, *et que chaque coefficiente* DN *ait telle raison qu'on voudra avec sa ligne* DH*; soit que ces raisons soient partout les mêmes, ou qu'elles soient différentes, et qu'on connoisse la simple somme des coefficientes* DN, *et la simple somme de leurs carrés, et la somme triangulaire des droites* DN, *ou, ce qui est la même chose, la somme des* RO *en* DN *:*

Je dis, 1°, *que si la somme des* HD *en* DN *est donnée, c'est-à-dire la somme des rectangles compris de chaque ligne et de sa coefficiente; aussi la somme des* OD *en* DN *sera donnée, c'est-à-dire la somme des rectangles compris de chaque augmentée et de sa coefficiente.*

Car tous les OD en DN sont égaux à tous les HD en DN (qui sont donnés par l'hypothèse), plus tous les OH en DN, qui sont donnés, puisque OH est donné, et aussi la somme des DN par l'hypothèse.

Je dis, 2°, *que si la somme des* HD *en* DN *carré est donnée, la somme des* OD *en* DN *carré sera aussi donnée.*

Car la somme des OH en DN carré est aussi donnée, puisque OH est donné, et aussi la somme des DN carré, par l'hypothèse.

Je dis, 3°, *que si la somme des* HD *carré en* DN *est donnée, et aussi la somme des* HD *en* DN, *la somme des* OD *carré en* DN *sera aussi donnée.*

Car la somme des HD carré en DN est donnée par l'hypothèse, et la somme des HO carré en DN est aussi donnée (puisque HO carré est donné, et aussi la somme des DN), et la somme des OH en HD en DN est aussi donnée, puisque OH est donné, et aussi la somme des HD en DN par l'hypothèse; et partant aussi le double de cette somme.

Je dis, 4°, *que si la somme triangulaire des rectangles* HD *en* DN *est donnée, ou, ce qui est la même chose, si la somme des* AH *en* HD *en* DN *est donnée, ou des* RO *en* HD *en* DN, *la somme triangulaire des* OD *en* DN *sera aussi donnée; ou, ce qui est la même chose, la somme des* RO *en* OD *en* DN.

Car la somme des RO en OH en DN est aussi donnée, puisque OH est donné, et aussi la somme des RO en DN par l'hypothèse.

Avertissement.—Si au lieu d'ajouter la grandeur commune E, ou HO, à chacune des grandeurs proposées HD, comme on a fait ici, pour en former les toutes OD, on ôte, au contraire, de chacune des grandeurs HD la grandeur commune HI, on conclura des restes DI, tout ce qui a été conclu des entières OD. Et si on prend, au contraire, une grandeur quelconque HG, de laquelle on ôte chacune des grandeurs proposées HD, on conclura encore des restes GD les mêmes choses : et de même si on prend AX (égale à la plus grande des grandeurs proposées) pour la grandeur commune, de laquelle on ôte chacune des autres HD, on conclura toujours la même chose des restes DX. Car il n'y a de différence, en tous ces cas, que dans les signes de *plus* et de *moins;* et la démonstration en sera semblable et n'aura nulle difficulté, principalement après les lemmes marqués dans l'avertissement devant la première de ces propriétés.

D'où il paroît que, s'il y a une ligne quelconque droite ou courbe, donnée de grandeur RS, coupée comme on voudra aux points T, en parties égales ou inégales, et qu'elle soit prolongée du côté de S jusqu'en P, et du côte de R jusqu'en Q, et que les lignes ajoutées SP, QR, soient données de grandeur : si on connoît toutes ces choses, savoir, la somme de leurs carrés, la somme de leurs cubes, la somme triangulaire des mêmes lignes TP, la somme pyramidale des mêmes lignes, et la somme triangulaire de leurs carrés, à commencer toujours du côté de R : il arrivera aussi que les mêmes choses seront données à l'égard des lignes TQ, c'est-à-dire, la somme des lignes TQ, la somme de leurs carrés, la somme de leurs cubes, la somme triangulaire des mêmes lignes TQ, leur somme pyramidale, et la somme triangulaire de leurs carrés, à commencer maintenant du côté de S.

Car en prenant les droites HD de la grandeur, des droites PT; c'est-à-dire, que la première PT ou PR, soit égale à la première HD, c'est-à-dire, à la plus proche du point A, et que la seconde PT soit égale à la seconde HD, etc., et prenant HG égale à PQ : il est visible que (puisque toutes les sommes supposées sont données à l'égard des droites TP, à commencer par la grande RP) les mêmes sommes seront données dans les droites HD qui leur sont égales, à commencer du côté de la grande HD, ou du côté du point A; et par conséquent les mêmes sommes seront données à l'égard des mêmes HD, à commencer du côté de F (par la première de ces propriétés) : et partant les mêmes sommes seront données à l'égard des restes GD, à commencer du côté E; c'est-à-dire que les mêmes choses seront données à l'égard des droites TQ, à commencer du côté de S; puisque chaque TQ est égal à chaque DG, des choses égales étant ôtées de choses égales.

Il faut entendre la même chose dans les portions des figures planes, comme on va voir dans cet exemple.

Soit une figure plane quelconque LZZV (fig. 90) donnée de grandeur, et divisée comme on voudra par les droites YZ, et qu'on y ajoute d'une part la figure MLZ, et de l'autre la figure KVZ, qui soient aussi toutes

deux données de grandeur : je dis que si on connoît la somme des espaces MYZ, et aussi leur somme triangulaire, à commencer du côté de VZ, on connoîtra aussi la somme des espaces KYZ et leur somme triangulaire.

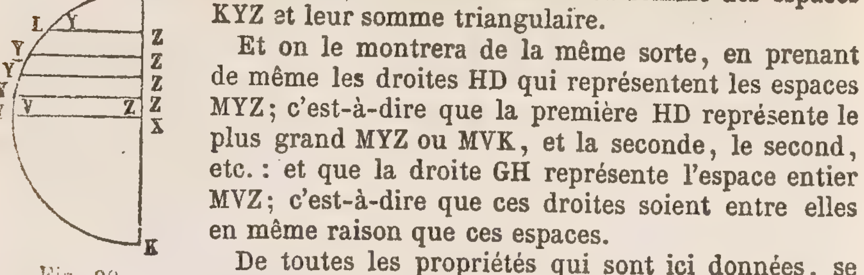


Fig. 90.

Et on le montrera de la même sorte, en prenant de même les droites HD qui représentent les espaces MYZ; c'est-à-dire que la première HD représente le plus grand MYZ ou MVK, et la seconde, le second, etc. : et que la droite GH représente l'espace entier MVZ; c'est-à-dire que ces droites soient entre elles en même raison que ces espaces.

De toutes les propriétés qui sont ici données, se tirent plusieurs conséquences, et entre autres celles-ci.

Que s'il y a un triligne quelconque FDXA (fig. 91) dont on connoisse l'espace, le solide autour de l'axe FA, et le centre de gravité de ce demi-solide, lequel centre de gravité soit Y : je dis que quelque droite qu'on prenne dans le même plan, parallèle à FA, et qui ne coupe point le triligne, comme RS, laquelle soit éloignée de FA d'une distance donnée; et qu'on entende que le plan tout entier soit tourné autour de cette droite RS : on connoîtra aussi le solide formé par le triligne dans ce mouvement, et aussi le solide formé dans le même mouvement par le triligne FDXX (qui est le reste du rectangle circonscrit FAXX), et aussi les centres de gravité de ces solides et de leurs demi-solides.

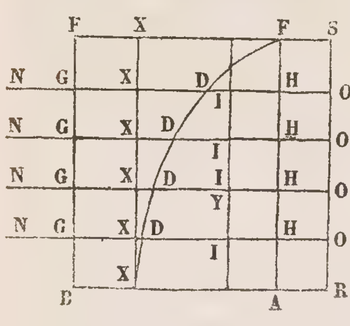


Fig. 91.

Cela se conclut des propriétés précédentes; car on a ici les grandeurs HD, desquelles on connoît la somme simple et la somme de leurs carrés, (puisque l'espace AFDX et son solide autour de AF sont donnés); donc en leur ajoutant, pour grandeur commune, la distance HO (qui est aussi donnée par l'hypothèse), il s'ensuit de ce qui a été montré dans ces propriétés, que la somme des OD carré sera donnée; et partant aussi le solide formé par la figure entière SFDXAR, tournée autour de RS, sera donné. Mais le cylindre formé par le rectangle SFAR sera aussi donné; donc le solide annulaire restant, formé par le triligne FDXA autour de RS, sera aussi donné.

On montrera de même que le solide annulaire formé par le triligne FDXX, sera aussi donné, puisque le cylindre de SXXR est donné.

Et pour leur centre de gravité, cela se montrera ainsi.

Puisque le centre de gravité du demi-solide, formé par le triligne FXA autour de FA, est donné, ou (ce qui est la même chose, en supposant la quadrature du cercle) le centre de gravité du double onglet de l'axe; il s'ensuit que la somme des HD cube est donnée, et aussi la somme triangulaire des HD carré; donc puisque la grandeur commune HO est aussi donnée, la somme des OD cube sera aussi donnée, et aussi la somme triangulaire des OD carré; donc le centre de gravité du demi-

solide de la figure entière SFDXAR, tournant autour de SR d'un demi-tour, sera aussi donné. Mais le centre de gravité du demi-cylindre de SFAR est aussi donné (en supposant toujours la quadrature du cercle quand il le faut); donc le centre de gravité du demi-solide annulaire restant, formé par le triligne FXA autour de la même SR, sera aussi donné; la raison du cylindre au solide annulaire étant donnée.

On le montrera de même du solide annulaire FDXX. Et on montrera aussi la même chose en faisant tourner tout le plan autour de XX ou de BE, etc.

TRAITÉ

DES SINUS DU QUART DE CERCLE.

Lemme. — *Soit* ABC (fig. 92) *un quart de cercle, dont le rayon* AB *soit considéré comme axe, et le rayon perpendiculaire* AC *comme base; soit* D *un point quelconque dans l'arc, duquel soit mené le sinus* DI *sur le rayon* AC; *et la touchante* DE, *dans laquelle soient pris les points* E *où l'on voudra, d'où soient menées les perpendiculaires* ER *sur le rayon* AC : *je dis que le rectangle compris du sinus* DI *et de la touchante* EE, *est égal au rectangle compris de la portion de la base (enfermée entre les parallèles) et du rayon* AB.

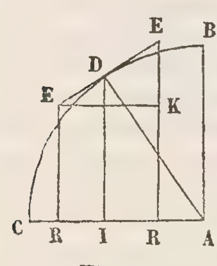


Fig. 92.

Car le rayon AD est au sinus DI, comme EE à RR ou à EK : ce qui paroît clairement à cause des triangles rectangles et semblables DIA, EKE, l'angle EEK ou EDI étant égal à l'angle DAI.

Proposition I. — *La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.*

Proposition II. — *La somme des carrés de ces sinus est égale à la somme des ordonnées au quart de cercle qui seroient comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.*

Proposition III. — *La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme des carrés des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.*

Proposition IV. — *La somme des carré-carrés des mêmes sinus est égale à la somme des cubes des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le même rayon.*

Et ainsi à l'infini.

Préparation a la démonstration. — Soit un arc quelconque BP (fig. 93), divisé en un nombre indéfini de parties aux points D, d'où soient menés les sinus PO, DI, etc. : soit prise dans l'autre quart de cercle la droite AQ, égale à AO (qui mesure la distance entre les sinus extrêmes de l'arc BAPO) : soit AQ divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points H, d'où soient menées les ordonnées HL.

Démonstration de la proposition I. — Je dis que la somme des si-

nus DI (multipliés chacun par un des arcs égaux DD, comme cela s'entend de soi-même) est égale à la droite AO multipliée par le rayon AB.

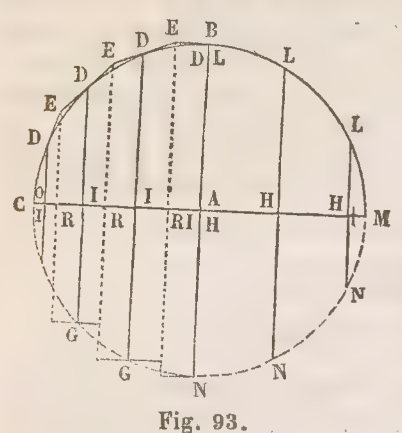


Fig. 93.

Car en menant de tous les points D les touchantes DE, dont chacune coupe sa voisine aux points E, et remenant les perpendiculaires ER : il est visible que chaque sinus DI multiplié par la touchante EE, est égal à chaque distance RR multipliée par le rayon AB. Donc tous les rectangles ensemble des sinus DI, multipliés chacun par sa touchante EE (lesquelles sont toutes égales entre elles) sont égaux à tous les rectangles ensemble, faits de toutes les portions RR avec le rayon AB; c'est-à-dire (puisqu'une des touchantes EE multiplie chacun des sinus, et que le rayon AB multiplie chacune des distances) que la somme des sinus DI, multipliés chacun par une des touchantes EE, est égale à la somme des distances RR ou à AO, multipliée par AB : mais chaque touchante EE est égale à chacun des arcs égaux DD. Donc la somme des sinus multipliés par un des petits arcs égaux, est égale à la distance AO multipliée par le rayon.

Avertissement. — Quand j'ai dit que toutes les distances ensemble RR sont égales à AO, et de même que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie, parce qu'alors la somme de toutes les touchantes, égales entre elles EE, ne diffère de l'arc entier BP, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée : non plus que la somme des RR de l'entière AO.

Démonstration de la proposition II. — Je dis que la somme des DI carré (multipliés chacun par un des petits arcs égaux DD) est égale à la somme des HL ou à l'espace BHQL multiplié par le rayon AB.

Car, en prolongeant, tant les sinus DI, que les ordonnées HL de l'autre côté de la base, jusques à la circonférence de l'autre part de la base qui les coupe aux points G et N, il est visible que chaque DI sera égal à chaque IG, et HN à HL.

Maintenant, pour montrer ce qui est proposé, que tous les DI carré en DD sont égaux à tous les HL en AB, il suffit de montrer que la somme de tous les HL en AB, ou tous les HN en AB, ou l'espace QNN multiplié par AB, est égal à tous les GI en ID en EE, ou à tous les GI en RR en AB (puisque ID en EE est égal à chaque RR en AB). Donc, en ôtant la grandeur commune AB, il faudra montrer que l'espace AQNN est égal à la somme des rectangles GI en RR : ce qui est visible, puisque la somme des rectangles compris de chaque GI et de chaque RR, ne diffère

que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée de l'espace AOGN, qui est égal à l'espace AQNN, puisque la droite AQ est prise égale à la droite AO. Ce qu'il falloit démontrer.

Démonstration de la proposition III. — Je dis que la somme des DI cube est égale à la somme des HL carré, multipliée par le rayon AB.

Car soit décrite la ligne CGNNM de telle nature, que quelque perpendiculaire qu'on mène à la base, comme DIG ou LHN, il arrive toujours que chaque DI carré soit égal à IG en AB, et la démonstration sera pareille à la précédente, en cette sorte.

Il est proposé de montrer que la somme des HL carré en AB, ou des HN en AB carré, ou de l'espace AQNN, multiplié par AB carré, est égale à la somme des DI cube, multipliés par chaque arc DD, ou à la somme des DI carré en DI en EE, ou des GI en AB en RR en AB, ou des AB carré en GI en RR : donc en ôtant de part et d'autre le multiplicateur commun AB carré, il faudra montrer que l'espace AQNN est égal à la somme des rectangles GI en RR; ce qui est visible par la même raison qu'en la précédente.

Démonstration de la proposition IV. — Je dis que la somme des DI carré carré est égale à la somme des HL cube, multipliés par AB.

Car en décrivant une figure CGNM, dont la nature soit telle que, quelque perpendiculaire qu'on y mène, comme DIG, il arrive toujours que DI cube soit égal à IG en AB carré; la démonstration sera semblable à la précédente, parce que cette figure sera toujours coupée en deux portions égales et semblables par l'axe ABN, de même que le demi-cercle CBM; et ainsi à l'infini.

Corollaire. — De la première proposition, il s'ensuit que la somme des sinus verses d'un arc est égal à l'excès dont l'arc surpasse la distance d'entre les sinus extrêmes, multiplié par le rayon.

Je dis que la somme des sinus verses DX (fig. 94) est égale à l'excès dont l'arc BP surpasse la droite AO, multiplié par AB.

Fig. 94.

Car les sinus verses ne sont autre chose que l'excès dont le rayon surpasse les sinus droits : donc la somme des sinus verses DX est la même chose que le rayon AB, pris autant de fois; c'est-à-dire, multiplié par tous les petits arcs égaux DD; c'est-à-dire, multiplié par l'arc entier BP, moins la somme des sinus droits DI, ou le rectangle BA en AO. Et par conséquent la somme des sinus verses DX est égale au rectangle compris du rayon AB et de la différence entre l'arc BP et la droite AO.

Proposition V. — *Le centre de gravité de tous les sinus d'un arc quelconque, placés comme ils se trouvent, est dans celui qui divise en deux également la distance d'entre les extrêmes.*

Soit (fig. 94), un arc quelconque BP, et soit AO la distance entre les sinus extrêmes, coupée en deux également en Y : je dis que le point Y sera le centre de gravité de tous les sinus DI de l'arc BP.

Car si on entend que AO soit divisée en un nombre indéfini de parties égales, d'où soient menées des ordonnées, et que l'on considère chaque somme des sinus qui se trouve entre deux quelconques des ordonnées voisines, il est visible que toutes ces petites sommes particulières de sinus seront toutes égales entre elles, puisque les distances d'entre les ordonnées voisines sont prises toutes égales entre elles, et que chaque somme de sinus est égale au rectangle fait de chacune de ces distances égales, multiplié par le rayon. Donc la droite AO est divisée en un nombre indéfini de parties égales, et ces parties égales entre elles sont toutes chargées de poids égaux entre eux (qui sont les petites sommes de ces sinus, comprises entre les ordonnées voisines).

Donc le centre de gravité de tous ces poids, c'est-à-dire de tous les sinus placés comme ils sont, se trouvera au point du milieu Y. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition VI. — *La somme des rectangles compris de chaque sinus sur la base et de la distance de l'axe, ou du sinus sur l'axe, est égale à la moitié du carré de la distance d'entre les sinus extrêmes sur la base, multipliée par le rayon, lorsque l'arc est terminé au sommet.*

Soit l'arc BP, terminé au sommet B, et soient DS les sinus sur l'axe : je dis que la somme des rectangles DI en IA ou DI en DS, est égale à la moitié du carré de AO multiplié par AB.

Car il a été démontré, à la fin du *Traité des trilignes*, que la somme des rectangles AI en ID, est égale à la somme des sinus ID multipliée par AY (qui est la distance entre le dernier AB et leur centre de gravité commun Y); mais la somme des sinus est égale à AB en AO : donc la somme des rectangles AI en ID est égale à AB en AO en AY, c'est-à-dire à la moitié du carré de AO multiplié par AB.

Proposition VII. — *La somme triangulaire des sinus sur la base d'un arc quelconque, terminé au sommet, à commencer par le moindre des sinus extrêmes, est égale à la somme des sinus du même arc sur l'axe, multipliée par le rayon, ou, ce qui est la même chose, à la différence d'entre les sinus extrêmes sur la base, multipliée par le carré du rayon.*

Je dis que la somme triangulaire des sinus DI, *à commencer du côté de* DO, *est égale à la somme des sinus* DS, *multipliée par le rayon, ou à* BV (*qui est la différence entre* BA *et* DO), *multipliée par* BA *carré, ce qui n'est visiblement que la même chose, puisque la somme des sinus* DS *est égale au rectangle* VB *en* BA, *par la première de ce traité.*

Car la somme triangulaire des sinus DI, à commencer par DO, n'est autre chose, par la définition, que la simple somme de tous les DI compris entre les extrêmes BA, DO : plus la somme de tous les DI, excepté le premier DO; c'est-à-dire, compris entre le second QT et AB, et ainsi de suite : mais la somme des sinus compris entre DO et BA, est égale à OA ou PV en AB; et la somme des sinus compris entre DT et AB, est de même égale au rectangle TA ou QS en AB, et ainsi toujours. Donc la somme triangulaire des sinus DI, à commencer par DO, est égale à la somme des sinus PV, QS, DS, etc., multipliée par AB. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition VIII. — *La somme pyramidale des sinus d'un arc quelconque terminé au sommet, à commencer par le moindre, est égale à la somme des sinus verses du même arc multipliée par le carré du rayon, ou, ce qui est la même chose, à l'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes, multiplié par le cube du rayon.*

Je dis que la somme pyramidale des sinus DI, *à commencer par* DO, *est égale à la somme des sinus verses* DX, *multipliée par* BA *carré, ou, ce qui est la même chose, par le corollaire, à l'arc* BP, *moins la droite* AO *en* AB *cube.*

Car cette somme pyramidale n'est autre chose que la somme triangulaire des sinus DI compris entre PO et AB, plus la somme triangulaire de tous les sinus compris entre DT et AB, et ainsi de suite : mais la première de ces sommes triangulaires est égale, par la précédente, à BV ou PX en AB carré; et la seconde de ces sommes triangulaires est égale, par la même raison, à BZ ou QX en AB carré. Donc toutes les sommes triangulaires ensemble, c'est-à-dire, la somme pyramidale des sinus DI, à commencer par DO, est égale à la somme des sinus verses DX multipliée par AB carré. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition IX. — *La somme des espaces compris entre l'axe et chacun des sinus d'un arc terminé au sommet, est égale, étant prise quatre fois, au carré de l'arc; plus le carré de la distance entre les sinus extrêmes, multipliés chacun par le rayon.*

Je dis que la somme des espaces DIAB, *prise quatre fois, est égale au carré de l'arc* BP, *multiplié par* AB, *plus le carré de la droite* AO, *multiplié aussi par* AB.

Car ces espaces DIAB ne sont autre chose que les secteurs ADB, plus les triangles rectangles AID. Or chaque secteur ADB est égal à la moitié du rectangle compris de l'arc BD et du rayon : donc le secteur pris deux fois, est égal au rectangle compris de l'arc et du rayon : et partant tous les secteurs ensemble pris deux fois, sont égaux à tous les arcs BD, multipliés par AB, ou à la moitié du carré de l'arc entier BP, multiplié par AB (puisque tous les arcs ensemble BD sont égaux à la moitié du carré de l'arc entier BP, parce qu'il est divisé en parties égales). Donc la somme des secteurs, prise quatre fois, est égale au carré de l'arc BP, multiplié par le rayon. Et chaque triangle rectangle AID est la moitié du rectangle de AI en ID; et partant tous les triangles ensemble AID, pris deux fois, sont égaux à tous les rectangles AI en ID, c'est-à-dire, par la cinquième, à la moitié du carré AO en AB : donc quatre fois la somme des triangles AID est égale au carré AO, multiplié par AB. Donc quatre fois la somme des espaces DIAB est égale au carré de l'arc BP, plus au carré de AO, multipliés chacun par AB. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition X. — *La somme triangulaire des mêmes espaces, prise quatre fois à commencer par le moindre sinus, est égale au tiers du cube de l'arc; plus la moitié du solide compris de l'arc et du carré du rayon, moins la moitié du solide compris du moindre sinus et de la distance d'entre les extrêmes et le rayon; le tout multiplié par le rayon.*

Je dis que la somme triangulaire des espaces DIAB, *à commencer par* DO, *prise quatre fois, est égale au tiers du cube de l'arc* BP, *multiplié par* AB; *plus la moitié de l'arc* BP, *multiplié par* AB *cube, moins la moitié du rectangle* AO *en* OD, *multiplié par* AB *carré.*

Car la somme triangulaire de ces espaces, à commencer par DO, se forme en prenant, premièrement, la somme simple de tous ces espaces, dont le quadruple est égal, par la précédente, au carré de l'arc BP, multiplié par AB, plus OA carré multiplié aussi par AB, et en prenant ensuite la somme de tous les espaces, excepté le premier BPOA, savoir, la somme de tous les espaces BQTA, BDIA, etc. : donc le quadruple est égal, par la précédente, à l'arc BQ carré, multiplié par AB, plus TA carré multiplié par AB; et ainsi toujours. Donc quatre fois cette somme triangulaire des espaces BDIA est égale à la somme de tous les arcs BD carré multipliés par AB, c'est-à-dire au tiers du cube de l'arc entier BP, multiplié par AB, plus la somme de tous les IA carré, ou de tous les DS carré (qui sont les sinus sur l'axe) multipliés par AB. Mais la somme des sinus DS carré est égale à l'espace BPV, multiplié par AB (par la seconde de ces propositions) : et en prenant AB pour commune hauteur, la somme des DS ou IA carré multipliés par AB, sera égale à l'espace BPV multiplié par AB carré.

Donc la somme triangulaire de tous les espaces DIAB est égale au tiers du cube de l'arc BP multiplié par AB; plus à l'espace BPV, multiplié par AB carré; mais l'espace BPV est égal au secteur BPA, moins le triangle AVP, c'est-à-dire à la moitié du rectangle compris de l'arc BP et du rayon BA, moins la moitié du rectangle de AO en OP. Donc cette somme triangulaire est égale au tiers du cube de l'arc BP, multiplié par AB, plus la moitié de l'arc multiplié par AB cube, moins la moitié de AO en OD, multiplié par AB carré. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition XI. — *La somme triangulaire des carrés des sinus d'un arc quelconque, terminé au sommet, à commencer par le moindre sinus, est égale, étant prise quatre fois, au carré de l'arc, plus au carré de la distance entre les sinus extrêmes, multipliés chacun par le carré du rayon.*

Je dis que la somme triangulaire des DI *carré, prise quatre fois, à commencer par* DO, *est égale au carré de l'arc* BP, *plus au carré de la droite* AO, *multipliés chacun par* AB *carré.*

Car cette somme triangulaire des DI carré se trouve, en prenant premièrement la simple somme de tous les DI carré, qui est égale, par la seconde, à l'espace BDOA multiplié par AB, et en prenant ensuite la somme des mêmes carrés, excepté le premier DO, savoir, QT carré, DI carré, etc., qui sont égaux, par la même seconde, à l'espace QTAB, multiplié par AB; et ainsi toujours. Donc la somme triangulaire de tous les DI carré est égale à la somme des espaces DIAB, multipliée par AB : donc aussi leurs quadruples seront égaux; mais la somme de ces espaces, prise quatre fois, est égale au carré de l'arc BP, plus au carré AO, multipliés par AB : et en multipliant encore le tout par AB, la somme des espaces DIAB, prise quatre fois, et multipliée par AB, sera égale au carré de l'arc BP, plus au carré AO, multipliés par AB carré. Donc

aussi la somme triangulaire des DI carré sera égale au même arc BP carré, plus au même AO carré, multipliés de même par AB carré. Ce qu'il falloit démontrer.

TRAITÉ DES ARCS DE CERCLE.

DÉFINITION. — J'appelle *triligne circulaire* toutes les portions d'un quart de cercle, retranchées par une ordonnée quelconque au rayon.

Soit un quart de cercle ABC (fig. 95), dont A soit le centre, AB un des rayons, qui sera appelé l'*axe;* AC l'autre rayon perpendiculaire au premier, qui sera appelé la *base;* et le point B sera le sommet, ZM une ordonnée quelconque à l'axe. L'espace ZMB sera appelé un *triligne circulaire :* sur quoi il faut remarquer que le quart de cercle entier est aussi lui-même un triligne circulaire.

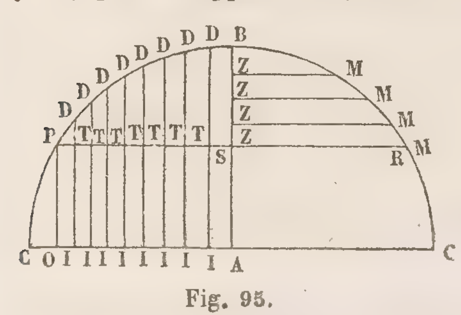


Fig. 95.

Avertissement. — On suppose dans tout ce discours, que la raison de la circonférence au diamètre est connue, et que, quelque point qu'on donne dans le rayon BA, comme S, d'où on mène l'ordonnée SR coupant l'arc en R, l'arc BR retranché par l'ordonnée (et qui s'appelle l'*arc de l'ordonnée*) est aussi donné; et de même, que, quelque point qui soit donné dans l'arc, comme R, d'où on mène RS perpendiculaire à BA, les droites RS, SB sont aussi données.

PROPOSITION I. — *Soit* BSR (fig. 95) *un triligne circulaire quelconque donné, dont l'axe* BS *étant divisé en un nombre indéfini de parties égales en* Z, *les ordonnées* ZM *coupent l'arc en* M; *je dis que toutes ces choses seront aussi données : savoir,* 1° *la somme de tous les arcs* BM; 2° *la somme des carrés de ces arcs;* 3° *la somme des cubes de ces arcs;* 4° *la somme triangulaire de ces arcs;* 5° *la somme triangulaire des carrés de ces arcs;* 6° *la somme pyramidale de ces arcs.*

Car en menant les sinus sur la base de ce même arc, ou de l'arc pareil BP, pris de l'autre part (pour rendre la figure moins confuse), lesquels sinus coupent l'arc en D, la base SP du triligne en T, et le rayon AC en I : il a été démontré dans le *Traité des trilignes*, que la connoissance de toutes les sommes cherchées dans les arcs BM, dépend de la connoissance des mêmes sommes dans les sinus DT, et on en a donné toutes les raisons; en sorte que la connoissance des uns enferme aussi celle des autres. Donc il suffira de montrer que toutes ces sommes sont données dans les sinus DT pour montrer qu'elles le sont aussi dans les arcs BM.

Mais toutes ces sommes seront connues dans les sinus DT, si elles le sont dans les sinus entiers DI, parce que la droite TI ou SA, qui est donnée, comme on l'a vu dans l'avertissement, est une grandeur com-

mune, qui est retranchée de toutes les autres DI : et partant, par le *Traité des sommes simples triangulaires*, etc., ces sommes seront données dans les restes DT, si elles le sont dans les entières DI.

Or, toutes ces sommes sont données dans les droites DI comme il s'ensuit facilement des propositions 1, 2, 3, 7, 8, 11, du *Traité des sinus du quart de cercle.*

Car, 1° la somme des droites DI est donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale au rectangle compris du rayon donné AB, et de la droite donnée AO ou SP.

2° La somme des carrés DI est donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à l'espace donné BPOA multiplié par le rayon donné AB.

3° La somme des DI cubes est donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à la somme des carrés des ordonnées au rayon AC, comprises entre les sinus extrêmes BA, PO, multipliés par AB. Or AB est connu, et aussi la somme des carrés de ces ordonnées, puisque l'espace BPOA est ici donné, et que son solide autour de AO l'est aussi, par Archimède.

4° La somme triangulaire de ces ordonnées DI est aussi donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à la différence d'entre les sinus extrêmes BA, TO, c'est-à-dire, à BS qui est donnée, multipliée par le carré du rayon.

5° La somme pyramidale des mêmes sinus DI est aussi donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à l'excès dont l'arc donné BP surpasse la droite donnée AO ou SP, multiplié par le cube du rayon.

6° Enfin la somme triangulaire des DI carré est donnée, puisqu'il est démontré qu'étant prise quatre fois, elle est égale au carré de l'arc donné BP, plus au carré de la droite donnée AO ou PS, multipliés chacun par le carré du rayon.

Proposition II. — *Soit maintenant dans le diamètre du demi-cercle* ABCF (fig. 96), *la portion* BH *donnée plus grande que le rayon* BA, *laquelle étant divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points* Z, *soient menées les ordonnées* ZD : *je dis que les mêmes sommes que dans la précédente, seront données dans les arcs* BD; *c'est-à-dire, la somme simple des arcs; celle de leurs carrés et celle de leurs cubes; la somme triangulaire des arcs; la somme triangulaire de leurs carrés, et la somme pyramidale des arcs.*

Fig. 96.

Car en achevant de diviser la portion restante HF aux points Z, en parties égales aux parties de la portion HB, et menant les ordonnées ZS : il s'ensuit, par la précédente, que toutes ces sommes sont données, tant dans les arcs FN, compris entre les points F et C, que dans les arcs FS, compris entre les points F et K (puisque FHK est un triligne circulaire, et que le quart de cercle FAC en est un autre, desquels le point F est le sommet). Donc aussi les mêmes sommes seront données dans les arcs FM, puisque si de tous les arcs FN on ôte les arcs FS, il restera les arcs FM.

Donc l'arc CK sera une ligne donnée, divisée comme on voudra en un nombre indéfini de parties aux points D, ou M, ou S (car toutes ces lettres ne marquent qu'un même point), à laquelle sont ajoutées de part et d'autre des portions données FK, CB; et il arrive que toutes les sommes proposées sont données dans les lignes FM : donc elles le seront aussi dans les arcs BM (par ce qui est démontré à la fin des propriétés des sommes simples triangulaires, etc.). Mais les mêmes sommes sont données, par la précédente, dans les arcs BO du quart de cercle BCA : donc, en ajoutant les deux ensemble, les mêmes sommes seront données dans tous les arcs BD, puisque la somme des arcs BD n'est autre chose que la somme des arcs BO, plus la somme des arcs BM. Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire. — De ces propositions, il paroît que, si la portion quelconque AH donnée est divisée en un nombre indéfini de parties égales en Z, d'où soient menées les ordonnées ZM, on connoîtra la somme des arcs FN, et leurs sommes triangulaires, et leurs sommes pyramidales, etc.

Lemme. — *Soit une figure plane quelconque* ACQT (fig. 97), *dont le centre de gravité soit* Y : *soit divisée cette figure en tant de parties qu'on voudra, et telles qu'on voudra, comme en deux parties* AQT, AQC, *desquelles les centres de gravité soient* R, V, *d'où soient menées les perpendiculaires* VS, RK, *sur une droite quelconque* AC (*laquelle* AC *ne coupe pas la figure proposée* ACQT : *mais, ou qu'elle la borne, ou qu'elle en soit entièrement dehors*); *et soit, sur la même* AC, *menée la perpendiculaire* YO *du centre de gravité de la figure entière* ACQ : *je dis que le solide fait de la figure entière* ACQT, *multipliée par son bras* YO, *est égal à tous les solides ensemble faits des parties, multipliées chacune par son bras particulier, c'est-à-dire, au solide de la figure* TAQT, *multipliée par son bras* RK, *plus au solide de la figure* QAC, *multipliée par son bras* VS.

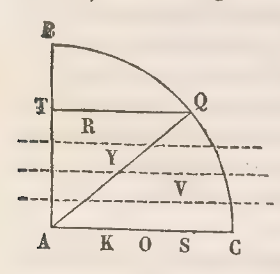


Fig. 97.

Car, si on entend une multitude indéfinie de droites parallèles à AC, et toutes éloignées chacune de sa voisine d'une même distance moindre qu'aucune donnée, et qui coupent ainsi toute la figure, comme il a été supposé dans la méthode des centres de gravité : il est visible, par cette méthode, que la somme triangulaire des portions de cette figure entière ACQT, comprises entre les parallèles voisines, est égale à la figure multipliée par son bras YO; et que de même la somme triangulaire des portions de la petite figure TAQ, comprises entre les mêmes parallèles, est égale à cette figure TAQ, multipliée par son bras RK; et enfin que la somme triangulaire des portions de l'autre petite figure AQC, comprises entre les mêmes parallèles, est égale à cette même portion AQC, multipliée par son bras VS. Mais les portions de la figure entière ACQT, comprises entre les mêmes parallèles, ne sont autre chose que les portions de sa partie ATQ; plus les portions de sa partie AQC, comprises entre les mêmes parallèles : et de même la somme triangulaire des por-

tions de la figure entière n'est autre chose que la somme triangulaire des portions de la partie AQT; plus la somme triangulaire des portions de l'autre figure AQC. Donc aussi la figure entière ACQT, multipliée par son bras YO, est égale à la partie AQT, multipliée par son bras RK, plus à la partie AQC multipliée par son bras VS.

Corollaire. — De là il s'ensuit que la figure entière ATQC multipliée par son bras YO, plus la même figure entière, moins sa première portion AQT, savoir, la portion AQC, multipliée par son bras VS, est égale à la première partie AQT multipliée par son bras RK, plus à la seconde portion de la figure AQC, multipliée par deux fois son bras VS. Ce qui paroît par l'égalité démontrée dans le lemme, puisqu'on ne fait qu'y ajouter de part et d'autre le solide de la partie AQC, multipliée par son bras VS.

Et si la figure étoit divisée en trois parties, comme le secteur AQC (fig. 98), lequel est divisé en trois parties, qui sont les secteurs QAS, SAR, RAC : on montrera de même que la figure entière QAC, multipliée par son bras sur AC, plus la figure entière, moins sa première portion QAS, c'est-à-dire, la figure restante SAC, multipliée par son propre bras sur la même AC, plus la figure entière QAC, diminuée de ses deux premières portions QAS, SAR, c'est-à-dire la portion restante RAC, multipliée aussi par son propre bras sur la même AC, sont égales à la première portion QAS multipliée par son propre bras sur AC, plus la seconde portion SAR multipliée par deux fois son bras sur AC, plus la troisième portion RAC multipliée par trois fois son bras sur AC.

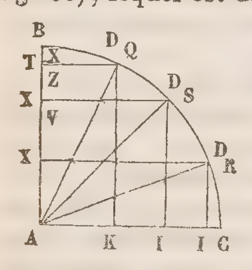


Fig. 98.

Et ainsi à l'infini, en quelque nombre de portions que la figure soit divisée.

Lemme III. — *Soit* (fig. 99) *un secteur quelconque, qui ne soit pas plus grand qu'un quart de cercle*, DAC *divisé en un nombre indéfini de petits secteurs égaux* QAS, SAR, RAC, *desquels les centres de gravité soient* P, *l*, *n*, *et les bras sur* AC *soient* PO, *l*O, *n*O : *je dis que tous les points* P, *l*, *n*, *sont dans un arc de cercle concentrique à l'arc* QDC, *et que les petits arcs nn sont tous égaux entre eux, comme les petits arcs* DD *sont aussi égaux entre eux; et que chacun des petits arcs nn est à chacun des arcs* DD, *comme le rayon* FA *de l'arc* Pln, *au rayon* DA *de l'arc* QDC; *et que le rayon* FA *est les deux tiers du rayon* DA.

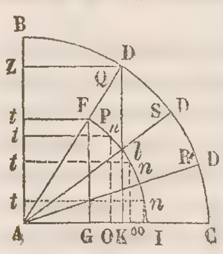


Fig. 99.

Cela est visible de soi-même, puisque ces secteurs étant en nombre indéfini, ils doivent être considérés comme des triangles isocèles, desquels le centre de gravité est aux deux tiers de la droite qui divise l'angle par la moitié.

Corollaire. — De là il paroît que les bras *n*O des secteurs DAD,

sont les sinus de l'arc FnI, dont le rayon est les deux tiers du rayon AD.

Proposition III. — *Soit* (fig. 99) *un quart de cercle donné* ABC, *dans l'arc duquel soit donné le point* Q, *tel qu'on voudra*, *et ayant divisé l'arc* QC *en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points* D, *d'où soient menés les rayons* AD : *je dis que la somme des secteurs* ADC *est donnée*, *et égale au quart du carré de l'arc* QC *multiplié par le rayon* AB.

Car chaque secteur ADC est égal à la moitié de l'arc DC multiplié par le rayon AB. Or puisque l'arc QC est divisé en parties égales, la somme de tous les arcs DC sera égale à la moitié du carré de l'arc entier QC; et partant la moitié de la somme des mêmes arcs DC sera égale au quart du carré de l'arc QC : et en multipliant le tout par AB, la moitié de tous les arcs DC multipliés par AB, c'est-à-dire la somme des secteurs ADC, sera égale au quart du carré de l'arc QC multiplié par AB. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition IV. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme triangulaire des mêmes secteurs* ADC (fig. 99), *à commencer du côté de* QA, *est donnée*, *et égale à la douzième partie du cube de l'arc* QC, *multiplié par le rayon.*

Car la somme triangulaire des secteurs ADC, à commencer du côté de AQ, n'est autre chose que la simple somme de tous les secteurs ADC, prise une fois, c'est-à-dire, par la précédente, le quart de QC carré en AB, plus la simple somme des mêmes secteurs ADC, excepté le premier QAS, c'est-à-dire la somme des secteurs SAC, RAC, etc., qui sont égaux, par la précédente, au quart de SC carré en AB, et ainsi des autres. D'où il paroît que la somme triangulaire des secteurs ADC est égale au quart des carrés de tous les arcs DC. Mais la somme des carrés de tous les arcs DC est égale au tiers du cube de l'arc entier QC; donc la somme triangulaire des secteurs ADC est égale à la douzième partie du cube de l'arc entier QC, multiplié par AB. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition V. — *Soit le point* Q (fig. 99), *donné où l'on voudra dans l'arc* BC *du quart de cercle donné* BAC; *et soit l'arc* QC, *divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points* D, *d'où soient menés les rayons* DA : *je dis que la somme des solides compris de chaque secteur* ADC *et de son propre bras sur* AC, *est connue et égale au tiers de l'arc* DC, *moins le tiers de la droite* CK (*en menant le sinus* QK) *multiplié par* AB *cube.*

Car pour connoître la somme de ces solides, il suffira de connoître la somme de ces autres solides qui leur sont égaux, par le second lemme; savoir, le petit secteur QAS multiplié par son propre bras PO, plus l'autre petit secteur SAR multiplié par deux fois son propre bras lO, plus le petit secteur RAC multiplié par trois fois son propre bras nO, et ainsi toujours; c'est-à-dire, le petit secteur QAS, ou le rectangle compris du rayon AB, et de la moitié du petit arc QS ou DD, multiplié par PO pris une fois, plus par lO pris deux fois, plus par l'autre nO pris trois fois, et ainsi toujours; c'est-à-dire, la somme triangulaire des bras nO, à commencer par PO, multipliés chacun par la moitié des petits arcs DD, et le tout multiplié par AB.

Or le rayon AB est connu : donc, si on connoît encore la somme triangulaire des bras nO (multipliés chacun par la moitié des petits arcs DD), on connoîtra la somme de tous les solides proposés.

Mais, par le lemme précédent, tous ces bras nO sont les sinus de l'arc FPI, desquels la somme triangulaire est connue par le *Traité des sinus*, et égale au solide compris de AF carré, et de la différence dont l'arc FnI surpasse la droite GI (lorsque les sinus nO sont multipliés par les petits arcs nn). Et partant cette somme triangulaire des sinus nO sera à la somme triangulaire des mêmes sinus nO multipliés par les petits arcs DD, en raison donnée ; savoir, comme AF carré à AQ ou AB carré (parce que la somme triangulaire de ces sinus multipliés par ces petits arcs, est un solide duquel les arcs donnent deux dimensions). Donc cette somme triangulaire des sinus nO, multipliés par les arcs DD, est égale à l'arc FnI, moins la droite IG, multiplié par AB carré, ou aux deux tiers de l'arc QC, moins les deux tiers de la droite CK, multipliés par AB carré. Et par conséquent la somme triangulaire des mêmes sinus nO multipliés par la moitié des petits arcs DD, est égale à un tiers de l'arc QC, moins un tiers de la droite CK, multiplié par AB carré. Et en multipliant le tout par AB, le tiers de l'arc QC, moins le tiers de la droite CK, multipliés par AB cube, sera égal à la somme triangulaire des mêmes sinus nO multipliés par la moitié des petits arcs DD, et le tout multiplié par AB ; ce qui est démontré être égal aux solides proposés à connoître.

Proposition VI. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides compris de chaque secteur* ADC (fig. 100) *et de son bras sur* AB, *est donnée, et égale au tiers de la droite* CK *multipliée par* AB *cube.*

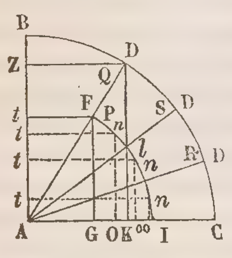


Fig. 100.

Car en menant les bras nt sur AB, qui seront aussi des sinus, on démontrera de même que la somme des solides proposés est égale à la somme triangulaire des bras ou sinus nt, à commencer par Pt, multipliés chacun par la moitié des petits arcs DD, et le tout multiplié par AB.

Et d'autant que la somme triangulaire des sinus nt (multipliés chacun par les petits arcs nn) est égale, par le *Traité des sinus*, à la droite IG multipliée par AF carré : on conclura, comme en la précédente, que la somme triangulaire des mêmes sinus nt multipliés par la moitié des petits arcs DD, et le tout multiplié par AB, est égale au tiers de la droite CK multipliée par AB cube.

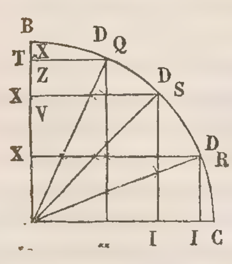
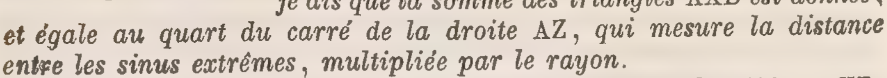


Fig. 101.

Proposition VII. — *Soit donné* (fig. 101) *le même quart de cercle* ABC, *et un point* Q *dans son arc, d'où soient menés les sinus* DX *et les rayons* DA : *je dis que la somme des triangles* AXD *est donnée,*

et égale au quart du carré de la droite AZ, *qui mesure la distance entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.*

Car tous ces triangles AXD sont la moitié des rectangles AX en XD,

la somme desquels est démontrée, dans le *Traité des sinus*, être égale à la moitié du carré de la droite AZ multipliée par AB. Donc, etc.

Proposition VIII. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme triangulaire des mêmes triangles* AXD, *à commencer du côté de* QX, *est donnée et égale à la huitième partie de l'arc* QC, *multipliée par* AB *cube*, *moins la huitième partie du rectangle compris du dernier sinus* QZ *et de* ZA (*qui est sa distance du point* A), *multipliée par* AB *carré.*

Car la somme triangulaire des triangles AXD, à commencer du côté de ZQ, n'est autre chose que la simple somme de tous, c'est-à-dire, par la précédente, un quart de AZ carré multiplié par AB, plus la somme des mêmes triangles AXD, excepté le premier AZQ, qui sera égal, par la précédente, au quart de AV carré, multiplié par AB ; et ainsi toujours. De sorte que la somme triangulaire de ces triangles est égale au quart de la somme des carrés AX multipliés par AB, ou au quart des carrés DI multipliés par AB, ou au quart de l'espace QKC multiplié par AB carré (car la somme des carrés des sinus DI est égale à l'espace QKC multiplié par AB, par le *Traité des sinus*); c'est-à-dire, au quart du secteur AQC multiplié par AB carré, moins le quart du triangle AKQ multiplié par AB carré. Ce qui est la même chose qu'un huitième de l'arc QC, multiplié par AB cube, moins un huitième du rectangle QZ en ZA, multiplié par AB carré.

Proposition IX. — *Soit un quart de cercle* (fig. 102) *donné*, *dans l'arc duquel soit donné le point quelconque* Q, *et l'arc* QC *étant divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points* D, *d'où soient menés les sinus* DX *et les rayons* DA : *je dis que la somme des solides compris de chaque triangle* AXD *et de son bras sur* AC, *est donnée et égale au tiers de la portion* AZ *en* AB *cube*, *moins le tiers de la somme des carrés des ordonnées à la portion* AZ (*qui sont donnés*, *puisque l'espace* AZQC, *et son solide autour de* AZ, *sont donnés par Archimède*), *multipliés par* AB.

Car le bras de chacun de ces triangles sur AC, est les deux tiers de chaque AX; donc la somme des solides proposés n'est autre chose que la somme des triangles AXD multipliés chacun par les deux tiers de son côté AX. Or, chaque triangle rectangle AXD, multiplié par les deux tiers de son côté AX, est égal au tiers de AX carré en XD, c'est-à-dire (chaque AX carré étant AD carré, moins DX carré), au tiers de chaque AD carré en DX, moins le tiers de chaque DX cube. Donc tous les triangles ensemble AXD, multipliés chacun par les deux tiers de AX, sont égaux au tiers de tous les DX multipliés par AD ou AB carré, moins le tiers de la somme de tous les DX cubes; c'est-à-dire (puisque tous les DX sont égaux à AZ en AB, et que tous les DX cubes sont égaux aux carrés des ordonnées à la portion AZ multipliés par AB), au tiers de la portion AZ en AB cube, moins le tiers de la somme des carrés des ordonnées à la portion AZ, multipliés par AB. Ce qu'il falloit démontrer.

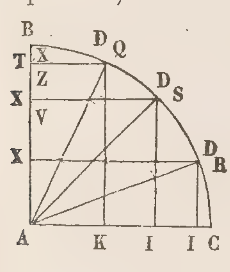


Fig. 102.

Proposition X. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides compris de chacun des triangles* AXD, *multiplie par son bras sur* AB, *est donnée, et égale à un sixième de* CK (*qui est la différence entre les sinus extrêmes*), *multiplié par* AB *cube, moins un sixième de la somme des carrés des ordonnées à la portion* CK (*laquelle est donnée, puisque l'espace* QKC *et son solide sont donnés par Archimède*), *multipliée par* AB *carré.*

Car chacun de ces triangles est la moitié du rectangle AX en XD, et le bras de chacun sur AB est le tiers de XD. Donc la somme de ces triangles multipliés par ces bras est la moitié des rectangles AX en XD, multipliée par un tiers de XD; c'est-à-dire un sixième des solides AX en XD carré, ou (puisque chaque XD carré est égal à AD carré, moins AX carré) un sixième des solides de AX en AD carré, moins un sixième des AX cubes, ou un sixième des solides des DI en AD carré, moins un sixième des DI cubes; c'est-à-dire (puisque la somme des DI est égale à CK en AB, et que la somme des DI cubes est égale à la somme des carrés des ordonnées à la portion CK, multipliées par AB) un sixième de la portion CK en AB cube, moins un sixième de la somme des carrés des ordonnées à la portion CK, multipliée par AB carré.

Corollaire I. — Si le point donné Q est au point B, c'est-à-dire si on considère tout le quart de cercle entier, au lieu de n'en considérer que la portion AZQC : on y conclura les mêmes choses qu'on a faites jusqu'ici; puisque ce n'est qu'un cas de la proposition générale, et que même ce cas est toujours le plus facile.

Il faudra entendre la même chose dans les propositions suivantes :

Corollaire II. — De toutes ces propositions, il s'ensuit que s'il y a un quart de cercle donné (fig. 103) ABC, dans l'arc duquel soit donné le point Q, et que l'arc QC étant divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux en D, on en mène les sinus DX et les rayons DA; il arrivera :

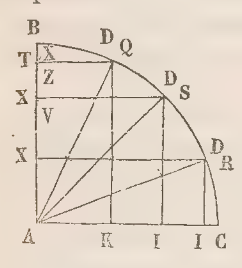
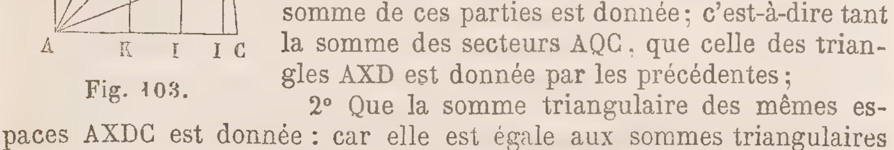


Fig. 103.

1° Que la somme des espaces AXDC sera donnée, puisque chacun de ces espaces est composé du secteur AQC et du triangle AXD, et que la somme de ces parties est donnée; c'est-à-dire tant la somme des secteurs AQC, que celle des triangles AXD est donnée par les précédentes;


2° Que la somme triangulaire des mêmes espaces AXDC est donnée : car elle est égale aux sommes triangulaires de leurs parties qui sont données par les précédentes;

3° Que la somme de ces espaces AXDC, multipliés chacun par son bras sur AC, est donnée : car la somme de leurs parties (savoir de ses secteurs et de ses triangles), multipliées chacune par leurs bras sur AC, est donnée par les propositions précédentes. Et il a été montré, par les lemmes précédens, que la figure entière, multipliée par son bras sur AC, est égale à ses parties multipliées chacune par leurs bras sur la même AC;

4° Que la somme des mêmes espaces AXDC, multipliés chacun par son bras sur AB, est donnée : car elle est égale à la somme de leurs

parties multipliées par leurs bras sur la même AB, qui est donnée par les propositions précédentes.

Proposition XI. — *Soit* (fig. 104) *un quart de cercle donné* MTG, *dans le rayon duquel soit donné le point quelconque* P, *d'où soit menée l'ordonnée* PV, *et la portion* PM *divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points* O, *d'où soient menées les ordonnees* OR : *je dis que la somme des rectangles compris de chaque ordonnée* OR *et de son arc* RM (*compris entre l'ordonnée et le sommet* M), *est donnée.*

Car en prenant dans un autre quart de cercle pareil ABC (fig. 105) le point correspondant Z, et menant les sinus QZ, et divisant l'arc entier BQC aux points D, en un nombre indéfini d'arcs égaux, tant entre eux qu'aux portions égales OO de la droite MP, d'où soient menés les sinus

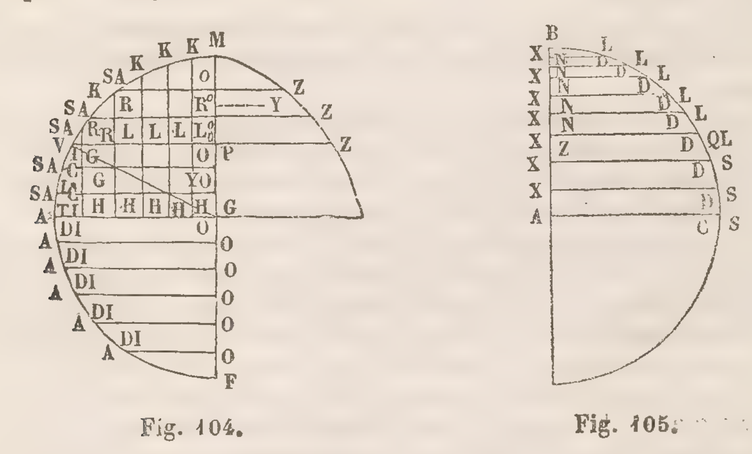


Fig. 104. Fig. 105.

DX : il a été démontré dans le *Traité des trilignes*, proposition XII, que la somme des rectangles compris de chaque OR et de l'arc RM, est égale à la somme des espaces QZLN (compris entre le sinus QZ et chacun des autre sinus DN ou LN, qui sont entre les points Q, B).

Or, la somme de ces espaces est donnée; car si de la somme des espaces AXDC (compris entre AC et le point B), qui est donnée par les propositions précédentes, on ôte la somme des espaces AXSC (compris entre AC et ZQ, qui est aussi donnée par les corollaires précédens : les portions restantes ANLC seront aussi données; c'est-à-dire (en prenant les portions au lieu du total), la somme des portions ZNLQ, plus la portion AZQC prise autant de fois, c'est-à-dire multipliée par l'arc BLQ : mais cette portion AZQC multipliée par l'arc BQ, est donnée, puisque tant la portion que l'arc sont donnés. Donc la somme des portions ZNLQ sera donnée; et partant aussi la somme des rectangles compris de chaque OR et de l'arc RM. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition XII. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides compris de chaque* OR *et du carré de l'arc* RM, *est donnée.*

Car en reprenant la même figure, il a été démontré dans le *Traité des trilignes*, proposition XIII, que la somme de ces solides est double de la somme triangulaire des portions ZNLQ, à commencer par B.

Il suffira donc de montrer que cette somme triangulaire est donnée, et on le montrera en cette sorte.

Si de la somme triangulaire de toutes les portions AXDC, qui est donnée par les corollaires précédens, on ôte la somme triangulaire de toutes les portions AXSC, qui est aussi donnée par les mêmes propositions, la somme triangulaire restante des portions ANLC sera donnée, c'est-à-dire (en prenant les parties au lieu du total), la somme triangulaire des portions ZNLQ, plus la portion AZQC, prise autant de fois, ou multipliée par la moitié du carré de l'arc BQ (car la somme triangulaire d'un nombre indéfini de points est égale à la moitié du carré de leur somme simple); mais la portion AZQC est donnée, et aussi la moitié du carré de l'arc BQ. Donc la somme triangulaire des ZNLQ l'est aussi. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition XIII. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des carrés des ordonnées* RO, *multipliés chacun par l'arc* RM, *est donnée.*

Car, par la proposition XV des trilignes, la somme de ces solides est double de la somme des solides compris de chaque espace ZNLQ, multiplié par son bras sur AB. Donc il suffira de connoître la somme de ces derniers solides. Ce qui se fera en cette sorte.

Si de la somme des solides compris de chaque espace AXDC et de son bras sur AB, qui est donnée par le corollaire précédent, on ôte la somme des solides compris de chaque espace AXSC et de son bras sur AB, on aura la somme des solides compris de chacun des espaces restans ANLC et de son bras sur AB; c'est-à-dire (en prenant les portions au lieu du total) qu'on connoîtra la somme des solides compris de chaque espace ZNLQ et de son bras sur AB, plus l'espace AZQC pris autant de fois, ou multiplié par l'arc BQ, et le tout multiplié par le bras de cet espace AZQC sur AB; car il a été démontré, dans les lemmes de ce traité, que l'espace entier quelconque ANLC, multiplié par son bras sur AB, est égal à la portion AZQC, multipliée par son bras sur AB, plus à la portion restante ZNLQ, multipliée toujours par son bras sur la même AB.

Or on connoît l'espace AZQC, multiplié par BQ, et le tout multiplié par son bras sur AB, puisqu'on connoît l'arc BQ, l'espace AZQC et son bras sur AB. Donc on connoît la somme restante des espaces ZNLQ multipliés chacun par son bras sur AB. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition XIV. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme triangulaire des rectangles compris de chaque ordonnée* OR *et de son arc* RM, *est donnée, ou, ce qui est la même chose, la somme des* PO *en* OR *en* RM.

Car cette somme est égale, par la proposition XIV des trilignes, à la somme des solides compris de chaque espace ZNLQ et de son bras sur ZQ. Donc il suffira de connoître cette dernière somme, ou même il suffira de connoître la somme des solides compris de chacun des mêmes espaces ZNLQ et de son bras sur AC; puisque chaque bras sur ZQ diffère du bras sur AC d'une droite égale à ZA, et que la somme des espaces ZNLQ, multipliés chacun par ZA, est donnée (ZA étant donnée et aussi la somme des espaces ZNLQ). Or on connoîtra cette somme

des espaces ZNLQ, multipliés chacun par son bras sur AC, en cette sorte :

Si de la somme des espaces AXDC, multipliés chacun par son bras sur AC, qui est donnée par le corollaire précédent, on ôte la somme des espaces AXSC, multipliés chacun par leurs bras sur AC, qui est aussi donnée par le même corollaire, la somme restante des espaces ALNC, multipliés par leurs bras sur AC, sera connue; c'est-à-dire (en prenant les portions au lieu du total), la somme des portions ZNLQ, multipliées chacune par son bras sur AC, plus AZQC pris autant de fois (ou multiplié par l'arc BQ), et le tout multiplié par le bras de l'espace AZQC sur AC. Or on connoît ce dernier produit de l'espace AZQC, multiplié de cette sorte (puisqu'on connoît l'espace AZQC, et son bras sur AC, et l'arc QB).

Donc on connoît la somme des espaces ZNLQ multipliés chacun par son bras sur AC. Donc, etc. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition XV. — *Soit donné un demi-cercle* MTF (fig. 106), *dont* G *soit le centre*, *et dont le diamètre* MF *soit divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points* O, *d'où soient menées les ordonnées* OA; *et soit donnée une ordonnée quelconque* PV, *menée du point donné* P *dans le demi-diamètre* GM : *je dis que la somme des rectangles compris de toutes les ordonnées* OI (*qui sont entre l'ordonnée* PV *et le point* F, *qui est l'extrémité de l'autre demi-diamètre* GF) *et de l'arc* IF (*entre chaque ordonnée et le point* F) *est donnée.*

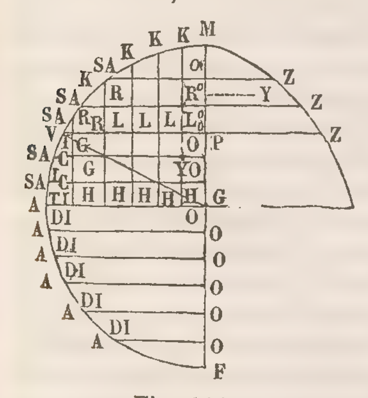


Fig. 106.

Car si on ôte la somme des rectangles OR en RM (compris de toutes les ordonnées, depuis PV, jusqu'à M, et de leurs arcs), qui est donnée par la précédente, de la somme des rectangles OS en SM (compris des ordonnées, depuis le rayon GT, jusqu'à M, et de leurs arcs), qui est aussi donnée par la même précédente : les rectangles restants OC en CM, compris des ordonnées OC en GT et PV, et de leurs arcs, seront connus.

Donc, par les propriétés des sommes simples triangulaires, etc., en considérant l'arc TV comme une ligne donnée, divisée en un nombre indéfini de telles parties qu'on voudra, aux points C, à laquelle sont ajoutées de part et d'autre les lignes données VRM, TBF, et en prenant les droites CO pour *coefficientes :* il s'ensuit que, puisque la somme des rectangles OC en CM est donnée, aussi la somme des rectangles OC en CF (compris de chaque CO et de l'arc CBF) sera donnée.

Mais la somme des rectangles OD en DF (compris des ordonnées entre GT et F, et de leurs arcs DF) est donnée, par la précédente. Donc la somme, tant des rectangles OC en CF, que des rectangles OD en DF, est donnée, c'est-à-dire la somme des rectangles OI en IF. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition XVI. — *Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme triangulaire des mêmes rectangles* OI *en* IF (*compris des ordonnées qui sont entre* P *et* F, *et de leurs arcs jusques à* F) *est donnée*, *et aussi la simple somme des* OI *carré en* IF ; *et la simple somme des* OI *en* IF *carré.*

Car on montrera de même qu'en la précédente, que la somme triangulaire des rectangles OS en SM est donnée (compris des ordonnées qui sont entre GT et M, et de leurs arcs jusqu'à M); et aussi la simple somme de tous les OS carré en SM; et celle de tous les OS en SM carré.

Et on démontrera aussi de même que la somme triangulaire des OR en RM est donnée (compris des ordonnées qui sont entre PV et M, et de leurs arcs); et aussi la simple somme des OR carré en RM; et aussi celle des OR en RM carré.

D'où on conclura, de même qu'en la précédente, que la somme triangulaire des OC en CM (compris des ordonnées qui sont entre G et P, et de leurs arcs jusqu'à M) est donnée; et aussi la simple somme des OC carré en CM; et aussi celle des OC en CM carré.

Et de là on conclura, par la propriété des sommes simples triangulaires, etc., que puisqu'on connoît la somme des ordonnées OC, qui sont les coefficientes, et aussi leurs sommes triangulaires, et aussi la simple somme de leurs carrés (car l'espace GTVP est connu, et partant la somme des ordonnées OC; et le centre de gravité de cet espace GTVP est aussi connu. et partant la somme triangulaire des OC, ou la somme des rectangles GO en OC; et aussi le solide de l'espace GTVP tourné autour de GP, et partant la somme des carrés OC) : il s'ensuit qu'on connoîtra aussi la somme triangulaire des OC en CF, compris des mêmes OC et de leurs arcs jusqu'à F; et aussi la simple somme des OC carré en CF; et aussi celle des OC en CF carré. Mais on connoît, par la précédente, la somme triangulaire des OD en DF, compris des ordonnées qui sont entre G et F, et de leurs arcs jusqu'à F, et aussi la simple somme des OD carré en DF, et celle des OD en DF carré.

Donc, en ajoutant les deux ensemble, on aura la somme triangulaire des OI en IF, compris des ordonnées entre P et F, et de leurs arcs jusqu'à F; et aussi la simple somme des OI carré en IF, et celle des OI en IF carré. Ce qu'il falloit démontrer.

PETIT TRAITÉ DES SOLIDES CIRCULAIRES.

I. Soit donné le point V, où l'on voudra (fig. 107) dans la demi-circonférence donnée MTF; soit le rayon GT perpendiculaire au diamètre MF, et soit menée VP parallèle à GT, et ayant divisé le diamètre entier FM en un nombre indéfini de parties égales aux points O, d'où soient menées les ordonnées OA :

J'ai supposé dans tout le discours précédent, comme je suppose encore ici, qu'on sache que l'espace GTVP est donné, et aussi son centre de gravité; parce qu'en menant le rayon GV, le triangle GPV est donné

et son centre de gravité; et aussi le secteur GTV, et son centre de gravité, comme cela peut être démontré si facilement, et comme cela l'a été par plusieurs personnes, et entre autres par Guldin : en supposant toujours la quadrature du cercle quand il le faut.

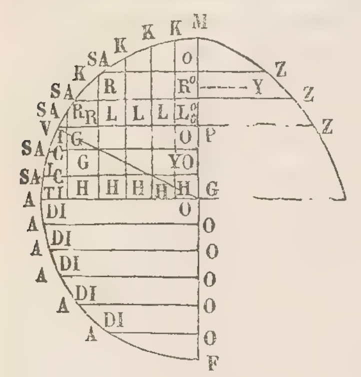


Fig. 107.

J'ai supposé de même que l'espace VPM et l'espace VTFP sont donnés, et aussi leurs centres de gravité; ce qui n'est que la même chose.

J'ai supposé encore que les solides de ces espaces tournés autour du diamètre MF, sont encore donnés; ce qui a été démontré par Archimède.

De toutes lesquelles choses j'ai pris pour supposé qu'on sût que la somme des ordonnées OC entre G et P est donnée, et que la somme de leurs carrés le sera aussi; et de même la somme triangulaire de ces mêmes droites OC, ou la somme des espaces VCOP, ce qui n'est que la même chose (comme on l'a assez vu dans la Lettre à M. de Carcavi); parce que la somme des droites OC n'est autre chose que l'espace GTVP, et que la somme triangulaire des OC est égale à cet espace multiplié par son bras sur GT; et que le solide de la figure GTVP autour de GP étant donné, la somme des cercles dont OC sont les rayons, est donnée; et partant aussi la somme des carrés OC.

Il faut entendre la même chose des ordonnées OR, qui sont entre P et M, et des ordonnées OI qui sont entre P et F.

II. Je dis maintenant que le centre de gravité du solide de l'espace VMP, tourné autour de MP, est donné.

Car, en prolongeant les ordonnées RO jusqu'en Z, en sorte que toutes les OZ soient entre elles comme les carrés OR, l'espace MZP sera une portion de parabole, et son centre de gravité Y sera donné par Archimède : d'où menant YB perpendiculaire à PM, le point B sera visiblement le centre de gravité du solide MVP autour de MP; puisque MP étant une balance, aux points O de laquelle pendent pour poids les perpendiculaires OZ, qu'étant en équilibre au point B, elle sera en équilibre au même point B, si on entend qu'au lieu des perpendiculaires OZ, on y pende pour poids les cercles qui leur sont proportionnels et qui composent ce solide, et dont les OR sont les rayons. Et elle sera encore en équilibre au même point B, si on y pend pour poids les OR carré.

D'où il paroît que la somme triangulaire des OR carré est aussi donnée, puisqu'elle est égale, par la méthode générale des centres de gravité, à la somme des OR carrés, multipliés par leurs bras BP.

Il faut entendre la même chose, par la même raison, des solides des espaces PVTG et PVF, et de la somme triangulaire des carrés de leurs ordonnées.

III. Je dis aussi que le solide de l'espace MVP, tourné autour de PV, sera donné, et aussi son centre de gravité.

Car en divisant PV en un nombre indéfini de parties égales en L, d'où l'on mène les perpendiculaires KLH, il est visible, par ce qui vient d'être dit, que la somme des HK est donnée, et leur somme triangulaire, et la somme de leurs carrés, et la somme triangulaire de leurs carrés. Et partant, en ôtant de toute la grandeur commune HL, la somme des carrés des restantes LK sera donnée, et la somme triangulaire de ces carrés; et partant, le solide de PVM autour de PV sera donné, et aussi son centre de gravité; puisque son bras sur PM multipliant la somme des carrés LK, le produit en est égal à la somme triangulaire des carrés LK. Il faut toujours entendre la même chose des espaces VTGP et VFP.

IV. Je dis de même que la somme des OR carré carré est donnée.

Car en menant la même parabole MZZ, dont le côté droit soit le rayon GM, et qu'ainsi chaque RO carré soit égal à chaque OZ en GM; et partant aussi chaque RO carré carré, à chaque OZ carré en GM carré : il est visible que, puisque tant le plan MZP que son centre de gravité sont donnés, le solide de MZP autour de MP sera aussi donné; et partant aussi la somme des carrés OZ; mais GM carré est aussi donné; donc la somme de OZ carré en GM carré sera donnée, et par conséquent la somme des OR carré carré, qui lui est égale.

V. Je dis enfin que la somme des RO cube sera donnée; ou, ce qui est la même chose, que le centre de gravité du demi-solide de l'espace MVP autour de MP sera donné.

Car si le centre de gravité du demi-solide du secteur MVG, tourné autour de MG, est donné, celui du demi-solide de MVP sera aussi donné; puisqu'on sait que le solide du demi-cône du triangle GVP, tournant autour de GP, est donné, et qu'on connoît la raison de ce cône au solide de MVP. Or, le centre de gravité du demi-solide du secteur MVG autour de MG sera connu, si on connoît le centre de gravité de la surface sphérique de ce demi-solide, décrite par l'arc MV, tournant d'un demi-tour autour de MG. Car de même que Guldin et d'autres ont démontré que, si du centre de gravité de l'arc MV on mène une droite au centre G, les deux tiers de cette droite, depuis G, donneront le centre de gravité du secteur MVG, parce qu'il est composé d'une multitude indéfinie d'arcs semblables à l'arc MV, qui sont entre eux comme les nombres naturels 1, 2, 3, etc.; ainsi, et sans aucune différence, on démontrera que, si du centre de gravité de la surface décrite par l'arc MV, on mène une droite au centre G, les trois quarts de cette droite depuis G donneront le centre de gravité du solide décrit par le secteur MVG, dans le même mouvement; parce que ce solide est composé d'un nombre indéfini de portions de surfaces sphériques, semblables à celle qui est décrite par l'arc MV, qui sont entre elles comme les carrés des nombres naturels 1, 2, 3, etc.

Or, le centre de gravité de la surface de ce demi-solide sera connu (par la fin du *Traité des trilignes*), si en divisant l'arc en un nombre indéfini d'arcs égaux, d'où on mène les sinus sur MP, il arrive qu'on puisse connoître la somme de ces sinus, et la somme de leurs carrés, et la somme des rectangles compris de chaque sinus et de sa distance de VP.

Et toutes ces choses sont connues ; car, par le *Traité des sinus*, l'arc TV étant donné, la somme de ces sinus est donnée ; et aussi la somme des carrés de ces sinus ; et la somme des rectangles compris de ces sinus et de leurs distances de TG. Mais la somme des sinus de l'arc entier TM est donnée ; et la somme des carrés de ces sinus ; et la somme des rectangles compris de chaque sinus et de sa distance de TG Donc, en ôtant les uns des autres, la somme des sinus de l'arc VM sera donnée ; et la somme des carrés de ces sinus ; et la somme des rectangles compris de ces sinus, et de leurs distances de TG ; et partant aussi la somme des rectangles compris des mêmes sinus et de leurs distances de VP, puisqu'ils ne diffèrent pas de la somme des autres rectangles compris des mêmes sinus et de leurs distances de la droite TG ; laquelle somme est donnée, puisque PG est donnée, et aussi la somme des sinus de l'arc VM.

Donc le centre de gravité de cette demi-surface sera donné ; et partant celui du demi-solide du secteur MVG ; et aussi celui du demi-solide MVP ; et partant aussi la somme des OR cube.

Et, par la même raison, la somme des cubes des ordonnées du quart de cercle GTM et GTF, sera donnée ; et partant aussi la somme des cubes des ordonnées de l'espace GTVP, puisque ces ordonnées ne sont que les restes de celles du quart de cercle, quand on en a ôté celles des espaces PVM ; et de même les cubes des ordonnées de l'espace PVF sont donnés, puisque ce n'est qu'y ajouter le quart de cercle.

VI. On démontrera de même que la somme des LK cube est donnée, puisque la somme des HK cube est donnée par l'article précédent, et que la droite HL est une grandeur commune, et ôtée de toutes les HK.

VII. Il s'ensuit aussi de toutes ces choses, que tant dans l'espace TVPG (fig. 108), que dans le quart de cercle entier, la somme des GO cube en OC est donnée, puisqu'en divisant tout le rayon GT en un nombre indéfini de parties égales aux points *h* et *q*, et menant les perpendiculaires *hl* jusqu'à PV, et *qq* jusqu'à l'arc ; et considérant TVPG comme un triligne mixte dont TG et GP sont les droites, et TVP la ligne mixte, composée de l'arc TV et de la droite VP : la somme de tous les GO cube en OC, prise quatre fois, est égale à la somme des carré-carrés des droites *hl* et *qq*. Or la somme des *hl* carré carré est donnée, puisque tant *hl* ou GP, que PV sont données ; et la somme des *qq* carré carré est donnée, par ce qui a été dit ici article IV.

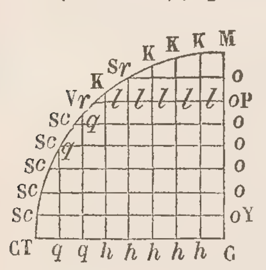


Fig. 108.

Il faut entendre la même chose de tous les GO cube en OS, c'est-à-dire, dans tout le quart de cercle GTM.

VIII. Il paroît aussi, par tout ce qui a été dit, que la somme des GO carré en OS est donnée, puisque étant prise trois fois, elle est égale, par le *Traité des trilignes*, à la somme des cubes des droites *h*K, *qq*, qui est donnée par le cinquième article. Et de même la somme des GO carré en OC sera donnée, puisque étant prise trois fois, elle est égale à

la somme des cubes des droites *hl*, *qq*, qui est donnée, puisque la somme des *qq* cube est donnée par le cinquième article, et que la somme des *hl* cube est donnée, *hl* ou PG et PV étant données.

IX. Il paraît aussi par là que la somme pyramidale des OC est donnée, ou, ce qui est la même chose, la somme triangulaire des espaces VCOP, comme on verra dans l'avertissement suivant, puisque le double en est donné, savoir, GO carré en OC. Il faut dire le même de la somme pyramidale des OS, ou de la somme triangulaire des espaces MOS, et de même pour la somme pyramidale des OD (fig. 109). Et partant (par la fin du *Traité des sommes simples, triangulaires*, etc.), la somme pyramidale, tant des droites OR entre P et M, que des droites OI entre P et F, sera donnée, puisque les espaces MVP, TFG, sont donnés; et qu'ainsi la somme triangulaire des espaces FCO sera donnée. Mais la somme triangulaire des espaces FDO est aussi donnée (puisque ce n'est que la somme pyramidale des droites OD). Donc, en ajoutant les deux ensemble, la somme triangulaire des espaces FIO sera donnée, c'est-à-dire la somme pyramidale des droites OI. On le démontrera de même de celle des droites OR.

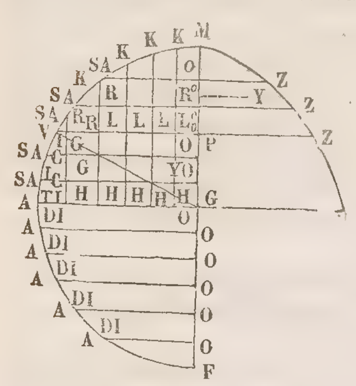


Fig. 109.

Avertissement. — On a dit, en un mot, que la somme pyramidale des droites OC est la même chose que la somme triangulaire des espaces VCOP; et on a dit aussi, dans le commencement, que la somme triangulaire des mêmes OC est la même chose que la simple somme des espaces VCOP; parce que l'un et l'autre est visible, et assez expliqué par la Lettre à M. de Carcavi.

Car la somme triangulaire des OC, à commencer par G, n'est autre chose que la simple somme de ces lignes, c'est-à-dire l'espace GTVP, plus la simple somme de ces mêmes lignes, excepté la première GT, c'est-à-dire l'espace YCVP; et ainsi toujours. De sorte que la somme triangulaire entière est proprement la somme de tous les espaces VCOP.

Et de même la somme pyramidale des mêmes CO n'est autre chose que la somme des sommes triangulaires des mêmes lignes; c'est-à-dire, premièrement, la somme triangulaire de toutes les lignes CO, laquelle, par ce qui vient d'être dit, est la même chose que la simple somme de tous les espaces VCOP : secondement, la somme triangulaire de toutes les lignes OC, excepté la première TG, laquelle n'est autre chose que la somme de tous les espaces VCOP, excepté le premier VTGP : troisièmement, la somme triangulaire des mêmes droites OC, excepté les deux premières TG, YC, ce qui est encore la même chose que la somme des espaces VCOP, excepté les deux premiers VTGP, VCYP; et ainsi toujours. Or, cette manière de prendre les espaces VCOP, en les prenant premièrement tous; et ensuite tous, excepté le premier; et puis tous, excepté les deux premiers, etc. : c'est ce qu'on appelle en prendre la

somme triangulaire; et ainsi la somme pyramidale des OC n'est autre chose que la somme triangulaire des espaces VCOP.

Et de même la somme triangulaire des espaces MRO est la même chose que la somme pyramidale des droites RO, et la somme triangulaire des espaces FIO est la même chose que la somme pyramidale des droites IO.

Toutes ces choses viennent de ce que les droites OI sont des ordonnées, c'est-à-dire qu'elles sont également distantes, et partent des divisions égales et indéfinies du diamètre; ce qui fait que la simple somme des ordonnées est la même chose que l'espace compris entre les extrêmes. Mais cela ne seroit pas véritable des sinus, parce que les distances d'entre les voisins ne sont pas égales entre elles, et qu'ainsi la simple somme des sinus n'est pas égale à l'espace compris entre les extrêmes; à quoi il ne faut pas se méprendre.

TRAITÉ GÉNÉRAL DE LA ROULETTE,

Ou problèmes touchant la roulette, proposés publiquement et résolus par A. Dettonville.

Avertissement. — On suppose ici qu'on sache la définition de la roulette, et qu'on soit averti des écrits qui ont été envoyés sur ce sujet à tous les géomètres pour leur proposer les problèmes suivans.

Problèmes proposés au mois de juin 1658. — *Étant donnée* (fig. 110) *une portion quelconque de la roulette* COS, *retranchée par une ordonnée quelconque* OS *à l'axe* CO : *trouver la dimension et le centre de gravité, tant du triligne* COS, *que de ses demi-solides formés par ce triligne, tourné premièrement autour de sa base* OS, *et ensuite autour de son axe* CO, *d'un demi-tour seulement : en supposant qu'on connoisse la raison de la base de la roulette* AF *à son axe* FC, *c'est-à-dire de la circonférence au diamètre.*

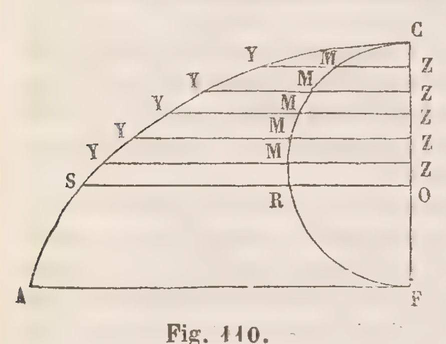


Fig. 110.

Problèmes proposés au mois d'octobre 1658. — *Trouver la dimension et le centre de gravité des surfaces de ces deux demi-solides.*

Résolution des problèmes touchant la dimension et le centre de gravité du triligne et de ses demi-solides.

Il a été démontré à la fin de la Lettre à M. de Carcavi que, pour résoudre tous ces problèmes, il suffit de connoître la dimension et le centre de gravité, tant du triligne COS, que de ses deux doubles onglets, sur l'axe et sur la base. Et il a été démontré dans le *Traité des trilignes* que, pour connoître la dimension et le centre de gravité de ce triligne et de ses doubles onglets, il suffit de connoître ces six choses :

savoir, en divisant l'axe CO en un nombre indéfini de parties égales en Z, d'où soient menées les ordonnées ZY :

1° *La somme des ordonnées* ZY;
2° *La somme de leurs carrés:*
3° *La somme de leurs cubes;*
4° *La somme triangulaire des mêmes lignes* ZY
5° *La somme triangulaire de leurs carrés;*
6° *La somme pyramidale des mêmes lignes* ZY.

Or, pour connoître toutes ces sommes, je me sers d'une seule propriété de la roulette, qui réduit la roulette à son seul cercle générateur : la voici :

Chaque ordonnée à l'axe de la demi-roulette est égale à l'ordonnée du demi-cercle générateur, plus à l'arc du même cercle, compris entre l'ordonnée et le sommet.

Soit CRF *le demi-cercle générateur de la demi-roulette* CYAF; *et que les ordonnées à la demi-ronlette* ZY *coupent la demi-circonférence en* M; *je dis que chaque ordonnée* ZY *est égale à l'ordonnée* ZM, *plus à l'arc* MC.

Cette propriété est trop facile pour s'arrêter à la démontrer. Or, il paroît par là qu'on trouve la roulette entière dans son seul cercle générateur; puisqu'en considérant toujours chaque arc CM et son ordonnée MZ, comme une seule ligne mixte ZMC, on trouvera toutes les ordonnées ZY de la demi-roulette dans toutes les lignes mixtes ZMC.

Donc tous les problèmes proposés touchant la roulette, qui viennent d'être réduits à la connoissance des six sommes des ordonnées à l'axe, se réduiront maintenant à la connoissance des six mêmes sommes des lignes mixtes ZMC : et ainsi tous ces problèmes de la roulette se réduiront aux problèmes suivans, où l'on ne parlera point de roulette, et où l'on ne considérera qu'un seul demi-cercle.

Étant donnés (fig. 111) *un demi-cercle* CRF, *et la portion quelconque* CO *de son diamètre, laquelle soit divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points* Z, *d'où soient menées les ordonnées* ZM, *chacune desquelles, avec son arc* MC, *soit considérée comme une seule et même ligne mixte* ZMC *; trouver :*

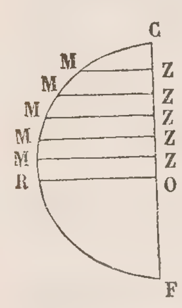


Fig. 111.

1° *La somme des lignes mixtes* ZMC;
2° *La somme des carrés de ces lignes mixtes* ZMC;
3° *La somme des cubes de ces lignes mixtes* ZMC;
4° *La somme triangulaire des lignes mixtes* ZMC;
5° *La somme triangulaire des carrés de ces mêmes lignes* ZMC;
6° *La somme pyramidale des lignes mixtes* ZMC.

Or, tous ces problèmes vont être facilement résolus par le moyen des traités précédens, en cette sorte.

1. *Pour connoître la somme des lignes mixte* ZMC.

Il faut connoître la somme de leurs parties : savoir, la somme des ordonnées ZM, plus la somme des arcs CM. Or, la somme des ordonnées

est connue, puisque l'espace COR est connu : et la somme des arcs CM est donnée par le *Traité des arcs de cercle*. Donc la somme des lignes mixtes ZMC est donnée.

2. *Pour connoître la somme des carrés des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la somme de leurs parties : savoir, la somme des carrés ZM (qui est donnée, puisque l'espace CRO est donné ; et aussi son solide autour de CO, par Archimède) : plus la somme des carrés des arcs CM (qui est donnée par le *Traité des arcs de cercle*) : plus deux fois la somme des rectangles CM en MZ, compris de chaque arc et de son ordonnée (qui est donnée par le *Traité des arcs de cercle*). Donc, puisque toutes les parties sont données, le tout sera donné ; c'est-à-dire, la somme des carrés des lignes mixtes ZMC.

3. *Pour connoître la somme des cubes des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la somme de leurs parties : savoir, la somme des ZM cube (qui est donnée par le *Traité des solides circulaires*) : plus la somme des CM cube (qui est donnée par le *Traité des arcs*) : plus trois fois la somme des ZM carré en MC (qui est donnée par le *Traité des arcs*) : plus trois fois la somme des ZM en MC carré (qui est donnée par le même *Traité des arcs*). Donc, les parties étant données, le tout est donné.

4. *Pour connoître la somme triangulaire des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la somme triangulaire des parties : savoir, la somme triangulaire des ZM (qui est donnée par le *Traité des solides circulaires*) : plus la somme triangulaire des arcs CM (qui est donnée par le *Traité des arcs de cercle*). Donc, les parties étant données, etc.

5. *Pour connoître la somme triangulaire des carrés des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la somme triangulaire des parties : savoir, la somme triangulaire des ZM carré (qui est donnée par le *Traité des solides circulaires*) : plus la somme triangulaire des CM carré (qui est donnée par le *Traité des arcs de cercle*) : plus deux fois la somme triangulaire des rectangles ZM en MC (qui est donnée par le *Traité des arcs*, etc.). Donc, etc.

6. *Pour connoître la somme pyramidale des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la somme pyramidale des parties : savoir, la somme pyramidale des ordonnées ZM (qui est donnée par le *Traité des solides circulaires*) : plus la somme pyramidale des arcs CM (qui est donnée par le *Traité des arcs de cercle*). Donc, etc.

Et par conséquent on connoît toutes les choses proposées à trouver par les premiers problèmes, touchant la dimension et le centre de gravité de la demi-roulette et de ses portions, et de leurs demi-solides.

Je viens maintenant aux derniers, pour lesquels j'ai besoin de ces deux lemmes.

Lemme premier. — *Soit* CDF *un demi-cercle* (fig. 112) *dont* FC *soit le diamètre : soit* FCEZ *un autre demi-cercle, dont* CF *prolongée et doublée soit le diamètre : je dis que, quelque droite qu'on mène du point* F, *comme* FDN, *coupant les deux circonférences en* D, N, *d'où on mène la droite* DC *au point* C, *et les droites* NK, NM, *perpendiculaires, l'une à* FC, *l'autre au rayon* FE, *qui est perpendiculaire à* CZ, *il arrivera toujours que* NM *sera égale à* FK; ce qui est visible : *et que* NK *sera égale à* CD; ce qui se voit par la similitude des triangles rectangles FKN, FDC, ayant les côtés FC, FN égaux entre eux.

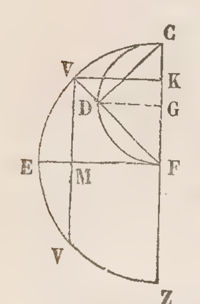


Fig. 112.

Je dis enfin que l'arc CN *sera égal à l'arc* CD.

Car ces arcs sont entre eux en raison composée de la raison des rayons FC, GC (G étant le centre du demi-cercle CDF), et de la raison des angles NFC, DGC. Or un de ces angles est double de l'autre, et réciproquement un des rayons est double de l'autre; et ainsi la raison composée de ces deux raisons, dont l'une est double et l'autre sous-double, est la raison d'égalité.

Lemme II. — *Soit* CDF *un demi-cercle* (fig. 113) *dont* FC *soit le diamètre : soit* FCEZ *un autre demi-cercle, dont* CF *prolongée et doublée soit le diamètre : soit* CHK *une parabole dont* CF *soit l'axe*, C *le sommet, et dont le côté droit soit égal à* CF, *et partant à la base* FK : *soit donnée une portion quelconque* CO *du diamètre, et soit* OR *perpendiculaire au diamètre. Soient accommodées à l'arc* CR *un nombre indéfini de droites* CD, *dont la première soit* 1, *la seconde* 2, *et ainsi toujours selon l'ordre des nombres naturels, toutes terminées au point* C, *et coupant la circonférence aux points* D, *d'où soient menées les droites* DG *perpendiculaires à* CF, *coupant la parabole en* H : *soient aussi menées les droites* DF, *du point* F, *par tous les points* D, *coupant l'arc* CE *en* N, *d'où soient menées* NMV, *parallèles à* CF, *recoupant en* V *la circonférence, et en* M *le rayon* FE *perpendiculaire à* FC :

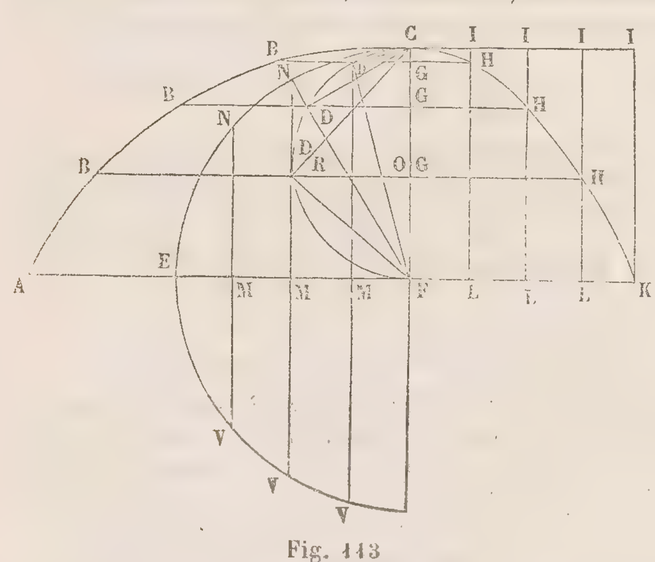


Fig. 113

Je dis que toutes les droites FM *seront égales à toutes les droites* CD, *chacune à la sienne; et qu'ainsi la plus grande* FM *sera coupée en un nombre indéfini de parties égales aux points* M. Cela est visible par le lemme précédent.

Je dis de même que toutes les MN *ou* MV *seront égales à toutes les* FD, *chacune à la sienne.* Ce qui est aussi visible par le lemme précédent.

Je dis de même que les droites FL *seront égales aux droites* CD, *chacune à la sienne, et qu'ainsi la plus grande* FL *sera coupée en un nombre indéfini de parties égales aux points* L.

Car par la nature du cercle chaque CD carré est égal à chaque rectangle FG en CG, c'est-à-dire, par la nature de la parabole, à chaque GH carré; et partant chaque CD est égal à chaque GH ou à chaque FL.

Je dis aussi que tous les rectangles compris de CF *et de chaque* GD, *sont égaux à tous les rectangles* FM *en* MV, *chacun au sien.*

Car FC en GD est égal à CD en DF, c'est-à-dire, par ce qui vient d'être démontré, à FM en MV.

Avertissement. — Je suppose qu'on sache que les mêmes choses étant posées que dans le lemme précédent, si le cercle CDF est le générateur de la demi-roulette CBAF, et qu'on prolonge les droites DG jusqu'à ce qu'elles coupent la roulette au point B : il arrivera que toutes les portions BB de la courbe seront égales entre elles; parce que chaque portion de la courbe CB sera double de chaque droite CD.

C'est cette propriété dont j'ai dit, dans l'*Histoire de la roulette*, que M. Wren l'a produite le premier : je ne m'arrête pas à la démontrer ici, parce que plusieurs personnes l'ont déjà fait; car depuis M. Wren, M. de Roberval en a produit une démonstration et M. de Fermat ensuite, et depuis encore M. Auzoult : et j'ai moi-même démontré la même chose dans un traité à part, où j'ai fait voir que cette propriété dépend immédiatement de celle-ci; savoir, que si la demi-circonférence d'un cercle est divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux, et que de l'extrémité du diamètre on mène des droites à chaque point de division, la somme de ces droites sera égale au carré du diamètre.

Et cette proposition n'est encore que la même chose que celle-ci : la somme des sinus d'un quart de cercle est égale au carré du rayon (ce qui est démontré dans le *Traité des sinus*, proposition I); de sorte que ces trois propositions ne sont presque qu'une même chose.

Résolution des derniers problèmes touchant la dimension et le centre de gravité des surfaces des demi-solides de la roulette.

Il a été démontré, à la fin de la Lettre à M. de Carcavi, que, pour résoudre ces problèmes, il suffit de connoître la dimension et le centre de gravité des surfaces courbes, des deux doubles onglets de l'axe et de la base. Et il a été démontré dans le *Traité des trilignes*, que, pour connoître ces choses, il suffit de connoître les cinq suivantes; savoir, en divisant la ligne courbe CS (fig. 114) de la portion donnée de la demi-

roulette, en un nombre indéfini de parties égales aux points B, d'où soient menés les sinus sur l'axe BG :

1° *La somme des sinus* BG;
2° *La somme des distances* GF;
3° *La somme des* GF *carré*;
4° *La somme des rectangles* BG *en* GF;
5° *La somme des* BG *carré.*

Or, pour connoître toutes ces sommes, je me sers de deux propriétés de la roulette. L'une est celle dont j'ai parlé, qui réduit la roulette au cercle; savoir, que chaque BG (coupant le cercle générateur en D) est égale à la ligne mixte CDG, en considérant la droite GD et l'arc DC comme une seule ligne mixte GDC. L'autre, qu'en menant les droites CD, chaque portion de la roulette CB sera égale à deux fois la droite CD.

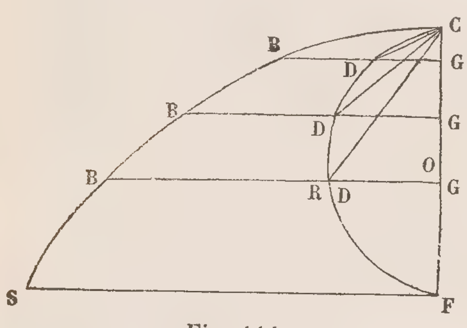


Fig. 114.

D'où il paroît que, puisque la première portion CB de la roulette est 1, que la seconde CB est 2, et ainsi toujours selon l'ordre des nombres naturels : il arrivera aussi que la première CD sera 1, la seconde CD, 2; et ainsi toujours selon la même suite des nombres naturels.

Donc tous les problèmes des surfaces des demi-solides de la roulette qui viennent d'être réduits à la connoissance des droites BG et GF, se réduiront aux problèmes suivans, où l'on ne parlera plus de roulette, et où l'on ne considérera qu'un seul demi-cercle.

Étant donné (fig. 114) *un demi-cercle* CDF *et la portion quelconque* CO *de son demi-diamètre, et l'ordonnée* OR; *et un nombre indéfini de droites* CD, *dont la première soit* 1, *la seconde* 2, *etc., selon l'ordre des nombres naturels, étant accommodées à l'arc* CR, *et toutes terminées au point* C, *et coupant l'arc aux points* D, *d'où soient menées* DG *perpendiculaires à l'axe; chacune desquelles* DG *avec son arc* DC *soit considérée comme une seule et même ligne mixte : il faut trouver :*

1° *La somme des droites* FG;
2° *La somme des* FG *carré;*
3° *La somme des lignes mixtes* GDC;
4° *La somme des carrés de ces lignes mixtes* GDC;
5° *La somme des rectangles compris de chaque ligne mixte* GDC *et de* FG.

Or, tous ces problèmes vont être résolus en reprenant toute la construction du second lemme, en cette sorte :

1. *Pour connoître la somme des lignes* FG.

Il suffit de connoître la somme des lignes LH (fig. 115) qui leur sont égales : or, la somme des droites LH est connue, puisque l'entière FL étant divisée en un nombre indéfini de parties égales, la somme des HL

est la même chose que l'espace parabolique FCHL, compris entre FC et la dernière HL, lequel espace est connu par Archimède.

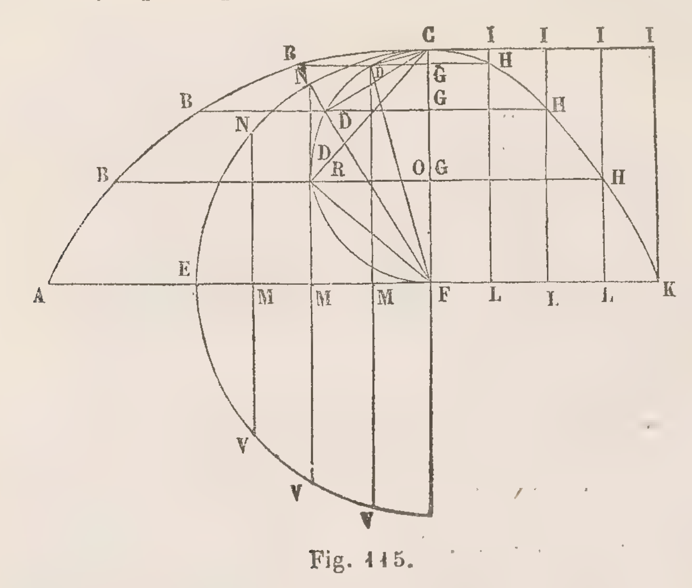


Fig. 115.

2. *Pour connoître la somme des* FG *carré.*

Il suffit de connoître la somme des LH carré, laquelle est connue, puisqu'on connoît par Archimède, tant l'espace FCHL, que son centre de gravité, et partant son solide autour de FL; ce qui donne la somme des carrés LH, et par conséquent des carrés FG.

3. *Pour connoître la somme des lignes mixtes* GDC

Il faut en connoître les parties, savoir la somme des droites GD et la somme des arcs DC.

Or, la somme des droites DG sera connue, si en les multipliant chacune par la droite connue FC, on peut connoître la somme des rectangles FC en DG, ou la somme des rectangles CD en DF, ou la somme des rectangles FM en MV. Mais, puisque l'entière FM est divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points M, d'où sont menées les ordonnées MV : il est évident que la somme des rectangles FM en MV est donnée par le *Traité des solides circulaires;* et par conséquent aussi la somme des rectangles FC en DG, et partant aussi la somme des DG.

Et quant à la somme des arcs DC, elle est la même que la somme des arcs CN. Car puisque FM est divisée en un nombre indéfini de parties égales, d'où sont menées les ordonnées MN, il s'ensuit, par le *Traité des arcs*, que la somme des arcs EN est donnée; et partant aussi la somme des arcs CN, qui sont les restes du quart de 90 degrés. Et par conséquent aussi la somme des arcs CD qui leur sont égaux.

4. *Pour connoître la somme des carrés des lignes mixtes* GDC.

Il faut connoître la somme de leurs parties, savoir, la somme des GD carré, plus la somme des arcs DC carré, plus deux fois la somme des rectangles GD en DC, compris de chaque GD et de son arc DC.

Or, la somme des GD carré est connue, puisqu'elle est égale à la somme des rectangles FGC, ou à la somme des LH en HI, lesquels sont donnés, puisque leur somme doublée est égale à la somme des entières LI carré, qui est donnée, moins la somme des LH carré, qui est aussi donnée, comme il a été dit, moins encore la somme des HI carré, qui est aussi donnée, puisque ce sont les restes de l'entière LI, qui est donnée, par les propriétés des sommes simples, sommes triangulaires, etc.

Et quant à la somme des arcs CD carré, ou des arcs CN carré, elle est visiblement donnée, par le *Traité des sommes simples*, etc., puisque ce sont les arcs restans du quart de cercle, et que la somme des carrés de leurs complémens EN est donnée par le *Traité des arcs.*

Enfin la somme des rectangles de chaque GD et de son arc DC sera connue, si en multipliant le tout par la droite connue CF, il arrive qu'on connoisse la somme des CF en GD en l'arc DC, ou des FM en MN en l'arc NC.

Or, la somme de ces derniers est connue, puisque (chaque arc NC étant égal à CE moins EN) cette somme des FM en MN en NC n'est autre chose que la somme des FM en MN multipliée par l'arc EC (qui est donnée, puisqu'on connoît, tant l'arc EC, que la somme des FM en MN), moins la somme des FM en MN en NE, ou la somme triangulaire des rectangles MN en NE, qui est aussi donnée par le *Traité des arcs de cercle.*

5. *Pour connoître la somme des rectangles compris de chaque ligne mixte* CDG *et de* GF.

Il faut connoître la somme de leurs parties, savoir, la somme des rectangles FG en GD, plus la somme des rectangles FG en arc DC.

Or, on connoîtra la somme des FG en GD, si on connoît la somme des CG en GD (puisque ce sont les restes de la somme des CF en GD qui est connue, puisqu'on connoît, tant la droite CF, que la somme des droites DG); et l'on connoîtra la somme des CG en GD, si, en les multipliant par le carré connu de CF, on peut connoître la somme des CF carré en CG en GD, ou des CF en CG en CF en GD; ou des droites CD carré en CD en DF, ou des droites CD cube en DF, ou des FM cube en MV, laquelle est connue par le *Traité des solides circulaires.*

Et quant à la somme des rectangles FG en arc DC, on démontrera de même qu'elle est connue, si on peut connoître la somme des GC en arc CD; et on connoîtra la somme des GC en arc CD, si, en multipliant le tout par la droite connue CF, on peut connoître la somme des CF en CG en arc DC, ou la somme des droites CD carré en arc CD, ou la somme des FM carré en arc NC, c'est-à-dire (puisque la première FM est 1, la seconde, 2, et ainsi toujours) la somme pyramidale des arcs CN; laquelle somme pyramidale des arcs CN est donnée, par le *Traité des*

sommes simples, *triangulaires*, etc., puisque la somme pyramidale des arcs restans EN est donnée par le *Traité des arcs de cercle*.

Donc on connoît toutes les choses cherchées touchant la dimension et le centre de gravité des surfaces des demi-solides de la demi-roulette et de ses portions. Mais la dimension et le centre de gravité des demi-solides sont déja donnés ; et par conséquent tous les problèmes touchant la roulette sont entièrement résolus.

Il sera sur cela facile à tout le monde de trouver les calculs de tous les cas, par le moyen de ces méthodes.

DIMENSION DES LIGNES COURBES

DE TOUTES LES ROULETTES.

LETTRE DE DETTONVILLE A HUGUENS DE ZULICHEM.

Monsieur,

Comme j'ai su que M. de Carcavi devoit vous envoyer mes solutions des problèmes que j'avois proposés touchant la roulette, je l'ai prié d'y joindre la dimension des courbes de toutes sortes de roulettes, que je lui ai donnée pour vous l'adresser, parce qu'il m'a dit que vous avez témoigné d'avoir quelque envie de la voir. Je voudrois, monsieur, que ce pût vous être une marque de l'estime que j'ai toujours faite de votre mérite. Je croyois qu'on ne pouvoit rien y ajouter : mais vous l'avez encore augmentée par cette horloge incomparable, et par ces merveilleuses dimensions des surfaces courbes des conoïdes que vous venez de produire, et qui sont un sujet d'admiration à tous nos géomètres. Pour moi je vous avoue que j'en ai été ravi, par la part toute particulière que je prends à ce qui peut agrandir votre réputation, et par la passion avec laquelle je suis, etc.

Dimension des lignes courbes de toutes les roulettes.

Je n'ai qu'une seule méthode pour la dimension des lignes de toutes sortes de roulettes, en sorte que, soit qu'elles soient simples, allongées ou accourcies, ma construction est toujours pareille, en cette manière :

Fig. 116.

Soit (fig. 116) une roulette de quelque espèce que ce soit, dont AF soit la base; FC l'axe, et CMF la circonférence du cercle générateur, laquelle ait telle raison qu'on voudra à la base FA : et ayant divisé cette circonfé-

rence en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points M, je mène de tous les points de division des droites MB parallèles à la base, qui coupent la courbe de la roulette, chacune en un point B; et je joins tous les points voisins BB.

Je suppose que les divisions de la circonférence soient en si grand nombre que la somme de ces droites BB (lesquelles sont les sous-tendantes de la roulette) ne diffère de la courbe de la roulette, que d'une ligne moindre qu'aucune donnée.

J'ai aussi besoin qu'on sache (et je le démontrerai en peu de mots) que si on fait, comme la circonférence du cercle générateur, à la base de la roulette, ainsi le rayon FG, à la portion GH de l'axe prise depuis le centre; et que de l'extrémité H de cette portion on mène toutes les droites HM : il arrivera que toutes ces droites seront entre elles comme les sous-tendantes BB de la roulette, et qu'elles les représentent; et c'est pourquoi je les appelle les *représentantes.*

Cela sera visible, si on entend que le cercle générateur soit placé à tous les points B, lequel coupe chaque parallèle BM, voisine au point O, en sorte qu'on n'en considère que les arcs BO, lesquels seront égaux, tant entre eux, qu'aux arcs MM, et les portions BO des parallèles seront égales entre elles. Et ainsi chaque arc BO sera à la portion OB de la parallèle, comme la circonférence FMC à la base AF, ou comme GM à GH. Et il arrivera ainsi que chacun des petits triangles BOB sera semblable à chacun des triangles MGH : chacun des angles HGM étant égal à chacun des angles BOB ou BMC, faits de chaque parallèle et de la circonférence. Et partant BB sera à chaque arc BO, comme chaque HM à MG. Et toutes les BB ensemble, c'est-à-dire la courbe, sera à tous les arcs égaux ensemble OB ou MM, c'est-à-dire à la circonférence CMF, comme la somme des HM à la somme des GM, ou au rayon multiplié par la circonférence CMF. Donc en multipliant les deux premiers termes par le rayon, la courbe multipliée par le rayon est à la circonférence CMF multipliée par le rayon, comme la somme des représentantes HM, au rayon multiplié par la circonférence CMF; mais les deux conséquens sont égaux : donc la courbe multipliée par le rayon est égale à la somme des représentantes HM (multipliées chacune par les petits arcs MM); mais le rayon est donné : donc, si la somme des HM est donnée, la courbe le sera aussi.

Donc toute la difficulté de la dimension des roulettes est réduite à ce problème.

La circonférence d'un cercle donné étant divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux, et ayant mené des droites d'un point quelconque donné dans le plan du cercle à tous les points de division, trouver la somme de ces droites.

Ce problème est aisé à résoudre, quand le point donné est dans la circonférence (comme il arrive quand la roulette est simple; c'est-à-dire, quand la base AF est égale à la circonférence CMF); car alors la somme de ces droites est égale au carré du diamètre, parce que c'est la même chose que la somme des sinus droits du quart d'un autre cercle, dont le rayon sera double.

Et si on résout ce problème quand le point donné est au dehors, il sera résolu en même temps quand le point est au dedans.

Car, s'il y a deux cercles concentriques, dont les circonférences soient divisées chacune en un nombre indéfini d'arcs égaux, la somme des droites menées d'un point quelconque de la grande circonférence à tous les points de division de la petite, sera la même que la somme des droites menées d'un point quelconque, pris dans la petite circonférence, à tous les points de division de la grande; et chacune des droites d'une multitude sera égale à chacune des droites de l'autre multitude, parce qu'elles sont les bases de triangles égaux et semblables. Et ainsi la somme des unes sera égale à la somme des autres, pourvu qu'elles soient multipliées par les mêmes arcs. Mais si on entend qu'elles soient multipliées chacune par les arcs auxquels elles se terminent, alors la somme de celles qui sont menées aux divisions de la grande circonférence, sera la somme des autres, comme la grande circonférence est à l'autre, ou comme le grand rayon au petit. Et ainsi, si la somme des unes est donnée, la somme des autres le sera aussi, les deux cercles étant donnés. Or, j'ai ce théorème général.

La circonférence d'un cercle donné étant divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux, et un point quelconque étant pris où l'on voudra, soit en la circonférence, soit dedans, soit dehors, soit sur le plan, soit hors du plan, d'où soient menées des droites à tous les points de division : je dis que la somme de ces droites sera égale à la surface d'un cylindre oblique donné.

Et je le démontre en cette sorte dans le cas où le point est pris hors du cercle, qui est le seul dont j'aie besoin ici, et duquel s'ensuivent tous les autres.

Fig. 117.

Lemme. — *Soit le cercle donne* ALB (fig. 117), *dont la circonférence soit divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux en* L; *soit le point* H *hors du plan, et élevé perpendiculairement sur un des points* A, *c'est-à-dire, que la droite* AH *soit perpendiculaire au plan du cercle; et soient menées toutes les* HL : *je dis que la somme des droites* HL *multipliées chacune par chaque petit arc* LL, *est égale au quart de la surface du cylindre oblique, qui aura pour base le cercle* AMC, *dont le rayon sera* AB, *et pour axe la droite* HB, *menée à l'autre extrémité du diamètre* AB.

Car soient les côtés du cylindre oblique MN, qui coupent la base supérieure en N; et soient MO les touchantes de la base inférieure, sur lesquelles soient menées les perpendiculaires NO. Il est visible que le

quart de la surface oblique IVTC est composé des parallélogrammes compris des arcs MM et des côtés MN, ou des rectangles compris des mêmes arcs MM et des perpendiculaires NO : mais les arcs MM sont égaux, tant entre eux, qu'aux arcs LL. Donc, si la somme des perpendiculaires NO est égale à la somme des droites HL, ce qui est proposé sera évident.

Or, chaque NO est égal à chaque HL, comme il est visible par l'égalité et la similitude des triangles HBL, NMO.

Car l'axe HB est égal et parallèle au côté NM, et les droites BL, MO, sont parallèles, étant perpendiculaires l'une à MB, l'autre à AL, qui sont parallèles à cause de l'égalité des angles CBM, BAL.

Proposition. — *Soit maintenant* (fig. 118) *le point* H, *donné dans le plan du cercle* ALB *et hors le cercle, et soient menées les* HL *aux points* L *des divisions égales : je dis que leur somme est égale à la surface d'un cylindre oblique.*

Car menons le cercle dont BH est le diamètre, et prenons AV en sorte que BV carré soit égal à BA carré, plus deux fois le rectangle BAH; et menons le cercle dont BV soit le diamètre, et où il arrivera aussi que quelque droite qu'on mène du point B, comme, BLIZ le carré de BI sera égal à BL carré, plus deux fois le rectangle BLZ.

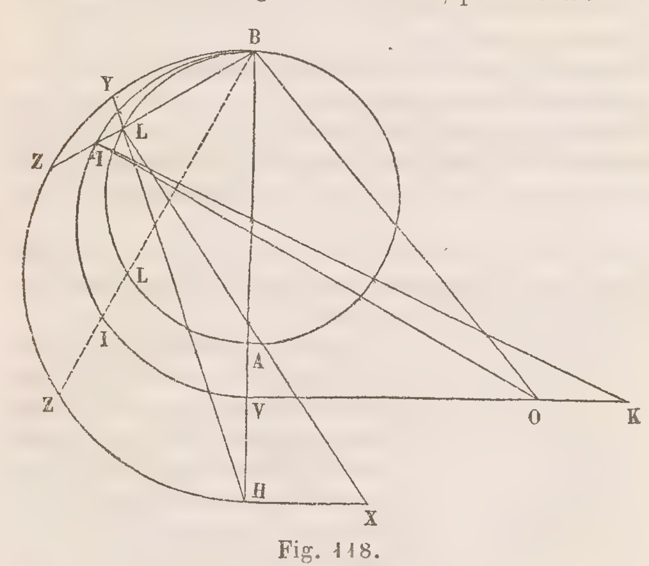


Fig. 118.

Soit aussi élevée VO perpendiculaire au plan du cercle, et soit prise BO égale à BH, et soient menées toutes les droites OI (aux points où les droites BL coupent la circonférence BIV) : je dis que chaque droite OI est égale à chaque droite HL.

Car HB carré est égal à HL carré, plus LB carré, plus deux fois le rectangle HLY (en prolongeant HL jusqu'au cercle BZH), ou à HL carré, plus LB carré, plus deux fois le rectangle BLZ, ou à HL carré, plus BI carré : mais aussi OB carré (qui est le même que HB carré) est égal à OI carré, plus BI carré. Donc OI carré, plus IB carré, est égal à HL carré, plus IB carré : donc aussi OI carré est égal à HL carré; et partant OI à HL.

Donc la somme des OI est la même que la somme des HL, si on les multiplie chacune par les mêmes petits arcs; mais la somme des OI (multipliées par les petits arcs II, lesquels sont égaux entre eux, puis-

que les arcs LL le sont par l'hypothèse), est égale au quart de la surface d'un cylindre oblique, par le lemme, puisque VO est perpendiculaire au plan du cercle BIV.

Donc la somme des HL multipliées par les mêmes arcs II est égale au quart de la même surface. Donc la somme des HL multipliées par les petits arcs LL, est aussi égale à une surface d'un cylindre oblique proportionnée à l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera la même chose, si le point donné X est pris hors du plan, et élevé perpendiculairement sur le point H.

Car en prenant dans la perpendiculaire VO le point K, en sorte que KO carré, plus deux fois le rectangle KOV, soit égal à HX carré : il est visible que toutes les XL seront égales à toutes les KI, chacune à la sienne, puisque chaque XL carré, ou XH carré, plus HL carré, sera égal à chaque KI carré, ou OI carré (qui est égal à HL carré), plus KO carré, plus deux fois KOV, qui sont pris égaux à XH carré.

Donc la somme des XL est égale à la somme des KI, laquelle est égale à la surface d'un cylindre oblique par le même lemme.

Conclusion. — De toutes lesquelles choses il s'ensuit que la somme (fig. 119) des représentantes HM, étant égale à la surface d'un cylindre oblique, elle sera par conséquent égale au rectangle qui a pour hauteur l'axe du cylindre oblique, et pour base la courbe de l'ellipse engendrée dans la surface du cylindre oblique par le plan perpendiculaire à l'axe. Or, la même somme des représentantes est déjà montrée égale à la courbe de la roulette multipliée par le rayon de son cercle générateur. Donc la courbe de la roulette multipliée par le rayon est égale à la courbe d'une ellipse multipliée par l'axe d'un cylindre oblique donné. Donc comme l'axe du cylindre donné est au rayon donné, ainsi la courbe d la roulette est à la courbe d'une ellipse. Ce qu'il falloit démontrer.

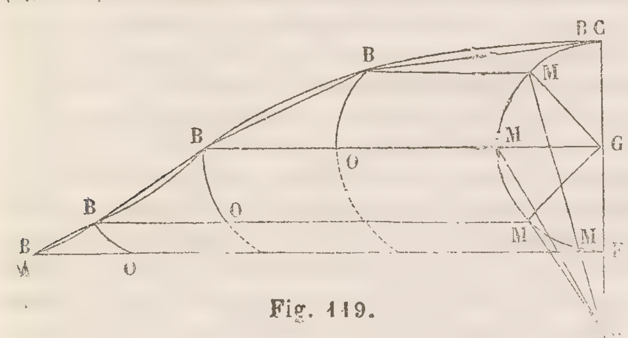


Fig. 119.

En suivant cette méthode, on trouvera le calcul des deux axes de l'ellipse, dont la courbe se compare à celle d'une roulette donnée. Le voici tel que je le fis envoyer à beaucoup de personnes au commencement de septembre 1658, en Angleterre, à Liége et ailleurs, et entre autres à M. de Roberval, et à M. de Sluze, et quelque temps après à M. de Fermat.

Soit fait, comme la circonférence du cercle générateur, à cette même circonférence plus la base de la roulette, ainsi le diamètre du cercle à une autre droite; cette droite soit le grand demi-axe d'une ellipse. Soit fait : comme la circonférence plus la base, à la différence entre la circonférence et la base, ainsi le grand demi-axe, à l'autre demi-axe. La

moitié de la courbe de l'ellipse, qui aura ces deux demi-axes, sera égale à la courbe de la roulette entière, et les parties aux parties.

On conclura aussi de tout ce qui a été démontré, que deux roulettes, l'une allongée, l'autre accourcie, ont leurs lignes courbes égales entre elles, s'il arrive de part et d'autre que la base de l'une soit égale à la circonférence du cercle générateur de l'autre.

Il me seroit aisé de réduire cette méthode à la manière des anciens, et de donner une démonstration pareille à celle que j'ai faite de l'égalité des lignes spirale et parabolique. Mais parce que cela seroit un peu plus long et inutile, je la laisse, quoique je l'aie toute prête; je me contente d'en avoir donné cet exemple de la spirale et de la parabole.

On voit aussi, par toutes ces choses, que plus la base de la roulette approche d'être égale à la circonférence du cercle générateur, plus le petit axe de l'ellipse qui lui est égale, devient petit à l'égard du grand axe : et que, quand la base est égale à la circonférence, c'est-à-dire quand la roulette est simple, le petit axe de l'ellipse est entièrement anéanti; et qu'alors la ligne courbe de l'ellipse, laquelle est toute aplatie, est la même chose qu'une ligne droite, savoir, son grand axe : et de là vient qu'en ce cas la courbe de la roulette est aussi égale à une ligne droite. Ce fut pour cela que je fis mander à ceux à qui j'envoyai ce calcul, que les courbes des roulettes étoient toujours, par leur nature, égales à des ellipses; et que cette admirable égalité de la courbe de la roulette simple à une droite que M. Wren a trouvée, n'étoit, pour ainsi dire, qu'une égalité par accident, qui vient de ce qu'en ce cas l'ellipse se trouve réduite à une droite. A quoi M. de Sluze ajouta cette belle remarque dans sa réponse du mois de septembre dernier, qu'on devoit encore admirer sur cela l'ordre de la nature, qui ne permet point qu'on trouve une droite égale à une courbe, qu'après qu'on a déjà supposé l'égalité d'une droite à une courbe. Et qu'ainsi dans la roulette simple, où l'on suppose que la base est égale à la circonférence du générateur, il arrive que la courbe de la roulette est égale à une droite.

DE L'ESCALIER, DES TRIANGLES CYLINDRIQUES,

ET DE LA SPIRALE AUTOUR D'UN CÔNE.

LETTRE DE DETTONVILLE A SLUZE,

CHANOINE DE LA CATHÉDRALE DE LIÉGE.

Monsieur,

Je n'ai pas voulu qu'on vous envoyât mes problèmes de la roulette, sans que vous en reçussiez en même temps d'autres que je vous ai promis depuis un si long temps, touchant la dimension et le centre de gravité de l'*escalier* et des *triangles cylindriques*. J'y ai joint aussi la résolution que j'ai faite d'un problème, où il s'agit de la dimension d'un solide formé par une spirale autour d'un cône. C'est une solution que j'aime, parce que j'y suis arrivé par le moyen de vos lignes en *perle*, et que

tout ce qui vous regarde m'est cher. Cela me la rend plus considérable que sa difficulté, laquelle je ne puis désavouer, puisqu'elle avoit paru si grande à M. de Roberval : car il dit qu'il avoit résolu ce problème depuis longtemps; mais qu'il n'a jamais rien voulu en communiquer à qui que ce soit, voulant le réserver pour s'en servir en cas de nécessité, de même qu'il en tient encore secrets d'autres fort beaux pour le même dessein. Sur quoi je suis obligé de reconnoître la sincérité de sa manière d'agir en ces rencontres : car aussitôt qu'il sut que je l'avois résolu, il déclara qu'il n'y prétendoit plus, et qu'il n'en feroit jamais rien paroître; par cette raison que n'en ayant jamais produit la solution, il devoit la quitter à celui qui l'avoit produite le premier. Je voudrois bien que tout le monde en usât de cette sorte, et qu'on ne vît point entre les géomètres cette humeur toute contraire de vouloir s'attribuer ce que d'autres ont déjà produit, et qu'on ne trouve qu'après eux. Pour vous, monsieur, vous en êtes bien éloigné, puisque vous ne voulez pas même avoir l'honneur de vos propres inventions : car je crois que pour faire savoir que vous avez trouvé, par exemple, cette parabole, qui est le lieu qui donne les dimensions des surfaces des solides de la roulette autour de la base, il faudroit que ce fût moi qui le disse, aussi bien que les merveilles de votre nouvelle analyse, et tant d'autres choses que vous m'avez fait l'honneur de me communiquer avec cette bonté que vous avez pour moi, qui m'engage d'être toute ma vie, etc.

POUR LA DIMENSION ET LE CENTRE DE GRAVITÉ DE L'ESCALIER

Définition. — Soit (fig. 120 et 121) l'arc de cercle quelconque CQ divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points D, d'où soient menés les rayons DA, et soit entendu le premier secteur ASC, élevé au-dessus du plan du secteur entier AQC, et parallèlement à ce même plan; en sorte que chaque point du secteur ASC élevé réponde perpendiculairement au même secteur ASC dans le plan du cercle; c'est-à-dire, que le point A élevé soit dans la perpendiculaire au plan du cercle, mené du centre A; et de même le point C au-dessus du point C, etc. Et soit la distance d'entre le plan du cercle et le secteur ASC élevé, égale à un des petits arcs DD.

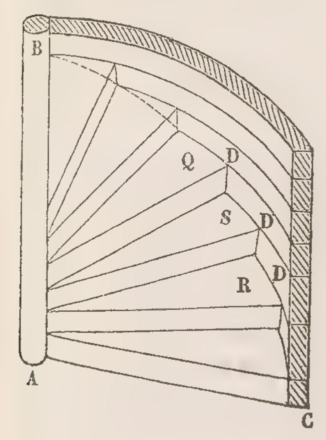


Fig. 121.

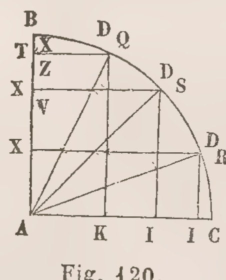


Fig. 120.

Soit le second secteur ARC élevé de même parallèlement au plan de la base, et distant de ce même plan de deux petits arcs DD. Et soit le

troisième secteur élevé de même de la distance de trois petits arcs. Et ainsi toujours.

Le solide, composé de ces secteurs, s'appellera *escalier :* et le rayon AQ s'appellera le *commencement* ou le *premier degré;* et AC sera le dernier degré de l'escalier; et le secteur AQC en sera la base.

Proposition I. — *Trouver la dimension d'un escalier donné, en supposant toujours la quadrature du cercle quand il le faut.*

L'escalier est égal au quart du carré de l'arc de sa base multiplié par le rayon.

Cela est visible, et démontré dans le *Traité des arcs*, proposition III.

Proposition II. — *Trouver le centre de gravité d'un escalier donné.*

Le centre de gravité de l'escalier est élevé au-dessus de la base du tiers de l'arc de la base.

Cela est visible de soi-même, et s'ensuit aussi du *Traité des arcs*, proposition IV.

Et si de ce centre de gravité on abaisse une perpendiculaire sur la base, le point où elle tombera sera donné, puisque les distances, tant de la droite AB que de la droite AC (fig. 122 ou 123) sont données par les propositions V et VI des *arcs*.

Car la distance de la droite AC multipliant l'escalier, est égale à la somme des solides compris de chaque secteur ADC, et de son bras sur AC; laquelle somme est donnée par la proposition V des *arcs*.

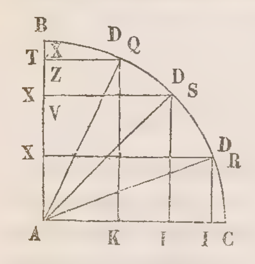


Fig. 122.

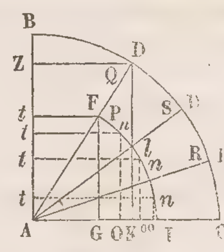


Fig. 123.

Et sa distance de la droite AB multipliant de même l'escalier, est égale à la somme des solides compris de chaque secteur ADC et de son propre bras sur AB; laquelle somme est donnée par la proposition VI.

Le calcul en est trop facile à faire, puisqu'on connoît l'escalier et les sommes de ces solides par les propositions V et VI. Et si on cherche, selon cette méthode, le centre de gravité de l'escalier, qui a pour base le quart de cercle, on trouvera qu'il est élevé au-dessus du plan de la base de la douzième partie de la circonférence : et que le point où tombe cette perpendiculaire sur la base, est distant du premier degré AB, d'une droite qui est au rayon, comme quatre fois le carré du rayon à trois fois le carré de l'arc de 90 degrés : et distant du dernier degré AC, d'une droite qui est à sa distance de AB, comme l'arc de 90 moins le rayon est au rayon.

POUR LA DIMENSION ET LE CENTRE DE GRAVITÉ DES TRIANGLES CYLINDRIQUES.

Définition. — Si trois points quelconques sont pris comme on voudra sur la surface d'un cylindre droit, et qu'on les joigne par des lignes

planes (lesquelles seront nécessairement, ou des droites, ou des arcs de cercle, ou des portions d'ellipse) : la portion de la surface cylindrique comprise de ces trois lignes, s'appellera *triangle cylindrique.*

Et si de deux points pris dans la circonférence de la base inférieure d'un cylindre droit, on mène les côtés du cylindre jusqu'à la base supérieure : la portion de la surface cylindrique comprise entre ces deux côtés et les arcs des deux bases, s'appellera *rectangle cylindrique.*

Avertissement. — Je ne m'arrête pas à démontrer qu'en supposant la quadrature du cercle, on connoît le centre de gravité, et la dimension d'un rectangle cylindrique donné.

Et je ne m'arrête pas aussi à démontrer qu'on aura la dimension et le centre de gravité d'un triangle cylindrique quelconque, si on connoît la dimension et le centre de gravité d'une sorte de triangle cylindrique, que j'appelle de la premiere espèce; savoir, de ceux qui, comme ZFB (fig. 124), sont composés de l'arc BF de la base, d'un côté FZ du cylindre, mené d'une des extrémités F de l'arc BF, et d'une portion d'ellipse ZB, engendrée dans la surface cylindrique par le plan ZBA, passant par le rayon BA, mené de l'autre extrémité B de l'arc BF.

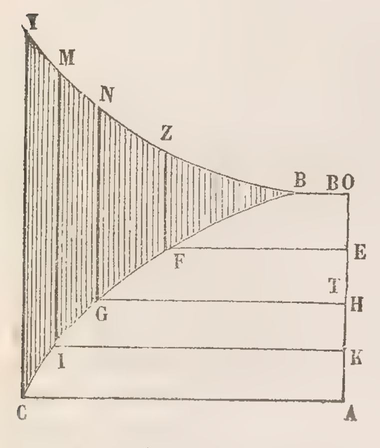


Fig. 124.

Car si on veut s'y appliquer, on verra incontinent qu'un triangle cylindrique quelconque se divisera toujours en plusieurs petits triangles qui seront, ou la somme, ou la différence des triangles cylindriques de cette espèce, ou de rectangles cylindriques : de la même sorte qu'un triangle rectiligne quelconque se divisera toujours en plusieurs petits triangles, lesquels seront les sommes ou les différences de triangles rectangles donnés; et qu'ainsi en connoissant la dimension et le centre de gravité des seuls triangles rectangles, on connoîtroit aussi la dimension et le centre de gravité de toutes sortes de triangles rectilignes donnés.

Ainsi on connoîtra la dimension et le centre de gravité de toutes sortes de triangles cylindriques, si on connoît ces choses, tant dans les rectangles cylindriques (où elles sont connues d'elles-mêmes, comme il est déjà dit), que dans les triangles cylindriques de la première espèce, dans lesquels on va le résoudre dans la proposition suivante.

Proposition. — *Étant donné un triangle cylindrique* ZFB *de la première espèce; en trouver la dimension et le centre de gravité.*

Cette proposition est déjà résolue dans le *Traité des solides circulaires;* car ce triangle cylindrique n'est autre chose que la surface courbe de l'onglet du triligne circulaire BFE. Or, dans ce traité, on a donné la dimension et le centre de gravité de la surface de son double onglet. Et il est visible que le centre de gravité de la surface d'un des onglets est dans la perpendiculaire au plan du triligne, menée du centre de

gravité de la surface du double onglet; de sorte qu'il ne reste qu'à trouver la longueur de cette perpendiculaire; laquelle est aisée, puisque la surface de l'onglet multipliée par cette perpendiculaire est égale à la moitié de la somme des carrés des sinus de l'arc FB (quand le plan qui retranche l'onglet est incliné de 45 degrés : et quand on l'a dans cette inclinaison, on l'a aussi dans toutes les autres, puisqu'elle est toujours en même raison à la hauteur ZF). Or, la moitié de la somme des carrés de ces sinus est connue, et égale (par le *Traité des sinus*, proposition II) à la moitié de l'espace BFE, multiplié par le rayon BA.

On suppose ici que, dans la figure 124, ABC est un quart de cercle, dont A est le centre; et que la surface BFCYZB est une portion de la surface du cylindre droit, retranchée par le plan YZBA, passant par le rayon BA, et formant dans la surface cylindrique la portion d'ellipse BZY.

DIMENSION D'UN SOLIDE FORMÉ PAR LE MOYEN D'UNE SPIRALE AUTOUR D'UN CÔNE.

Soit un cercle donné ABCD (fig. 125), dont A soit le centre, et AB un demi-diamètre; soit BG perpendiculaire au plan du cercle de quelque grandeur que ce soit, par exemple, égale à AB, et soit entendu, en un même temps, la ligne AB, se tourner uniformément à l'entour du centre A, et la ligne BG, se porter en même temps et par un mouvement uniforme le long du demi-diamètre BA; et soit encore entendu en même temps le point B monter uniformément vers G : en sorte qu'en un même temps le point B arrive à l'extrémité de la ligne BG, la ligne BG au centre A, et le demi-diamètre AB au point B d'où il étoit parti.

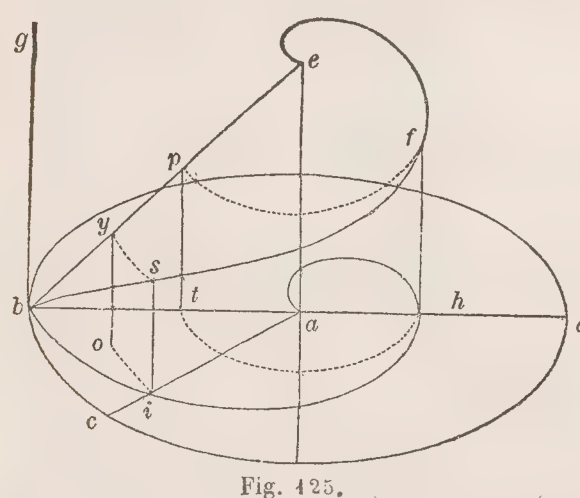


Fig. 125.

Par ces mouvemens, la ligne BG décrira une spirale BIHA dans le plan du cercle; et le point B, en montant, décrira une espèce de spirale en l'air, ou autour d'un cône BFE, qui se terminera au point E, d'où la perpendiculaire AE est égale à BG.

On demande la proportion de la sphère, dont le cercle donné est un grand cercle, avec le solide spiral décrit par ces mouvemens, et terminé par quatre surfaces : savoir, la spirale BHA décrite dans le plan du cercle, la portion de surface conique bornée par la droite BE et par

l'espèce de spirale BFE, le triangle rectiligne BAE, et la surface cylindracée décrite par BG portée autour de la spirale BHA.

Solution. — Soit coupée BA en un nombre indéfini de parties égales aux points O : et soit le point T celui du milieu, d'où soit mené le demi-cercle TH, qui, comme il est aisé de l'entendre, coupera le diamètre prolongé en H au même point où arrive la spirale.

Soit sur ce demi-cercle élevée la surface cylindrique TPFH, qui coupe les surfaces qui bornent le solide, et y donnent pour communes sections TPFH, qui sera composée de quatre lignes : savoir, la ligne TP, qui se trouvera dans le plan BAE, la ligne FH dans la surface cylindracée égale à TP, le demi-cercle PF dans la surface supérieure, et le demi-cercle de la base TH égal au précédent PF, comme tout cela est évident; et ainsi la figure TPFH sera un rectangle cylindrique.

Soit maintenant d'un des points O mené l'arc OI à l'entour du centre A, qui coupe la spirale en I, et soit élevé de même le rectangle cylindrique OYSI : je dis, et cela sera incontinent démontré, que ce rectangle cylindrique OYSI sera au premier PTHF, comme BO carré en OA, à BT carré en TA.

Ce qui étant toujours véritable en quelque lieu que soit le point O : il s'ensuit que tous les rectangles cylindriques ensemble, c'est-à-dire le solide proposé, sera à celui du milieu PTHF pris autant de fois, c'est-à-dire au demi-cylindre qui a le cercle donné pour base, et pour hauteur TP, qui est la moitié du demi-diamètre, comme tous les BO carré en OA ensemble, à BT carré en TA, ou à BT cube pris autant de fois, c'est-à-dire comme la perle du troisième ordre au rectangle de l'axe et de l'ordonnée du milieu : laquelle raison M. de Sluze a donnée, non-seulement dans la perle du troisième ordre, mais encore dans celle de tous les ordres, où cette raison est toujours comme nombre donné à nombre donné.

Donc le solide proposé est au demi-cylindre du cercle donné et de la hauteur TP, en raison donnée; donc il est aussi en raison donnée au cylindre entier de même base et de la hauteur quadruple; savoir, du diamètre entier BD, et par conséquent à la sphère, qui est les deux tiers du cylindre. Ce qu'il falloit démontrer.

Or, que le rectangle cylindrique YOIS soit au rectangle cylindrique PTHF, comme BO carré en OA, à BT carré en TA, cela se prouve ainsi :

Je dis, premièrement, que l'arc OI est à l'arc TH, comme le rectangle BO, OA, au rectangle BT, TA; car les arcs OI, TH, sont en raison composée des demi-diamètres AO, AT, et des angles, ou des arcs BC, BCD, qui sont, par la nature de la spirale, comme CI ou BO, à DH ou BT; donc ces arcs sont en raison composée de BO à BT et de OA à TA, c'est-à-dire comme le rectangle BO, OA, au rectangle BT, TA.

Venons maintenant aux rectangles cylindriques YOIS, PTHF : il est visible qu'ils sont en raison composée des hauteurs et des bases, c'est-à-dire, en raison composée de OY à TP, ou BO à BT, et de l'arc OI à l'arc TH, c'est-à-dire, comme on l'a vu, du rectangle BO, OA, au rectangle BT, TA : mais la raison composée de BO à BT et du rectangle

BO, OA, au rectangle BT, TA, est la même que la raison de BO carré en OA à BT carré en TA. Donc, etc. Ce qu'il falloit démontrer.

Les solides des autres spirales des ordres supérieurs, se trouveront de même par le moyen des lignes en perle des ordres supérieurs.

ÉGALITÉ

DES LIGNES SPIRALE ET PARABOLIQUE.

LETTRE DE DETTONVILLE A M. A. D. D. S

Monsieur,

J'ai reçu la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, avec le petit *Traité de géométrie* qu'il vous a plu m'envoyer; et je prends pour un effet de votre civilité l'ordre que vous me donnez de l'examiner; car vous pouviez le faire facilement vous-même, puisque ce qui est une étude pour les autres n'est qu'un divertissement pour vous. Mais puisque vous voulez en savoir mon sentiment, je vous dirai, monsieur, que l'auteur y touche une difficulté où beaucoup d'autres ont heurté : et c'est une chose étrange de voir qu'en une matière de géométrie il se rencontre tant de contestations. Il y a environ quinze ans que M. Hobbes crut que la ligne courbe d'une parabole donnée étoit égale à une ligne droite donnée. M. de Roberval ensuite dit qu'elle étoit égale à la ligne courbe d'une spirale donnée; mais sans en donner de démonstration autrement que par les mouvemens, dont on voit quelque chose dans le livre des hydrauliques du R. P. Mersenne : et comme cette manière de démontrer n'est pas absolument convaincante, d'autres géomètres crurent qu'il s'étoit trompé, et publièrent que cette ligne parabolique étoit égale à la demi-circonférence d'un cercle donné : le livre que vous m'envoyez maintenant soutient de nouveau la même chose. Cette diversité d'avis m'ayant étonné, je voulus reconnoître lequel étoit le véritable; car quelque nombre de géomètres qu'il y eût contre M. de Roberval, je n'en conclus rien contre lui : et au contraire, si on jugeoit de la géométrie par ces sortes de conjectures, la connoissance que j'ai de lui m'auroit fait pencher de son côté, le voyant persister dans son sentiment; mais comme ce n'est pas par là qu'on doit en juger, je résolus d'examiner moi-même si la ligne à laquelle on peut comparer la ligne parabolique donnée, est une ligne droite ou une spirale, ou une circonférence de cercle : c'est ce que je voulus chercher, comme si personne n'y avoit pensé; et sans m'arrêter, ni aux méthodes des mouvemens, ni à celles des indivisibles, mais en suivant celles des anciens, afin que la chose pût être désormais ferme et sans dispute. Je l'ai donc fait, et j'ai trouvé que M. de Roberval avoit eu raison, et que la ligne parabolique et la spirale sont égales l'une à l'autre : c'est ce que vous verrez. La démonstration est entière et exactement accomplie, et pourra vous plaire d'autant plus qu'elle est la seule de cette espèce, aucune autre n'ayant encore paru, à la manière des anciens, de la comparaison de deux li-

gnes de différente nature. Ainsi je puis dire, avec certitude, que la ligne parabolique est égale à la spirale, et je m'assure que cette preuve arrêtera toutes les contradictions. Voilà ce que vous avez demandé de moi : je souhaite que cela vous agrée, et que ce vous soit au moins une marque du désir que j'ai de vous satisfaire et de vous témoigner que je suis de tout mon cœur, etc.

De Paris, ce 10 décembre 1658.

PROPRIÉTÉS DU CERCLE.

I. *Si la touchante* EV (fig. 126) *est perpendiculaire au rayon* AE, *et que, l'arc* ÉB *étant pris moindre qu'un quart de cercle, on incline* BV, *faisant avec la touchante l'angle* BVE *aigu : je dis que toute la portion* BV *sera hors du cercle.*

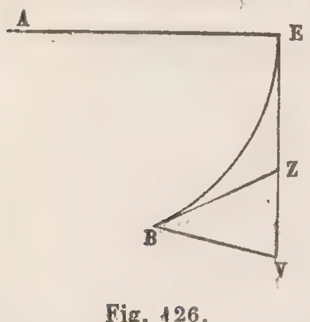


Fig. 126.

Car en menant la touchante BZ, elle fera angle obtus avez EZ (puisque l'arc BE est moindre qu'un quart de cercle). Donc l'angle BZE sera plus grand que l'angle BVE : donc le point Z est entre les points E, V : donc l'angle ABV est obtus ; donc la portion BV sera hors du cercle. Ce qu'il falloit démontrer.

II. *Si d'une extrémité du diamètre* (fig. 127) *est menée la touchante* SN, *et de l'autre extrémité* G *la droite* GN, *qui la coupe en* N, *et le cercle en* X : *je dis que la droite* SN *est plus grande que l'arc* SX.

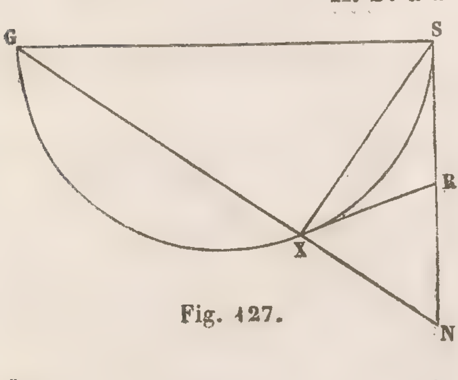


Fig. 127.

Car, en menant la touchante XR, les deux touchantes XR, RS, seront égales, tant entre elles, qu'à RN (à cause que l'angle SXN est droit) : donc SN est égale à SR, plus RX, qui sont ensemble plus grandes que l'arc SX. Ce qu'il falloit démontrer.

G S X L N

Fig. 128.

III. *Si la touchante* SL (fig. 128) *étant perpendiculaire au diamètre* SG, *est égale à l'arc* SX *moindre qu'un quart de cercle : je dis qu'en menant les droites* SX, XL, *les trois angles du triangle* XSL *sont aigus.*

Car en menant la droite GXN, l'angle XSL l'est visiblement, puisqu'il est égal à l'angle G ; l'angle SXL l'est aussi, puisqu'il divise l'angle

droit SXN, par la précédente; et l'angle SLX l'est, à plus forte raison, le côté SL qui est égal à l'arc SX, étant plus grand que la droite SX. Ce qu'il falloit démontrer.

IV. *Si, la touchante* S8 (fig. 129) *étant prise plus grande que le diamètre* SG, *auquel elle est perpendiculaire, l'on mène au centre la droite* 8T, *coupant le cercle au point* Y: *je dis que, quelque point qu'on prenne dans l'arc* SX, *comme* X, *dont on mène* SX *coupant* T8 *en* Q, *la portion* 8Q *est plus grande que l'arc* SX.

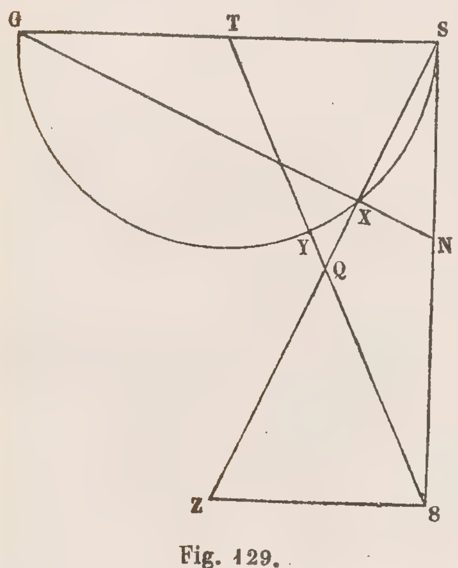


Fig. 129.

Car, en menant 8Z parallèle à ST, les triangles rectangles Z8S, NGS, seront semblables (à cause de l'égalité des angles G et 8SZ); donc les côtés seront proportionnels : mais GS est posée moindre que S8; donc SN est aussi moindre que Z8 : mais Z8 est moindre que 8Q (puisque ST est moindre que TQ, le point Q étant hors du cercle); donc SN est moindre que 8Q : mais l'arc SX est moindre que SN (par ce qui a été démontré); donc à plus forte raison l'arc SX est moindre que 8Q. Ce qu'il falloit démontrer.

V. *Si l'arc de cercle* EB (fig. 130) *moindre qu'un quart de cercle, est égal à la touchante* EV, *perpendiculaire au rayon* AE : *je dis que l'angle* EAV *sera plus grand que la moitié de l'angle* EAB.

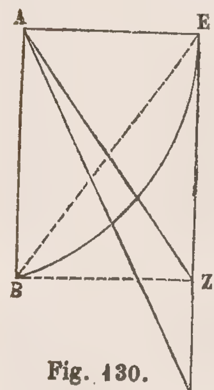


Fig. 130.

Car soit menée la droite AZ, qui coupe l'angle EAB en deux parties égales, et la touchante EV au point Z : il est visible que la portion EZ est moindre que la corde EB (puisque l'angle EZB est obtus, l'arc étant moindre qu'un quart de cercle); mais la corde EB est moindre que l'arc EB, et partant moindre que EV : donc à plus forte raison EZ est moindre que EV : donc à plus forte raison EZ est moindre que EV : donc l'angle EAZ est moindre que l'angle EAV. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPRIÉTÉS DE LA SPIRALE.

Si le rayon AB (fig. 131), qui est le commencement de la spirale de la première révolution BCDXA, est divisé en tant de portions égales qu'on

voudra, aux points A, Y, 4, 3, B : et les arcs menés de ces points au tour du centre commun A, coupant la spirale aux points C, D, X, etc.

Je suppose qu'on sache toutes les propriétés suivantes :

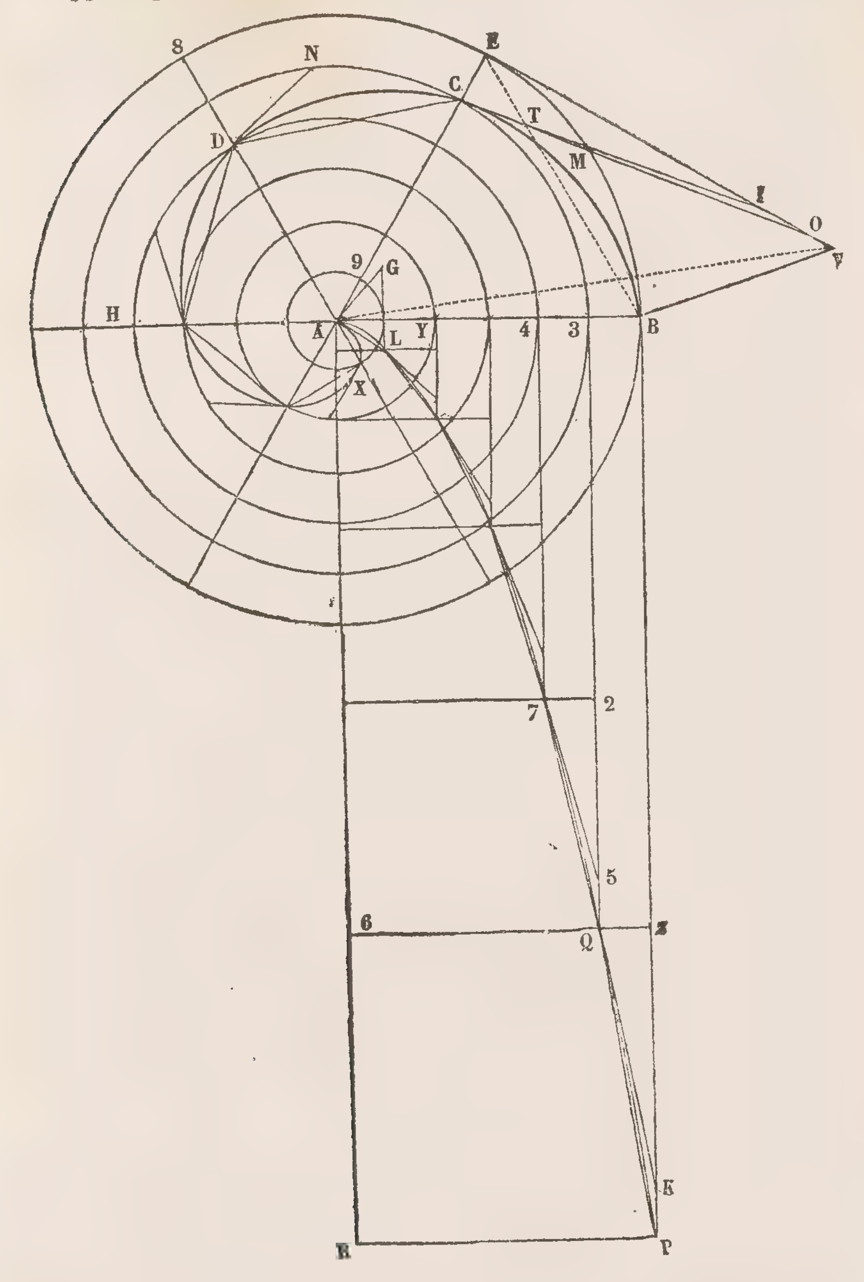


Fig. 131.

1° Que l'arc quelconque 3C est à l'arc 4D, comme le rectangle B3 in 3A au rectangle B4 in 4A.

2° Que les rayons AB, AE, A8, etc., font tous les angles égaux entre eux, et divisent les arcs en tant de portions égales entre elles que le rayon AB : et qu'ainsi telle partie que la première portion B3 est du rayon, telle partie l'arc BE l'est de sa circonférence, et l'arc CF ou 3C de la sienne : et telle partie est encore l'angle BAE de quatre angles droits.

3° Que le rayon entier BA est à une portion quelconque A3, comme la circonférence entière BEB à l'arc E8B, qui contient autant de portions égales du cercle, que A3 contient de portions égales du rayon, ou comme telle autre circonférence qu'on voudra 3C3, à l'arc correspondant CF3.

4° Que tous les arcs BE, 3C, 4S, compris entre deux rayons prochains AB, AE, qui comprennent un des arcs égaux, sont tous en proportion arithmétique : et que le moindre de ces arcs Y9, qui part du point Y le plus proche du centre, est égal à la différence dont chacun des autres diffère de son voisin : et qu'ainsi si le premier est 2, le second est 4, le troisième est 6: et ainsi toujours en suivant les nombres pairs.

5° Que ce moindre arc Y9, pris autant de fois que l'arc BE est dans sa circonférence, est égal au plus grand arc BE.

6° Que ce moindre arc Y9 est égal au dernier arc extérieur de la spirale XY.

7° Que l'angle aigu que fait la touchante à un point quelconque de la spirale C avec son rayon AC, se trouvera en faisant un triangle rectangle, dont la base soit ce rayon AC, et la hauteur soit égale à l'arc extérieur CF3. Car alors l'angle de la touchante avec son rayon sera égal à l'angle que l'hypoténuse d'un tel triangle rectangle fait avec sa base.

Conséquences. — 8° Que la touchante de la spirale au point A est la même que le rayon AB, et que les touchantes aux autres points font toujours avec les rayons menés de ces points des angles d'autant plus grands que le point d'attouchement est plus proche de B, parce que la raison du rayon à l'arc extérieur en est d'autant moindre : y ayant moindre raison de AC à l'arc CF3, que de AD à l'arc DH4, puisqu'en changeant et en renversant, il y a plus grande raison de l'arc CF3 à l'arc DH4, que de CA à AD ou AS, c'est-à-dire que du même arc CF3 à SD4.

9° Qu'ainsi si on mène des touchantes de tous les points où la spirale est coupée par les rayons qui divisent la circonférence en arcs égaux, le plus grand angle que ces touchantes fassent avec les rayons, est celui de la touchante menée du point B, où le premier rayon coupe la spirale, lequel est égal à celui d'une hypoténuse avec sa base, la base étant à la hauteur, comme le rayon à la circonférence. Et le moindre de ces angles est celui de la touchante menée du point X, où le dernier rayon coupe la spirale.

10° Que le moindre des angles des touchantes avec leurs rayons est plus grand que la moitié de l'angle compris par deux rayons prochains qui enferment l'un des arcs égaux ; savoir, la moitié de l'angle BAE.

Car l'angle de la touchante au point X est celui de l'hypoténuse d'un triangle avec sa base (la base étant à la hauteur, comme AX à l'arc extérieur XY, ou comme AY à l'arc Y9) ; donc en faisant la perpendiculaire YG égale à l'arc Y9, l'angle GAY sera celui de la touchante au point X avec son rayon. Or, cet angle GAY est plus grand que la moitié de l'angle YA9 ou BAE (par la dernière propriété du cercle) : et menant

la touchante EV égale à l'arc EB, et menant aussi l'hypoténuse AV, l'angle EAV sera égal à cet angle, qui est le moindre de tous, de la dernière touchante au point X avec son rayon : mais l'angle EAV est plus grand que la moitié de l'angle BAE, par ce qui a été démontré; donc l'angle de la touchante au point X est aussi toujours plus grand que la moitié de l'angle BAE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE.

Soit AB (fig. 132) *la touchante au sommet d'une parabole, divisée en tant de parties égales qu'on voudra aux points* 3, 4, Y, *d'où soient menés les diamètres ou les parallèles à l'axe, coupant la parabole en* Q, 7, L. *Et de ces points soient menées les touchantes jusqu'aux diamètres prochains* QK, 75, LT, etc. : *je dis que toutes les portions des diamètres* PK, Q5, 7T, LY, etc., *comprises entre les touchantes et la parabole, sont égales entre elles.*

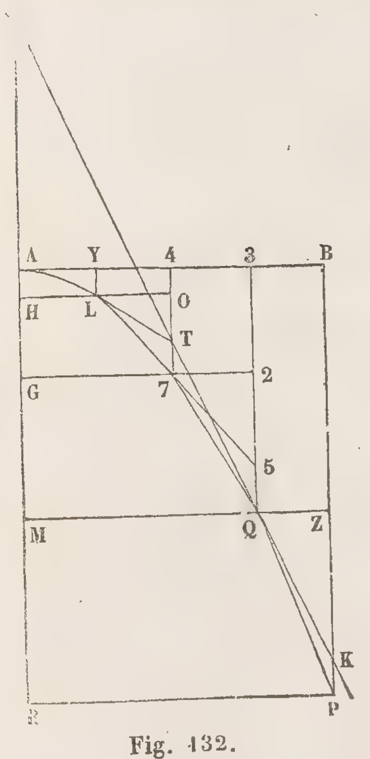


Fig. 132.

Car chacune, comme PK, par exemple, sera montrée égale à la première YL, en cette sorte :

Soit prolongée KQ (puisque PK est prise en exemple) jusques à l'axe au point S, et menée l'ordonnée QM.

Donc, par la nature de la parabole, puisque les deux diamètres SA, KP, sont coupés par la touchante SK, il arrivera que

SA est à PK comme QS carré à QK carré,
ou comme 3 A carré à 3 B carré,
ou comme 3 A carré à AY carré,
ou comme 3 Q
ou MA à LY.

Mais, à cause de la touchante, SA est égale à MA; donc PK est égale à LY. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose qu'on sache cette autre propriété de la parabole :

Que si on mène les ordonnées, par tous ces mêmes points, PR, QM, 7G, LH; toutes les portions de l'axe comprises entre ces ordonnées, savoir RM, MG, GH, HA, seront en proportion arithmétique : et que leur différence sera double de la première HA (il faut dire le même des droites qui leur sont égales, PZ, Q2, 7O, LY). De sorte que, si la dernière LY est 1, la seconde est 3, la troisième 5, etc.; ainsi toujours par les nombres impairs.

Avertissement.—Je démontre l'égalité de la ligne spirale avec la parabolique en inscrivant et circonscrivant, tant à la spirale qu'à la parabole, des figures desquelles je considère seulement le tour, où la somme des côtés.

La manière dont je me sers pour inscrire et circonscrire ces figures est telle.

Pour inscrire une figure en la parabole. — *Soit* (fig. 133) *une*

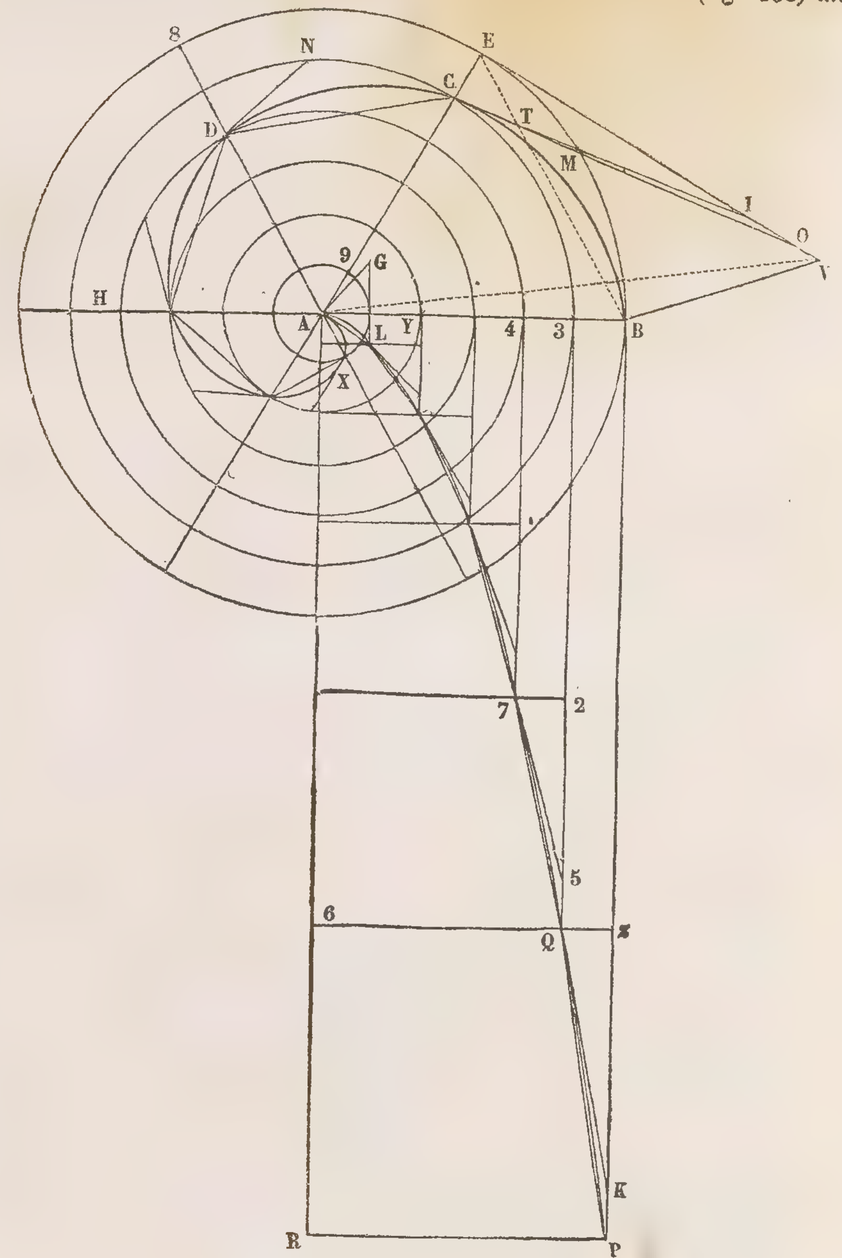


Fig. 133.

parabole dont AR *soit l'axe*, RP *la base*, AB *la touchante au sommet*, *divisée en tant de parties égales qu'on voudra*, *aux points* 3, 4, etc.,

d'où soient menées les parallèles à l'axe, qui coupent la parabole aux points 7, Q, P, etc. Les accommodées PQ, Q7, *etc., font une figure inscrite en la parabole, et c'est celle de laquelle je me sers, dont le tour est visiblement moindre que celui de la parabole, puisque, par la nature de la ligne droite, chaque accommodée est moindre que la portion de la parabole qu'elle sous-tend.*

Avertissement. — Je suppose le principe d'Archimède : *que si deux lignes sur le même plan ont les extrémités communes, et sont courbes vers la même part, celle qui est contenue sera moindre que celle qui la contient.*

Pour circonscrire une figure a la parabole. — *Soient, dans la même figure* 133, *des points* Q, 7, *etc., menées des touchantes* QK, 75, *etc., qui coupent les diamètres prochains en* K, 5, *etc., la figure* PKQ57, *etc., composée des touchantes* KQ, 57, *etc., et des portions extérieures des diamètres* PK, Q5, *etc., forme une figure circonscrite à la parabole, qui est celle dont je me sers, et dont le tour est visiblement plus grand que celui de la parabole, puisque les deux quelconques côtés liés* KK, *plus* PQ (*dont l'un est la touchante, et l'autre la portion extérieure du diamètre*), *sont plus grands que la portion de la parabole qu'ils enferment, puisqu'ils ont les extrémités* P, Q, *communes, et que la parabole est courbe vers la même part.*

Conséquence. — De cette description et de la propriété que nous avons démontrée de la parabole, il s'ensuit qu'en toute figure circonscrite à la parabole en la manière qui est ici marquée, les portions des parallèles à l'axe PK, Q5, LY, sont toutes égales entre elles.

Pour inscrire une figure en la spirale. — *Soit le rayon* AB *le commencement d'une spirale de la première révolution, divisé en parties égales aux points* 3, 4, *etc., d'où soient menés les cercles* 3C, 4DC, *etc., concentriques au grand, qui coupent la spirale en* C, D, *etc. Les accommodées* BC, CD, *etc., formeront une figure inscrite en la spirale, qui est celle dont je me sers, et dont le tour est visiblement moindre que celui de la spirale, puisque par la nature de la ligne droite, chaque accommodée est moindre que la portion de la spirale qu'elle sous-tend.*

Pour circonscrire une figure a la spirale. — *Soient des points* C, D, *etc., menées les touchantes de la spirale, jusques aux cercles prochains qu'elles coupent en* M, N, *etc., la figure* 8MCND, *composée des portions extérieures des arcs* BM, CN, *etc., et des touchantes* MC, ND, *etc., qui sera circonscrite à la spirale, est celle dont je me sers, et dont le tour est visiblement plus grand que celui de la spirale, puisque deux quelconques côtés liés* BM, *plus* MC (*dont l'un est un arc de cercle extérieur, et l'autre la touchante de la spirale*), *sont plus grands que la portion de la spirale qu'ils enferment, ces figures étant partout courbes vers la même part, et ayant les extrémités* B, C, *communes.*

Définition.—Soit, dans la même figure 133, la droite AB le commencement d'une spirale de la première révolution ; et soit la même droite AB la touchante au sommet d'une parabole, dont l'axe AR soit égal à la moitié de la circonférence du grand cercle BEB, et la base RP, égale au rayon AB. Cette parabole et cette spirale ayant cette condition, seront dites *correspondantes.*

Soit maintenant divisée AB en tant de portions égales qu'on voudra aux points 3, 4, Y, etc., d'où soient menés autant de cercles ayant le centre commun en A, qui coupent la spirale en C, D, etc., que de lignes droites parallèles à l'axe, qui coupent la parabole Q, 7, etc. (Donc chaque point du rayon, comme 3, donnera un point dans la parabole par la parallèle à l'axe 3Q, et un point dans la spirale par l'arc de cercle 3C.) Ces points sont dits *correspondans;* et la portion de la parabole entre Q et P *correspond* à la portion de la spirale entre B et C; et les inscrites CB, PQ, sont *correspondantes:* et par la même raison les inscrites DC, Q7.

Et si, de ces points Q, 7, etc., sont menées les ordonnées QZ, 72, etc., la portion QZ *correspond* à la portion CE, et 72 à DF, etc. Et la première portion PZ (égale à la première portion de l'axe, comprise entre les deux premières ordonnées) *correspond* à l'arc BE du premier cercle, compris entre les deux premiers rayons : et la seconde portion Q2, comprise entre la seconde et la troisième, *correspond* à l'arc du second cercle CF compris entre le second et le troisième rayon; et ainsi des autres. Et le triangle rectangle PQZ *correspond* au triligne BEC, fait de l'arc BE et des droites BCCE : et de même le triangle Q72 *correspond* au triligne CFDC; et les touchantes de la parabole et de la spirale QK, CM, sont *correspondantes*, étant menées des points correspondans Q, C; et la portion PK à l'arc BM, etc.

Rapports entre la parabole et la spirale, qui ont la condition supposée pour être dites correspondantes.

I. *Si une parabole et une spirale sont en la condition supposée : je dis que, quelque point qu'on prenne dans la touchante* AB, *comme* 3, *la portion du diamètre extérieur, ou bien* 3Q, *comprise entre le point* 3 *et la parabole, est égale à la moitié de l'arc* 3FC, *passant par le même point* 3, *et extérieur à la spirale.*

Car, par la nature de la spirale, la circonférence entière BEB est à l'arc extérieur CF3, comme BA carré à A3 carré (puisque l'entière BEB est à l'arc CF3, en raison composée de l'entière BEB à l'entière 3C3, ou de BST à A3, et de l'entière 3C3 à l'arc CF3, qui est encore comme BA à A3). Donc leurs moitiés sont aussi en même raison; et partant BP, qui est la moitié de la circonférence BEB, est à la moitié de l'arc CF3, comme AB carré à A3 carré, ou, par la nature de la parabole, comme la même BP à 3Q. Donc 3Q est égale à la moitié de l'arc CF3. Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire. — D'où il s'ensuit que le moindre des arcs Y9, compris entre deux rayons prochains, est double du dernier diamètre extérieur YL.

Car ce moindre arc Y9 est égal au dernier extérieur YX, lequel est double de sa portion YL par cette proposition.

II. *Les mêmes choses étant posées : je dis que les angles que les touchantes de la spirale font avec leurs rayons, sont égaux aux angles que les touchantes de la parabole font avec leurs ordonnées aux points correspondans; ou, ce qui est le même, que quelque point qu'on prenne dans la spirale, comme* C, *son correspondant* Q *dans la parabole, l'angle*

ECM *du rayon avec la touchante, sera égal à l'angle* ZQK *de l'ordonnée* ZQ *avec la touchante* QK.

Car la portion de la touchante, comprise entre le point Q et l'axe, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont la base est l'ordonnée Q6 (égale à A3 ou AC), et la hauteur est double de A 6 ou de Q3, et partant égale à l'arc extérieur CF3 (qui est double de la même Q3) : mais par la propriété VII de la spirale, l'angle ECM de la touchante au point C avec son rayon est aussi égal à l'angle de l'hypoténuse avec la base qui soit à la hauteur, comme le même rayon AC au même arc extérieur CF3. Donc l'angle ECM est égal à l'angle ZQK. Ce qu'il falloit démontrer.

III. *Les mêmes choses étant posées : je dis que chacun des arcs* BE CF, *etc.*, (*qui sont les mêmes que les arcs* BE, 3C, 45, *etc.*, *compri entre les deux rayons prochains*), *diminué de la moitié du dernier* Y9 *est égal à chacune des portions de l'axe qui lui correspond*, PZ, Q2, *etc* (*et qui sont les mêmes que les portions de l'axe entre les ordonnées*).

Car toutes ces portions sont entre elles comme les nombres impairs; et tous les arcs BE, CF ou 3C, sont entre eux comme les nombres pairs : mais le plus petit des arcs Y9 est double de la première portion YL, par le corollaire du rapport premier; donc si YL est 1, l'arc sera 2 : et partant toutes les portions P2, Q2, etc., étant 1, 3, 5, 7, 9, etc., et les arcs BE, 3C, etc., étant, 2 4, 6, 8, etc. : il s'ensuit que chacun diffère de son correspondant de l'unité, c'est-à-dire de la moitié de Y9. Ce qu'il falloit démontrer.

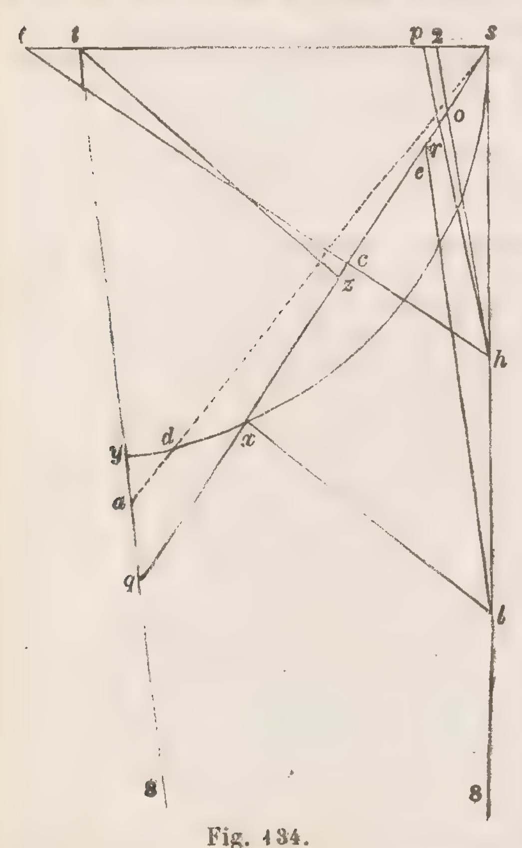


Fig. 134.

Lemme. — *Si une grandeur* A *est moindre que quatre autres ensemble* B, C, D, E : *je dis que la différence entre la première* A *et deux quelconques des autres, comme* B, *plus* C, *sera moindre que les quatre ensemble* B, C, D, E.

Cela est manifeste.

Problème. — *Étant donnée une parabole et une spirale en la condition supposée : inscrire et circonscrire en l'une et en l'autre des figures, en sorte que le tour de l'inscrite en la parabole ne diffère du tour de l'inscrite en la spirale, que d'une ligne moindre qu'une quelconque donnée* Z; *et de même pour les circonscrites.*

Soit pris dans une figure séparée (fig. 134) le rayon *ts* plus grand que

le rayon AB; et ayant élevé *s*8 perpendiculairement égale à la circonférence dont *ts* est le rayon, soit menée 8*t*, coupant son cercle en *y*: soit maintenant de 8Y retranchée 8*a* de telle grandeur qu'on voudra, pourvu qu'elle soit moindre qu'un tiers de Z; et ayant mené *as* coupant l'arc en *d*, soit divisée lá circonférence en tant d'arcs égaux qu'on voudra, pourvu que chacun, comme *sx*, soit moindre que l'arc *sd.*

Je dis qu'en divisant le cercle BEB en autant d'arcs égaux, et le rayon AB de même en autant de portions égales aux points 3, 4, etc., d'où soient menés à l'ordinaire des cercles et des parallèles à l'axe, qui, coupant la spirale et la parabole, y donneront les points pour inscrire et circonscrire des figures en la manière qui a été marquée : ces figures satisferont au problème.

Première partie de la démonstration. — *Que la différence entre les deux inscrites est moindre que* Z.

Pour prouver que la somme des côtés de l'inscrite en la parabole diffère des côtés de l'inscrite en la spirale d'une ligne moindre que Z, on fera voir que chaque côté de l'une ne diffère de son correspondant que d'une ligne, qui, prise autant de fois qu'il y a de côtés, ou qu'il y a d'arcs en la circonférence, est moindre que Z. D'où il s'ensuit nécessairement que toutes ces différences ensemble, prises chacune une fois, sont moindres que Z.

Je dis donc que la différence entre BC, par exemple, et son correspondant PQ, prise autant de fois qu'il y a d'arcs en la circonférence, est moindre que Z.

Car en menant du point E (puisque BC est prise en exemple) la perpendiculaire EV égale à l'arc EB, et retranchant EO égale à ZP (et qu'ainsi l'excès VO soit égal au demi-arc Y9) : il est manifeste que CO sera égale à PQ, CE étant égale à QZ; donc il suffira de montrer que la différence entre CO et CB, prise autant de fois qu'il y a d'arcs, est moindre que Z. Mais cette différence entre BC et CO est moindre que la somme des deux droites BV, VO (car la différence des côtés BC, CO, est moindre que la base BO, laquelle BO est moindre que les côtés ensemble BV, VO). Donc il suffira *a fortiori* de montrer que les deux côtes ensemble BV, VO, pris autant de fois qu'il y a d'arcs, sont moindres que Z : et cela est aisé, puisque chacun, pris autant de fois qu'il y a d'arcs, est moindre qu'un demi et même qu'un tiers de Z.

Car cela est visible de VO, puisque, étant égale à un demi Y9, il est clair qu'étant prise autant de fois qu'il y a d'arcs, elle ne sera égale qu'au demi-arc BE, et partant, bien moindre qu'un demi Z, l'arc BE étant moindre qu'un demi Z, puisqu'il est moindre que l'arc *sx* de la figure séparée (le rayon AB étant moindre que *ts*), lequel arc *sx* est moindre que 8Q par le lemme IV des spirales, et *a fortiori*, que 8A, qui a été pris moindre qu'un tiers de Z.

Il ne reste donc qu'à démontrer la même chose de BV, et cela sera aisé en cette sorte :

Soit prise dans la figure séparée la portion *sl* égale à l'arc *sx*, et soit menée *le* parallèle à 8*t*8, et *tz* parallèle à *lx*. Donc, puisque l'angle *lxs*

est aigu par la troisième propriété du cercle, l'angle *tzs* sera obtus, et partant *tz* sera moindre que *ts* ou *ty*, et *a fortiori* que *tq* : donc aussi, à cause des parallèles, *lx* sera moindre que *le* : mais *le* est à $8q$, comme *ls* à $s8$: donc *lx* a moindre raison à $8q$, que *ls* à $s8$, ou que l'arc *lx* à sa circonférence : donc *lx* prise autant de fois que l'arc *sx* est en sa circonférence, ou l'arc BE dans la sienne, est moindre que $8q$, et *a fortiori* qu'un tiers de Z.

Donc BV *a fortiori*, prise autant de fois, sera moindre qu'un tiers de Z, puisqu'elle est moindre que *lx*, le rayon AB étant moindre que le rayon *ts*, et toutes choses proportionnelles. Ce qu'il falloit démontrer.

Deuxième partie de la démonstration. — *Que la différence entre les deux circonscrites est moindre que* Z.

Pour prouver que la somme des côtés de la circonscrite à la spirale, ne diffère de celle des côtés de la circonscrite à la parabole, que d'une ligne moindre que Z : on montrera que deux quelconques côtés liés, circonscrits à la spirale, comme l'arc BM, plus la touchante MC, ne diffèrent des deux côtés correspondans en la parabole PK, plus QK, que d'une ligne, qui, prise autant de fois qu'il y a d'arcs en la circonférence, est moindre que Z. D'où il s'ensuit nécessairement que toutes les différences prises chacune une fois seront moindres que Z.

Je dis donc que la différence entre deux quelconques côtés liés BM, plus MC, et les correspondans PK, plus KQ, prise autant de fois qu'il y a d'arcs, est moindre que Z.

Car puisque CE est égal à QZ, que les angles Z et CEV sont droits, et que les angles ECI du rayon avec la touchante de la spirale, et ZKQ de l'ordonnée avec la touchante de la parabole, sont égaux : il s'ensuit que EI est égal à ZK, et CI à QK, et OI à KP ou à YL ou au demi-arc Y9.

Maintenant, puisque EV touche le cercle BE en E, la portion IV est toute hors le cercle ; et, puisque BVY est inclinée en angle aigu, et aussi CI (l'angle au point E étant droit) : il s'ensuit, par la première propriété du cercle, que les droites BV, MI, sont toutes hors le cercle ; donc les trois droites BV, VI, IM, étant toutes hors le cercle, l'arc BM, par le principe d'Archimède, sera moindre que les trois droites, ou que ces quatre droites BV, VO, OI, IM ; donc, par le lemme précédent, la différence entre l'arc BM et les deux quelconques OI, plus IM, sera moindre que les quatre BV, VO, OI, IM, ou que les trois BV, VI, IM. Donc la différence, qui est toute la même, entre l'arc BM, plus MC, et les deux OI, plus IMC, ou les deux PK, plus KQ, est moindre que BV, plus VI, plus IM.

Donc, pour montrer que la différence entre BM, plus MC, et PK, plus KQ, prise autant qu'il y a d'arcs, est moindre que Z, il suffira *a fortiori*, de montrer que ces trois ensemble BV, plus VI, plus IM, prises autant de fois, sont moindres que Z. Et cela est aisé, puisque chacune d'elles, prise autant de fois, est moindre qu'un tiers de Z.

Car cela est déjà montré de BV.

Cela est aussi aisé de VI, puisqu'elle est égale à l'arc Y9 (chacune des

deux VO, OI étant, montrée égale à un demi-Y 9), et qu'ainsi VI, étant prise autant de fois qu'il y a d'arcs, ne sera qu'égale à l'arc BE, et partant moindre qu'un tiers de Z.

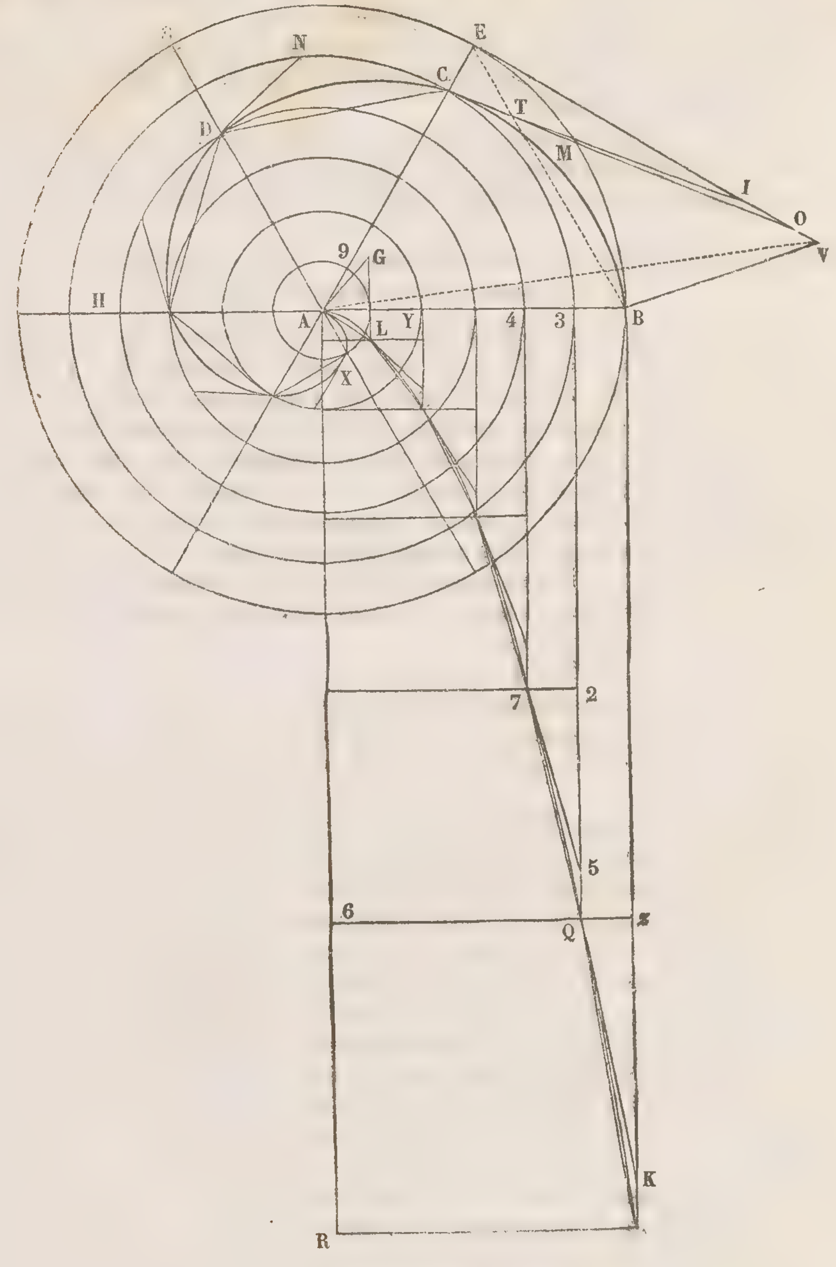


Fig. 135.

Il ne reste donc qu'à le montrer de IM, en cette sorte.

Soit prise dans la figure séparée, *sh* égale à EI; et soient menées *ho2*,

parallèle à $c8$, et hcf perpendiculaire à scq. Soit maintenant menée hrp, faisant l'angle hps égal à l'angle ICE de la figure 135 : donc elle tombera entre hf et $h2$, puisque l'angle hps ou ECI, du rayon avec la touchante de la spirale, est moindre que l'angle $s2h$ ou $st8$ (à cause qu'au triangle rectangle $st8$, la base est à la hauteur comme le rayon à la circonférence), et plus grand que la moitié de l'angle BAE, ou que l'angle IEB, ou hsx, ou hfs : mais l'angle C est droit; donc l'angle hro est obtus : et partant hr est moindre que ho; mais ho est à $8q$ comme hs à $s8$. Donc il y a moindre raison de hr à $8q$, que de hs à $s8$: donc *a fortiori* il y a moindre raison de hr à un tiers de Z, que de hs ou EI, à la circonférence BEB, moindre que $s8$, et *a fortiori*, que de EV ou l'arc BE à la circonférence. Donc hr, prise autant de fois que l'arc BE est en sa circonférence, est moindre qu'un tiers de Z.

Et partant IT (qui est égal à hs, toutes choses étant pareilles), et *a fortiori* IM, pris autant qu'il y a d'arcs, sera moindre qu'un tiers de Z. Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire. — Il s'ensuit de cette même construction que la figure inscrite en la parabole, ne diffère de la circonscrite à la même parabole, que d'une ligne moindre que Z.

Car en tout triangle rectangle ou amblygone, l'excès dont les deux moindres côtés ensemble surpassent le plus grand, est toujours moindre que chacun des côtés. D'où il s'ensuit que deux côtés liés quelconques de la figure circonscrite, comme PK, plus KQ, surpassent l'inscrite PQ d'une ligne moindre que le côté PK (puisque l'angle de la touchante avec la parallèle à l'axe est toujours obtus, si ce n'est au sommet où il est droit); donc tous les excès ensemble, dont les côtés liés de la circonscrite surpassent les côtés liés de l'inscrite, sont moindres que tous les côtés PK ensemble, c'est-à-dire moindres que YL pris autant de fois qu'il y a d'inscrites, ou qu'il y a d'arcs en la circonférence; or, YL ou la moitié de Y9 prise autant de fois, est moindre que Z; donc tous les excès ensemble, dont les côtés circonscrits surpassent les inscrites, sont moindres que Z.

Théorème. — *Si une parabole et une spirale sont en la condition supposée, je dis que la ligne parabolique est égale à la ligne spirale.*

Car si elles ne sont pas égales, soit X la différence; et soit Z le tiers de X, et soient inscrites et circonscrites à la parabole et à la spirale des figures comme en la précédente, en sorte que la différence entre les inscrites soit moindre que Z, et que la différence entre les circonscrites soit aussi moindre que Z.

Maintenant, puisque la ligne spirale est moindre que le tour de la figure qui lui est circonscrite, et plus grande que le tour de l'inscrite : il s'ensuit que la différence entre la ligne spirale et le tour de la figure qui lui est inscrite, est moindre que Z; et de même pour la parabole (puisque la différence entre l'inscrite et la circonscrite est moindre que Z, par la construction); mais la différence entre l'inscrite en la spirale et l'inscrite en la parabole, est aussi moindre que Z, par le corollaire de la précédente. Donc la différence entre la ligne spirale et le tour de l'inscrite en la parabole, est nécessairement moindre que deux Z. Mais

la différence entre l'inscrite en la parabole et la ligne même de la parabole, est moindre que Z. Donc la différence entre la ligne de la spirale et la ligne de la parabole est nécessairement moindre que trois Z, c'est-à-dire, que X, contre la supposition.

On montrera toujours la même absurdité, quelque différence qu'on suppose entre les lignes spirale et parabolique. Donc il n'y en a aucune : donc elles sont égales. Ce qu'il falloit démontrer.

LETTRE DE HUGUENS DE ZULICHEM A DETTONVILLE.

Monsieur,

Le gentilhomme inconnu ne peut vous avoir fait entendre que la moindre partie de l'estime que j'ai pour vous; et, si vous n'en croyez beaucoup davantage, vous ne savez non plus combien j'ai eu de joie en recevant celle que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire : ne pouvant l'exprimer dignement, je vous dirai seulement que je me crois bien plus heureux qu'auparavant, après avoir reçu les offres de votre amitié, et que je répute cette acquisition pour la plus insigne que j'aie à faire jamais. Je suis si loin de croire de l'avoir méritée par l'accueil que j'ai fait à cet excellent homme, qu'au contraire je sais bien qu'il faut que j'en demande pardon, ne l'ayant pas traité ni selon sa condition, ni même selon que méritoient celles de ses qualités qu'il n'a pu me celer. Je le prierai de ne point s'en souvenir, et vous, monsieur, de croire qu'à l'avenir je tâcherai de m'acquitter mieux envers ceux qui m'apporteront de vos nouvelles. J'ai été bien aise de voir que mon invention des horloges est dans votre approbation, quoique les éloges qu'il vous a plu lui donner sont beaucoup au-dessus de ce qu'elle mérite. Il y a beaucoup de hasard à rencontrer des choses semblables, et fort peu de science ou de subtilité. Aussi ne sont-elles propres qu'à acquérir du crédit aux mathématiques parmi le commun des hommes; au lieu que des lettres comme vous allez nous en produire seront suivies, avec raison, de l'admiration et de l'étonnement des plus savants. Je ne suis pas de ce nombre; mais j'ai un désir incroyable de voir la suite de cette merveilleuse lettre dont vous m'avez fait la faveur de m'envoyer le commencement, et d'autant plus que cet échantillon me fait espérer que nous y trouverons les choses les plus sublimes traitées avec toute la clarté et évidence possible. Vous ne devez donc pas craindre de grossir vos paquets de ces feuilles si précieuses, mais croire au contraire que vous m'obligerez infiniment de le faire le plus tôt que vous pourrez. J'ai essayé quelques-uns de vos problèmes, mais sans prétendre aux prix; et je me crois heureux de n'avoir pas entrepris la solution des plus difficiles, parce que tant de personnes plus intelligentes que moi n'en ayant pu venir à bout, cela me fait conclure que ma peine, aussi bien que la leur, auroit été perdue : même dans ce que je crois avoir trouvé, j'ai commis une erreur assez lourde, de laquelle je ne me suis aperçu que depuis avoir vu que mon calcul ne répondoit pas au vôtre. Je parle de la proportion que vous avez trouvée de sept fois le diamètre à six fois la circonférence, qui est vraie, et non

pas la mienne, que je crois que vous avez vue dans la lettre que j'ai envoyée il y a quelque temps à M. de Carcavi. Vous jugerez bien pourtant que je ne me suis abusé qu'au calcul, et non pas à la méthode, laquelle je connois assurément être sans faute, puisqu'elle confirme votre proposition susdite : et je pourrois par là même trouver encore le centre de gravité de la moitié du solide que fait le double espace BCG dans votre figure à l'entour de sa base, mais non pas aux autres cas, faute de savoir le centre de gravité de certaines portions du cylindre. J'ai prié M. de Carcavi de vous communiquer aussi ce que j'avois ajouté dans ladite lettre touchant les superficies des conoïdes et sphéroïdes, et de la longueur de la ligne parabolique. Et peu de jours après avoir envoyé cette lettre, je trouvai le centre de gravité de la ligne cycloïde et de ses parties coupées par une parallèle à la base, qui ont cette propriété étrange, que leur centre de gravité divise leur axe toujours en la raison de 1 à 2, comme vous savez, monsieur; mais vous saurez aussi que je ne vous parle de ces choses que pour vous faire voir l'inclination que je garde toujours pour la science dans laquelle vous excellez si fort, afin que vous m'en estimiez d'autant plus digne de profiter de votre instruction. Je souhaite que ce puisse être bientôt, et il me tarde fort de joindre la qualité de votre disciple à celle de, monsieur, votre, etc.

A la Haye, ce 5 février 1659.

LETTRE DE SLUZE A PASCAL.

Monsieur,

Bien que je devrois passer pour importun, je ne saurois m'abstenir de vous témoigner, par la présente, le contentement que j'ai reçu d'apprendre de vos Traités que le peu que j'avois démontré touchant les cycloïdes, considérées universellement, a tant de rapport avec vos principes. Il me souvient de vous avoir envoyé un lemme, l'automne passé, sur lequel est fondé tout ce que j'avois trouvé. En voici un exemple. Soit un triligne composé de l'angle droit ABC (fig. 136) et de la courbe CA ; et

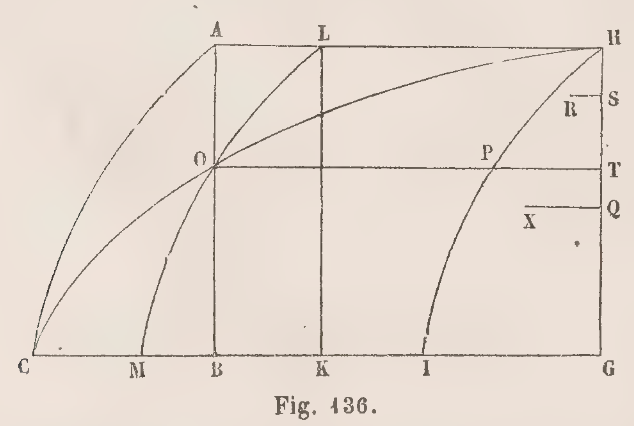


Fig. 136.

par le mouvement de la figure ABC sur CB prolongée, et un autre mouvement égal du point C sur la courbe AC, soit décrite la cycloïde CCH.

Soit aussi le point X le centre de gravité de la courbe IPH égale à CA, duquel soit menée à HG la perpendiculaire XQ : je dis que le triligne mixtiligne CHA au triligne mixtiligne CHI, aura toujours la même raison que HQ à QG. De même en prenant quelque point en la cycloïde, comme O, par lequel passe le triligne générateur MOLK, et menant OPT parallèle à CG, si R est centre de la courbe PH, duquel on applique RS, le triligne LOH au triligne HOP sera toujours en même raison de HS à ST. D'où s'ensuit (supposant le triangle générateur connu) que, quand nous avons le centre de pesanteur de la ligne courbe du triligne et des parties d'icelle, nous avons aussi la quadrature de la cycloïde; et qu'ayant d'ailleurs la quadrature de la cycloïde, nous avons le centre de la courbe qui l'engendre, et d'où aussi l'on peut tirer quantité d'autres conséquences que vous avez déjà tirées, ou que vous tirerez sans difficulté. Mes principes sont quasi les mêmes que ceux dont vous vous êtes servi; je le vois par les règles de la statique et par les nombres (comme vous avez pu remarquer dans le lemme que je vous ai envoyé); mais votre application est plus belle et plus universelle. Pardonnez à mon incivilité, si j'interromps vos occupations plus sérieuses, quoique ce soit une faute dans laquelle je suis en hasard de retomber encore ci-après; car si je puis rencontrer un jour le loisir que je n'ai pu avoir jusqu'à présent, d'étudier parfaitement vos principes, je prendrai la hardiesse de vous écrire, s'il y a en quoi j'aie eu le bonheur de rencontrer quelque chose qui ait du rapport avec iceux; et j'espère que vous aurez la bonté de le souffrir de celui qui est absolument, monsieur, votre, etc.

A Liége, ce 29 avril 1659.

LETTRE DE SLUZE A PASCAL.

Monsieur,

Ayant rencontré avant-hier l'occasion d'un ami qui s'en alloit à Sedan, je l'ai chargé de quelques copies du livre dont je vous avois écrit il y a quinze jours, et j'espère qu'elles arriveront à Paris en même temps que la présente, ou au moins avec les coches de Sedan. Le paquet porte l'inscription de votre nom; mais, en cas que l'on tardât à vous le porter, vous m'obligerez fort de le faire prendre au logis où les coches arrivent, et me donner votre sentiment sur le contenu du livre, pendant que je demeure inviolablement, monsieur, votre, etc.

A Liége, le 19 juillet 1659.

LETTRE DE LEIBNITZ A PÉRIER,

CONSEILLER A LA COUR DES AIDES DE CLERMONT-FERRAND, NEVEU DE M. PASCAL.

Monsieur,

Vous m'avez obligé sensiblement, en me communiquant les manuscrits qui restent de feu M. Pascal, touchant les coniques. Car, outre les marques de votre bienveillance, que j'estime beaucoup, vous me donnez

moyen de profiter, par la lecture des méditations d'un des meilleurs esprits du siècle : je souhaiterois pourtant d'avoir pu les lire avec un peu plus d'application; mais le grand nombre de distractions qui ne me laissent pas disposer entièrement de mon temps, ne l'ont pas permis. Néanmoins je crois les avoir lues assez pour pouvoir satisfaire à votre demande, et pour vous dire que je les tiens assez entières et finies pour paroître à la vue du public; et, afin que vous puissiez juger si je parle avec fondement, je veux vous faire un récit des pièces dont elles sont composées, et de la manière que je crois qu'on peut les ranger.

I. Il faut commencer par la pièce dont l'inscription est : *Generatio coni sectionum tangentium et secantium, seu projectio peripheriæ, tangentium, et secantium circuli, in quibuscumque oculi, plani ac tabellæ positionibus.* Car c'est le fondement de tout le reste.

II. Après avoir expliqué la génération des sections du cône, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons, il explique les propriétés remarquables d'une certaine figure, composée de six lignes droites, qu'il appelle *hexagramme mystique.* J'ai mis au-devant ces mots, *De hexagrammo mystico et conico:* une partie de cette pièce se trouve répétée et insérée mot à mot dans une autre, savoir, les définitions (avec leurs corrollaires); et les proportions (mais sans les démonstrations) qui se trouvent répétées dans le traité *De loco solido*, suppléeront au défaut de quelques-unes qui manquent dans celui-ci, *De hexagrammo.*

Le IIIe traité doit être, à mon avis, celui qui porte cette inscription : *De quatuor tangentibus, et rectis punctæ tactuum jungentibus, unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur.* Car c'est là-dedans que l'usage de l'hexagramme paroît, et que les propriétés des centres et des diamètres des sections coniques sont expliquées. Je crois qu'il n'y manque rien.

Le IVe traité est : *De proportionibus segmentorum secantium et tangentium.* Car les propriétés fondamentales des sections coniques, qui dépendent de la connoissance du centre et des diamètres, étant expliquées dans le traité précédent, il falloit donner quelques belles propriétés universellement conçues, touchant les proportions des droites menées à la section conique; et c'est de là que dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnées. Les figures y sont aussi, et je ne vois rien qui manque. J'ai mis après ce traité une feuille qui porte pour titre ces mots : *De correspondentibus diametrorum*, dont la troisième page traite *de summa et differentia laterum, seu de focis.*

Le Ve traité est : *De tactionibus conicis*, c'est-à-dire (afin que le titre ne trompe pas), *de punctis et rectis quas sectio conica attingit;* mais je n'en trouve pas toutes les figures.

Le VIe traité sera : *De loco solido :* j'y ai mis ce titre, parce qu'il n'y en a point : c'est pour ce sujet que MM. Descartes et Fermat ont travaillé, quand ils ont donné la composition du lieu solide, chacun à sa mode, Pappus leur en ayant donné l'occasion. Or, je crois que M. Pascal a voulu donner ce traité à part, ou le communiquer au moins à ses amis, parce qu'il y répete beaucoup de choses du deuxième traité, mot

à mot et assez au long; c'est pourquoi il commence par ceci : *Definitiones excerptæ ex conicis;* savoir, du deuxième traité susdit, où il explique ce qu'il entend par ces mots, *hexagrammum mysticum*, *conicum*, etc. On peut juger par là que le premier, le second, le troisième, et peut-être le cinquième traité, doivent faire proprement les coniques; et ce mot se trouve aussi au dos du premier traité. Les grandes figures appartiennent à ce sixième traité.

J'ai mis ensemble quelques fragmens. Il y a un papier imprimé dont le titre est, *Essais des coniques ;* et comme il s'y trouve deux fois tout de même, j'espère que vous permettrez, monsieur, que j'en retienne un. Il y a un fragment, *De restitutione coni*, savoir, les diamètres et paramètres étant donnés, retrouver les sections coniques. Ce discours paroît entier, et a ses figures. Il y a un autre fragment où se trouvent ces mots au commencement, *Magnum problema;* et je crois que c'est celui-ci qui y est compris : *Dato puncto in sublimi*, *et solido conico ex eo descripto*, *solidum ita secare*, *ut exhibeat sectionem conicam datæ similem :* mais cela n'est pas mis au net.

Il y a quelques problèmes sur une autre feuille, qui sont cotés; mais il en manque le premier : on en dira ce qu'on pourra en forme d'appendice; mais le corps de l'ouvrage, composé des six premiers traités, me paroît assez net et achevé.

Je conclus que cet ouvrage est en état d'être imprimé; et il ne faut pas demander s'il le mérite; je crois même qu'il est bon de ne pas tarder davantage, parce que je vois paroître des traités qui ont quelque rapport à ce qui est dans une partie de celui-ci : c'est pourquoi je crois qu'il est bon de le donner au plus tôt, avant qu'il perde la grâce de la nouveauté. J'en ai parlé plus amplement à messieurs vos frères, dont je vous dois la connoissance, et que j'ai priés de me conserver l'honneur de votre bienveillance. J'avois espéré de vous revoir un jour ici; mais je vois que vos affaires ne l'ont pas encore permis, et j'ai peu d'espérance de passer par Clermont. Je souhaiterois de pouvoir vous donner des marques plus convaincantes de l'estime que j'ai pour vous, et de la passion que j'ai pour tout ce qui regarde feu M. Pascal; mais je vous supplie de vous contenter cependant de celle-ci. Je suis, monsieur, votre très-humble et très-obéissant serviteur, LEIBNITZ.

A Paris, le 30 août 1676.

FIN DU TROISIÈME ET DERNIER VOLUME.

TABLE ANALYTIQUE

A

C

D

E

I

L

M

S

T

FIN DE LA TABLE ANALYTIQUE.

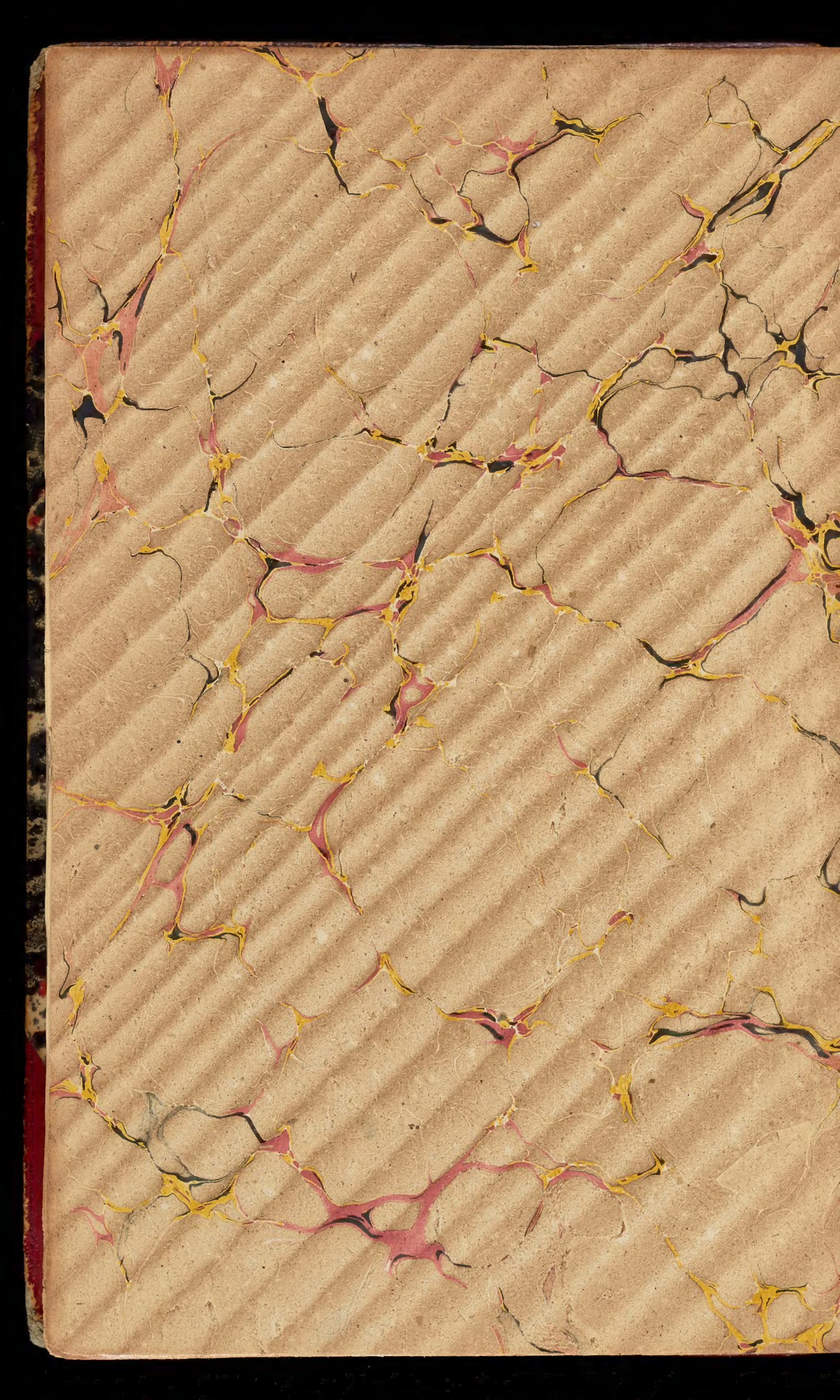
TABLE.

PHYSIQUE.

MATHÉMATIQUES.

FIN DE LA TABLE DU TROISIÈME ET DERNIER VOLUME.

Paris. — Imprimerie générale de Ch. Lahure, rue de Fleurus, 9.




GETTY RESEARCH INSTITUTE
3 3125 01057 9080

